KAPITEL IV:

Einige klassische Themen der Logik

Wir stellen der bisher behandelten Logik der 1. Stufe hier die Logik der 2. Stufe gegenüber. Wir zeigen ihre Vorteile und ihre Nachteile.

Danach widmen wir uns einigen Problemen, die seit der Antike zum klassischen Bestand der Logik gehören: (in §19) die Antinomie vom Lügner und (in §20) die Aristotelische Syllogistik.

§18. *Die Logik der 2. Stufe*

Viele Eigenschaften, die innerhalb einer mathematischen Theorie betrachtet werden, benötigen zu ihrer Formulierung mengentheoretische Begriffe.

- In der Gruppentheorie beispielsweise benötigt der Begriff der „einfachen Gruppe" zu seiner Formulierung den Bezug auf alle Teilmengen der Gruppe:

  G ist *einfach* $\Leftrightarrow \forall H \subseteq G$ (Wenn H ein Normalteiler von G ist, dann ist $H = G$ oder $H = \{1\}$).

- In der Ringtheorie benötigt der Begriff des „noetherschen Ringes" zu seiner Formulierung nicht nur den Bezug auf alle Teilmengen des Ringes, sondern auch noch den Begriff der endlichen Menge:

  R ist *noethersch* $\Leftrightarrow \forall I$ (Wenn I ein Ideal von R ist, dann ist I endlich erzeugt).

- In der Körper-Theorie benötigt der Begriff des „total-positiven" Elementes a den Bezug auf alle 2-stelligen Relationen:

  a ist *total-positiv* im Körper K $\Leftrightarrow \forall R \subseteq K \times K$ (wenn R eine lineare Ordnung auf K ist, unter der die Addition und Multiplikation von K monoton sind, dann ist a (bezüglich R) größer-oder-gleich 0).

Diese (und viele vergleichbare) Begriffe können nicht in den elementaren Sprachen 1. Stufe der Gruppentheorie, der Ringtheorie, bzw. der Körpertheorie formuliert werden. Es empfielt sich daher, die jeweiligen Sprachen um Variable für Teilmengen, Relationen und Funktionen zu erweitern.

Definition einer formalen Sprache der 2. Stufe: $\mathcal{L}_{II}$.

Sei $\mathcal{L}$ eine quantorenlogische Sprache erster Stufe der Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$. Wir erweitern das Alphabet von $\mathcal{L}$ um neue Variable wie folgt:

- für jede natürliche Zahl $m \geq 1$ unendlich viele Variable X_n^m, $n \in \mathbb{N}$ (mit der intendierten Bedeutung: X_n^m ist eine Variable, die den Bereich aller m-stelligen Relationen durchläuft),

- für jede natürliche Zahl $m \geq 1$ unendlich viele Variable F^{m}_{n}, $n \in \mathbb{N}$ (mit der intendierten Bedeutung: F^{m}_{n} ist eine Variable, die den Bereich aller m-stelligen Funktionen durchläuft).

Ausgehend von diesem Zeichenvorrat werden die Terme und Formeln wie folgt gebildet.

<u>Der Term-Kalkül:</u> Erweitere das System der Regeln (1), (2), (3) aus §8 um die folgende 4. Regel (dabei stehen $m \geq 1$ und $n \geq 0$ für natürliche Zahlen):

Regel 4: Wenn man t_1 und t_2 und ... und t_m hinschreiben darf, dann darf man auch $F^{m}_{n}(t_1,t_2, \ldots ,t_m)$ hinschreiben.

Definition. Die und nur die Zeichenreihen, die man nach endlich vielen Schritten aufgrund der Regeln 1 bis 4 des Term-Kalküls hinschreiben darf, heißen *Terme* von $\mathcal{L}_{II}$.

Beachte, daß nach Regel 1 die Individuen-Variablen v_0, v_1, v_2,... Terme sind, aber die Funktions-Variablen F^{m}_{n} und die Prädikaten-Variablen X^{m}_{n} keine Terme von $\mathcal{L}_{II}$ sind!

<u>Der Formel-Kalkül:</u> Erweitere das System der Regeln (1), (2), (3) aus §8 um die folgende 4. Regel (dabei stehen $m \geq 1$ und $n \geq 0$ für natürliche Zahlen) und erweitere auch Regel 3 wie folgt:

Regel 3: Wenn man sowohl Φ als auch Ψ hinschreiben darf, dann darf man auch $(\neg\Phi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$, $\forall v_n\Phi$, $\forall F^{m}_{n}\Phi$ und $\forall X^{m}_{n}\Phi$ hinschreiben.

Regel 4: Wenn t_1 und t_2 und ... und t_m Terme sind, dann darf man auch $X^{m}_{n}(t_1,t_2, \ldots ,t_m)$ hinschreiben.

Definition. Die und nur die Zeichenreihen, die man nach endlich vielen Schritten aufgrund der Regeln 1 bis 4 des Formel-Kalküls hinschreiben darf, heißen *Formeln* von $\mathcal{L}_{II}$.

Die weitere Entwicklung der Syntax wird ähnlich wie in §8 entwickelt. Da wir hier nur einen kurzen Abriß der Logik der 2. Stufe geben wollen, können wir darauf verzichten. Relevant sind jedoch die semantischen Begriffe.

Den Begriff der $\mathcal{L}$-Struktur können wir ohne jede Abänderung aus §9 übernehmen. Diese haben die Form

$$\mathfrak{M} = \langle M, f_j, R_k, c_i \rangle_{j \in J, k \in K, i \in I} = \langle M, \dots \rangle,$$

wobei die Interpretation von allen konstanten (nicht-logischen) Symbolen von $\mathcal{L}$ explizit aufgeführt wird.

Zur Interpretation der variablen Symbole (der Individuen-Variablen $v_0, v_1, \dots$, der Funktions-Variablen $F^m_0, F^m_1, \dots$ und der Prädikaten-Variablen $X^m_0, X^m_1, \dots$) dient der Begriff der Belegung.

Definition. Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Dann wird jede Abbildung h von der Menge aller Variablen von $\mathcal{L}_{II}$ in $M \cup P(M) \cup P(M \times M) \cup \dots \cup M^M \cup \dots$ „Belegung“ genannt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(B 1) $\forall n \in \mathbb{N}$: $h(v_n) \in M$,

(B 2) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall 1 \leq m \in \mathbb{N}$: $h(F^m_n) \in M^{(M^m)}$,

(B 3) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall 1 \leq m \in \mathbb{N}$: $h(X^m_n) \subseteq M^m = M \times M \times \dots \times M$.

Dabei ist wie üblich A^B die Menge aller Abbildungen von (ganz) B in A.

In dieser Definition wird das festgelegt, was intendiert war: die Sorte der Variablen $v_0, v_1, \dots$ durchläuft nur Elemente (=Individuen) des zugrunde gelegten Bereiches M, die Sorte der Variablen $F^m_0, F^m_1, \dots$ durchläuft nur die Menge aller m-stelligen Abbildungen von M in M und die Sorte der Variablen $X^m_0, X^m_1, \dots$ durchläuft nur die Familie der m-stelligen Relationen in M. Insbesondere durchlaufen die Variablen $X^1_0, X^1_1, X^1_2, \dots$ die Familie aller Teilmengen von M.

Mit dem Begriff der Belegung h können dann die Auswertungen der Terme t und die Auswertungen der Formeln in einer $\mathcal{L}$-Struktur (durch Rekursion über der Termaufbau, bzw. den Formelaufbau) definiert werden.

Definition. Die *Auswertung* eines beliebigen Termes t in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ unter der Belegung h wird mit $w^h_{\mathfrak{M}}(t)$ bezeichnet. Die Definition aus §9 wird um die folgende 4. Klausel erweitert:

(4) $w^h_{\mathfrak{M}}(F^m_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)) = h(F^m_n)(w^h_{\mathfrak{M}}(t_1), w^h_{\mathfrak{M}}(t_2), \ldots, w^h_{\mathfrak{M}}(t_m))$.

Definition. Die Auswertung einer $\mathcal{L}$-Formel Φ in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ unter der Belegung h wird mit $val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi)$ bezeichnet. Die Definition aus §9 wird um die folgenden Klauseln erweitert:

(A7):

$$val^h_{\mathfrak{M}}(X^m_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)) = \begin{cases} 1, \text{ falls } \langle w^h_{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, w^h_{\mathfrak{M}}(t_m)\rangle \in h(X^m_n), \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

(A8):

$$val^h_{\mathfrak{M}}(\forall F^m_n : \Phi) = \begin{cases} 1, \text{ falls für alle } \varphi \in M^{(M^m)}: val^{h^*}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1 \text{ gilt,} \\ \text{wobei } h^* = (h - \{\langle F^m_n, h(F^m_n)\rangle\}) \cup \{\langle F^m_n, \varphi\rangle\}, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

(A9):

$$val^h_{\mathfrak{M}}(\forall X^m_n : \Phi) = \begin{cases} 1, \text{ falls für alle } R \subseteq M^m : val^{h^*}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1 \text{ gilt,} \\ \text{wobei } h^* = (h - \{\langle X^m_n, h(X^m_n)\rangle\}) \cup \{\langle X^m_n, R\rangle\}, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Tautologien. Wie in der Logik der 1. Stufe nennt man eine $\mathcal{L}_{II}$-Aussage eine *Tautologie* (oder eine *logisch-allgemeingültige Aussage*), wenn sie in allen $\mathcal{L}$-Strukturen gilt. - Verba docent, exempla trahunt:

(1) Das von G.W.Leibniz mehrfach ausgesprochene Prinzip, daß zwei Individuen gleich sind, wenn sie dieselben Eigenschaften haben, ist eine Tautologie in der Logik der 2. Stufe: *identitas indiscernibilium*

$$\forall v_0 \forall v_1 \big(v_0 = v_1 \leftrightarrow \forall X^1_0 \, (X^1_0(v_0) \leftrightarrow X^1_0(v_1))\big).$$

Leibniz drückte sich so aus: „Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate" (siehe Leibniz: 'Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis' - „Ein nicht unelegantes Beispiel abstrakter Beweisführung", geschrieben etwa 1685-1687, in: Philosophische Schriften, Band 4, Wiss. Buchges. Darmstadt 1992, Seite 156).

(2) Wenn Φ eine logisch allgemeingültige Aussage 1. Stufe ist und Φ^* aus Φ entsteht, indem man jedes (konstante) m-stellige Funktionszeichen $\dot{f}_j$ durch die Funktionsvariable F^m_j ersetzt und jedes (konstante) n-stellige Relationszeichen $\dot{R}_k$ durch die Relationsvariable X^n_k ersetzt, dann ist der universelle Abschluß $\forall F^m_j \forall X^n_k \ldots \Phi^*$ eine Tautologie. Der Beweis ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß nach Voraussetzung Φ in allen $\mathcal{L}$-Strukturen gilt, und dabei sind alle möglichen Wahlen der Funktionen und Relationen zugelassen.

Beispielsweise ist $\forall v_1 \forall v_2 \exists v_0 \colon \; v_0 = \dot{f}_j(v_1, v_2)$ nach Lemma 12.7 eine Tautologie, wenn $\dot{f}_j$ ein (konstantes) 2-stelliges Funktions-Zeichen ist. Dann ist aber auch $\forall F^2_j \forall v_1 \forall v_2 \exists v_0 \colon \; v_0 = F^2_j(v_1, v_2)$ eine Tautologie.

<u>18.1</u> <u>Proposition</u> (Richard Dedekind, 1887) *Es gibt Aussagen der 2. Stufe Φ_e und Φ_a so, daß für beliebige $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ gilt:*

(i) $\langle M, \ldots \rangle \models \Phi_e \quad \Leftrightarrow \quad$ M *ist endlich;*

(ii) $\langle M, \ldots \rangle \models \Phi_a \quad \Leftrightarrow \quad$ M *ist abzählbar-unendlich.*

<u>Beweis</u>. <u>Zu</u> (i): Sei Φ_e die folgende $\mathcal{L}_{II}$-Aussage:

$$\forall F^1_0 \big(\forall v_0 \forall v_1 \, (F^1_0(v_0) = F^1_0(v_1) \rightarrow v_0 = v_1) \rightarrow \forall v_0 \exists v_1 \colon v_0 = F^1_0(v_1)\big).$$

Diese Formel besagt, daß jede einstellige injektive Funktion F von M in M surjektiv ist. Das ist richtig, wenn M eine endliche Menge ist (Beweis durch vollständige Induktion nach $n = \mathcal{Kard}(M)$). Eine unendliche Menge M hat jedoch stets eine abzählbar-unendliche Teilmenge, etwa $\{a_i; \; i \in \mathbb{N}\} \subseteq M$, und hier ist die Abbildung F mit $F(b) = b$ für $b \in M - \{a_i; i \in \mathbb{N}\}$ und $F(a_i) = a_{2i}$ (für $i \in \mathbb{N}$) offenbar injektiv, aber nicht surjektiv.

Zu (ii): Sei Φ_a die folgende $\mathcal{L}_{II}$-Aussage:

$$\neg\Phi_e \wedge \exists X_0^2(\forall v_0\forall v_1\forall v_2(X_0^2(v_0,v_1) \wedge X_0^2(v_1,v_2) \rightarrow X_0^2(v_0,v_2)) \wedge$$

$$\wedge \forall v_0: \neg X_0^2(v_0,v_0) \wedge \forall v_0\forall v_1(X_0^2(v_0,v_1) \rightarrow \neg X_0^2(v_1,v_0)) \wedge$$

$$\wedge \forall v_0\exists X_0^1: (\forall v_1(X_0^2(v_1,v_0) \leftrightarrow X_0^1(v_1)) \wedge X_0^1 \text{ ist endlich})).$$

Die Formel besagt, daß die Anzahl der Individuen nicht endlich ist und daß es auf der Menge aller Individuen eine strikte lineare Ordnung gibt (nämlich X_0^2) mit der Eigenschaft, daß jedes Anfangssegment

$$X_0^1 = \{v_1; X_0^2(v_1,v_0)\} = \text{Menge aller echten Vorgänger von } v_0,$$

endlich ist. Dabei ist „X_0^1 *ist endlich*" eine Abkürzung für den folgenden Ausdruck: „Jede injektive Abbildung F_0^1 von X_0^1 in sich ist surjektiv", oder ausführlicher:

$$\forall F_0^1(\forall v_0\forall v_1(X_0^1(v_0) \wedge X_0^1(v_1) \wedge X_0^1(F_0^1(v_0)) \wedge X_0^1(F_0^1(v_1)) \wedge$$

$$F_0^1(v_0) = F_0^1(v_1) \rightarrow v_0 = v_1) \rightarrow \forall v_0\exists v_1: v_0 = F_0^1(v_1) \wedge X_0^1(v_0) \wedge X_0^1(v_1)).$$

Eine lineare Ordnung mit der Eigenschaft, daß ihre sämtlichen echten Anfangssegmente endlich sind, ist höchstens abzählbar. ❑

18.2 Satz. *In der Logik der 2. Stufe ist weder eine Aufwärtsaussage noch eine Abwärtsaussage vom Löwenheim-Skolemschen Typ gültig.*

Beweis. (1.) Daß es in der Logik der 2. Stufe keine Aufwärtsaussage vom Löwenheim-Skolemschen Typ gilt, ergibt sich sofort aus Satz 18.1: in jeder abzählbar-unendlichen $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ gilt die $\mathcal{L}_{II}$-Aussage Φ_a. Wenn $\mathfrak{N}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{M}$ ist und vorausgesetzt wird, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ dieselben $\mathcal{L}_{II}$-Aussagen erfüllen, dann müßte Φ_a auch in $\mathfrak{N}$ gelten und $\mathfrak{N}$ wäre abzählbar.

(2.) Daß es in der Logik der 2. Stufe keine Abwärtsaussage vom Löwenheim-Skolemschen Typ gilt, ergibt sich aus der Charakterisierbarkeit des Körpers der reellen Zahlen in der Logik der 2. Stufe. Sei Θ die Konjunktion der Axiome für den Begriff des linear-angeordneten Körpers (in der Sprache der 1. Stufe mit $+,-,\bullet,{}^{-1},\leq,0,1)$ und sei Ψ die Aussage „jede beschänkte, nicht-leere Teilmenge hat eine kleinste obere Schranke“, also mit anderen Worten:

$$\forall X_0^1\big(\exists v_0 \forall v_1(X_0^1(v_1) \rightarrow v_1 \leq v_0) \wedge \exists v_0 . X_0^1(v_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists v_2\big((\forall v_1(X_0^1(v_1) \rightarrow v_1 \leq v_2)) \wedge \forall v_3(\forall v_1(X_0^1(v_1) \rightarrow v_1 \leq v_3) \rightarrow v_2 \leq v_3)\big).$$

In der Algebra zeigt man, daß jedes Modell von $\Theta \wedge \Psi$ ein stetig geordneter, formal-reeller Körper ist und daß der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen (bis auf Isomorphie) der einzige derartige Körper ist. Jedes Modell von $\Theta \wedge \Psi$ hat also die Mächtigkeit des Kontinuums und kann keine abzählbaren Modelle haben. ❑

Der Beweis von Satz 18.2 zeigte, daß der geordnete Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine kategorische Axiomatisierung in einer Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{II}}$ der 2. Stufe hat. Die Logik der 2. Stufe kennt zwar keine Sätze vom Typ der Löwenheim-Skolemschen Sätze, bietet dafür aber die Möglichkeit einer kategorischen Axiomatisierung von manchen wichtigen Strukturen der Mathematik. Von besonderer Bedeutung ist die kategorische Axiomatisierung der Reihe der natürlichen Zahlen. Wir gehen kurz darauf ein.

Kategorizität der Dedekind-Peano-Arithmetik $\mathrm{DPA}_{\mathrm{II}}$ der zweiten Stufe

Richard Dedekind gab in seiner berühmten Schrift *„Was sind und was sollen die Zahlen“* (Braunschweig, 1887) eine Begründung der Arithmetik der natürlichen Zahlen. Die Prinzipien, die der Dedekindschen Schrift zugrunde liegen, hat Guiseppe Peano (1858-1932) in der Schrift *„Arithmetices Principia nova methodo exposita“* (Turin 1889) kurz und bündig als Axiome der Arithmetik hervorgehoben. Man bezeichnet daher dieses Axiomen-System als Dedekind-Peano-Arithmetik der 2. Stufe. Wir unterscheiden dabei zwei Versionen: die kleine Dedekind-Peano-Arithmetik und die (große) Dedekind-Peano-Arithmetik.

Definition. Sei $\mathcal{L}_{\mathrm{kDPA}}$ die Sprache der *kleinen Dedekind-Peano-Arithmetik* der 2. Stufe, deren einzige außerlogische Zeichen eine Individuenkonstante $\dot{0}$ und ein 1-stelliges Funktions-Zeichen $\dot{\mathrm{v}}$ sind. Das System der folgenden drei

Axiome wird ***kleine Dedekind-Peano-Arithmetik*** genannt und mit $\mathrm{kDPA}_{\mathrm{II}}$ bezeichnet.

(kDPA 1) $\forall x: \dot{v}(x) \neq \dot{0}$,

(kDPA 2) $\forall x \forall y(\dot{v}(x)=\dot{v}(y) \rightarrow x=y)$,

(kDPA 3) $\forall X_0^1((X_0^1(\dot{0}) \wedge \forall x(X_0^1(x) \rightarrow X_0^1(\dot{v}(x)))) \rightarrow \forall x: X_0^1(x))$.

(kDPA 3) ist das sogenannte Induktions-Axiom. Die intendierte Bedeutung von $\dot{0}$ ist die *Null* und die intendierte Bedeutung von $\dot{v}(n)$ ist $n+1$ (d.h. $\dot{v}(n)$ ist der Nachfolger von n).

Bemerkung. Wenn $\mathfrak{N} = \langle N, \nu, \Diamond \rangle$ ein Modell der kleinen Dedekind-Peano-Arithmetik ist und $m \in N$ mit $m \neq \Diamond$, dann gibt es ein $n \in N$ mit $\nu(n) = m$.

Beweis. Sei $m \neq \Diamond$ beliebig und betrachte $A = \{x \in N;\ \exists y \in N:\ x = \nu(y)\} \cup \{\Diamond\}$. Es gilt $\Diamond \in A$ und für $a \in A$ ist auch $\nu(a) \in A$. Aus (kDPA 3) folgt $A = N$. Daher ist $m \in A$ und folglich gibt es ein $n \in N$ mit $m = \nu(n)$. ❑

18.3 SATZ *Das Axiomensystem* $\mathrm{kDPA}_{\mathrm{II}}$ *ist kategorisch: je zwei Modelle der kleinen Dedekind-Peano-Arithmetik sind isomorph.*

Beweis. Seien $\mathfrak{M} = \langle M, \mu, 0 \rangle$ und $\mathfrak{N} = \langle N, \nu, \Diamond \rangle$ zwei Modelle der kleinen Dedekind-Peano-Arithmetik $\mathrm{kDPA}_{\mathrm{II}}$. Wir müssen einen Isomorphismus $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ angeben. Wir definieren f durch Rekursion und setzen:

$$f(0) := \Diamond,$$

und

$$\forall m \in M:\ f(\mu(m)) := \nu(f(m)).$$

Nach der obigen Bemerkung ist f *auf* der ganzen Menge M erklärt: Dom(f) = M.

1. Behauptung: f ist surjektiv.

Sei $B = \{f(x);\ x \in M\}$. Dann ist $\Diamond = f(0) \in B \subseteq N$. Wir zeigen, daß auch $b \in B \Rightarrow \nu(b) \in B$ gilt: aus $b \in B$ folgt, daß b die Form $b = f(x)$ hat für ein $x \in M$. Die Rekursionsgleichung liefert dann $\nu(b) = \nu(f(x)) = f(\mu(x)) \in B$. Aus (kDPA 3) können wir also $B = N$ folgern. Also ist f surjektiv.

2. Behauptung: f ist ein-eindeutig (d.h. bijektiv).

Sei $D=\{x\in M;\ \forall m\in M(f(m)=f(x) \Rightarrow m=x)\}$. Wir zeigen zuerst, daß $0 \in D$ gilt: sei dazu m irgendein Element von M mit $f(m)=f(0)$. Sollte $m \neq 0$ gelten, dann gäbe es nach obiger Bemerkung ein $w \in M$ mit $m = \mu(w)$, also nach (kDPA 1): $f(0) = f(m) = f(\mu(w)) = \nu(f(w)) \neq \Diamond = f(0)$, ein Widerspruch! Es muß also doch $m=0$ gelten. Damit haben wir $0\in D$ gezeigt.

Wir zeigen, daß $d\in D \Rightarrow \mu(d) \in D$ gilt: sei also $d\in D$ gegeben. Laut Definition von D heißt das: d hat die Eigenschaft

(†) $$\forall y\in M(f(y)=f(d) \Rightarrow y=d).$$

Sei jetzt $m\in M$ beliebig mit $f(m)=f(\mu(d))$. Angenommen, es würde $m\neq\mu(d)$ gelten. Wenn dabei $m=0$ sein sollte, dann würde

$$f(m)=f(\mu(d))=\nu(f(d))\neq\Diamond=f(0)=f(m)$$

nach (kDPA 1) gelten, ein Widerspruch! Also ist $m\neq 0$ und nach der obigen Bemerkung ist $m = \mu(k)$ für ein $k\in M$. Also: $\mu(k)=m\neq\mu(d)$, also $k\neq d$. Daraus folgt nach (†) $f(k) \neq f(d)$, also nach (kDPA 2):

$$f(m)=f(\mu(d))=\nu(f(d))\neq\nu(f(k))=f(\mu(k))=f(m),$$

ein Widerspruch! Die Annahme $m\neq\mu(d)$ ist also zu verwerfen. Damit haben wir $\mu(d) \in D$ gezeigt.

Mit (kDPA 3) schließen wir, daß $D = M$ gilt, womit die Bijektivität von f bewiesen ist. Die Rekursionsgleichungen zeigen, daß f strukturerhaltend ist, also ein Isomorphismus ist. ❑

Den weiteren Aufbau der Arithmetik wollen wir hier nicht verfolgen. Wir notieren nur noch, daß man auf einem Modell der kleinen Dedekind-Peano-Arithmetik $\mathfrak{N} = \langle N,\nu,0\rangle$ die <u>Addition</u> „+“ und <u>Multiplikation</u> „·“ durch Rekursion einführt:

$n+0 = n$, und für alle $k\in N$: $n + \nu(k) = \nu(n+k)$.

$n\bullet 0 = 0$, und für alle $k\in N$: $n \bullet \nu(k) = n + n\cdot k$.

Da es bis auf Isomorphie nur ein einziges Modell von $kDPA_{II}$ gibt, können wir jedes Modell von $kDPA_{II}$ als „den“ Bereich der natürlichen Zahlen bezeichnen.

Die (große) **Dedekind-Peano-Arithmetik DPA** der 2. Stufe). Die Sprache der *Dedekind-Peano-Arithmetik* der 2. Stufe, hat die folgenden außerlogischen

Zeichen: zwei Individuenkonstanten $\dot{0}$ und $\dot{1}$ sowie zwei 2-stellige Funktions-Zeichen + und • . Das System der folgenden sieben Axiome wird ***Dedekind-Peano-Arithmetik der 2. Stufe*** genannt und mit DPA_{II} bezeichnet.

(DPA 1) $\forall x:\ x + 1 \neq \dot{0}$.

(DPA 2) $\forall x \forall y(\, x+1 = y+1 \to x = y\,)$,

(DPA 3) $\forall X_0^1((X_0^1(\dot{0}) \wedge \forall x(X_0^1(x) \to X_0^1(\dot{v}(x)))) \to \forall x\colon X_0^1(x))$.

(DPA 4) $\forall x\colon x + \dot{0} = x$,

(DPA 5) $\forall x \forall y\colon (x+y) + \dot{1} = x + (y + \dot{1})$,

(DPA 6) $\forall x\colon\; x \bullet \dot{0} = \dot{0}$.

(DPA 7) $\forall x \forall y\colon (x \bullet (y + \dot{1}) = (x \bullet y) + x$.

Nach Satz 18.3 ist offenbar auch die Dedekind-Peano-Arithmetik DPA_{II} kategorisch.

— ∞ — ∞ — ∞ —

Wir wollen jetzt prüfen, ob die anderen großen Sätze der Logik der 1. Stufe eine Entsprechung in der Logik der 2. Stufe haben. Lassen sich der Kompaktheits-Satz und der Vollständigkeits-Satz übertragen?

18.4 Satz. *Die Logik der 2. Stufe kennt keinen Kompaktheits-Satz.*

Beweis. Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei Φ_n die folgende Aussage 1. Stufe:

$\Phi_n \triangleq \exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_n : v_1 \neq v_2 \wedge v_1 \neq v_3 \wedge v_2 \neq v_3 \wedge \ldots \wedge v_1 \neq v_n \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \neq v_n$.

(Φ_n besagt: es gibt mindestens n paarweise verschiedene Individuen). Sei Ψ die folgende Aussage 2. Stufe:

$$\exists X_0^2(\, \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2(\, X_0^2(v_0,v_1) \wedge X_0^2(v_1,v_2) \to X_0^2(v_0,v_2)\,) \wedge$$

$$\wedge\; \forall v_0\colon \neg X_0^2(v_0,v_0) \;\wedge\; \forall v_0 \forall v_1(\, X_0^2(v_0,v_1) \to \neg X_0^2(v_1,v_0)\,) \wedge$$

$$\wedge\; \forall v_0 \exists v_1\colon X_0^2(v_0,v_1)\,).$$

(Ψ besagt, daß es eine 2-stellige Relation R auf dem Bereich M aller Individuen gibt, die M (strikt) linear ordnet und eine unendliche strikt-aufsteigende Teilmenge hat).

Es ist klar, daß $\Xi = \{\Phi_n;\ 1 \le n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg\Psi\}$ kein Modell haben kann, denn es müßte alle Aussagen Φ_n (für $1 \le n \in \mathbb{N}$) erfüllen, also unendlich sein, und würde dann aber auch Ψ erfüllen (jede Wohlordnung des Individuenbereiches kann als Interpretation von X_0^2 genommen werden). Andererseits hat jede endliche Teilmenge von Ξ offenbar ein Modell. ❑

Den Folgerungsbegriff führt man wie in der Logik der 1. Stufe ein. Wenn Σ eine Menge von $\mathcal{L}_{II}$-Aussagen ist und Φ eine $\mathcal{L}_{II}$-Aussage ist, dann sagt man

aus Σ *folgt* Φ (in Zeichen: $\Sigma \models \Phi$),

wenn in jeder $\mathcal{L}$-Struktur, in der alle Aussagen aus Σ gelten, stets auch Φ gilt.

Es stellt sich die Frage, ob es auch für die Logik der 2. Stufe ein System von Ableitungs-Regeln gibt, das einerseits korrekt ist und andererseits vollständig ist (d.h. alle Folgerungen herzuleiten gestattet). Die Antwort ist negativ. Wir zeigen zunächst, daß es in der Logik der 2. Stufe keinen „starken" Vollständigkeits-Satz gibt, d.h. das Folgern aus beliebigen Mengen von Prämissen kann nicht durch einen korrekten Kalkül nachvollziehbar gemacht werden.

Es stellt sich dann die Frage, ob es denn nicht mindestens einen „schwachen" Vollständigkeits-Satz gibt. Wir werden zeigen, daß auch hier die Antwort negativ ist: die Menge aller Tautologien in der Logik der 2. Stufe kann nicht durch einen Kalkül erzeugt werden. Der Beweis dieses Satzes ist jedoch sehr viel schwieriger und verwendet den ersten Gödelschen Unvollständigkeits-Satz.

18.5 Satz. *Die Logik der 2. Stufe kennt keinen starken Vollständigkeits-Satz.*

Beweis. Angenommen es gäbe ein korrektes System von Regeln mit dessen Hilfe man aus jeder beliebig vorgegebenen Prämissen-Menge Σ (von $\mathcal{L}_{II}$-Aussagen) jede Folgerung Θ in endlich vielen Schritten herleiten könnte.

Um diese Annahme zu widerlegen, betrachten wir die Menge

$$\Xi = \{\Phi_n;\ 1 \le n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg\Psi\},$$

die wir schon im Beweis von Satz 18.4 verwendet hatten. Dort hatten wir gesehen, daß Ξ kein Modell hat. Sei etwa Γ die Aussage $\forall v_0\colon v_0 = v_0$. Da Ξ kein Modell hat, gilt offenbar $\Xi \models \Gamma \wedge \neg\Gamma$. Nach der Annahme müßte $\Gamma \wedge \neg\Gamma$ in endlich vielen Schritten aus Ξ herleitbar sein. In eine solche Herleitung gehen nur endlich viele Prämissen ein. Es müßte also eine endliche Teilmenge Δ von Ξ geben mit $\Delta \vdash \Gamma \wedge \neg\Gamma$. Da der Kalkül korrekt sein soll, würde dann auch

$\Delta \models \Gamma \wedge \neg \Gamma$ gelten , und das hieße: Δ hätte kein Modell, ein Widerspruch, denn im Beweis von 18.4 wurde gezeigt, daß jede endliche Teilmenge von Ξ ein Modell hat. ❑

Wir zeigen jetzt, daß die Logik der 2. Stufe nicht einmal einen „schwachen" Vollständigkeits-Satz kennt. Darauf hat zuerst Kurt Gödel am 6. September 1930 in seinem Vortrag auf der „Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften" in Königsberg/Pr. hingewiesen. Das Vortragsmanuskript ist im 3. Band der „Gesammelten Werke" von K. Gödel (Oxford, 1995, pp.16-28) abgedruckt. Der Beweis verwendet den „ersten Unvollständigkeits-Satz" von Gödel, den wir hier ohne Beweis mitteilen:

Der 1. Unvollständigkeits-Satz (K. Gödel, 1930): *Jede rekursiv-aufzählbare (d.h. algorithmisch erzeugbare) Menge von Aussagen der 1. Stufe, die in den natürlichen Zahlen* $\langle \mathbb{N}, +, \bullet, 0, 1 \rangle$ *gelten, ist unvollständig (d.h. ist von der Menge aller in* $\langle \mathbb{N}, +, \bullet, 0, 1 \rangle$ *gültigen Aussagen 1. Stufe verschieden).*

Wir bemerken, daß dem gegenüber die Menge aller Aussagen 1. Stufe, die in der Struktur $\langle \mathbb{N}, \mathrm{v}, 0 \rangle$ gelten, wobei v die Nachfolger-Funktion ist, rekursiv ist!

18.6 Satz (Kurt Gödel, 1930) *Die Logik der 2. Stufe kennt keinen „schwachen" Vollständigkeits-Satz; das heißt: es gibt keinen korrekten Kalkül, mit dessen Hilfe man alle Tautologien aus* $\mathcal{L}_{II}$ *herleiten kann.*

Beweis. Angenommen es gäbe ein korrektes System von Regeln mit dessen Hilfe man für jede Sprache $\mathcal{L}_{II}$ der 2. Stufe alle logisch-allgemeingültigen $\mathcal{L}_{II}$-Aussagen (d.h. alle Tautologien) herleiten könnte. Dies würde insbesondere für die Sprache der Dedekind-Peano-Arithmetik gelten. Sei $\mathcal{L}$ die Sprache 1. Stufe, deren einzige außerlogische Zeichen die Individuenkonstanten $\dot{0}$ und $\dot{1}$ sowie die 2-stelligen Funktions-Zeichen $+$ und $\bullet$ sind, und sei $\mathcal{L}_{II}$ die Erweiterung von $\mathcal{L}$ zur Sprache der 2. Stufe. Betrachte die Menge aller Tautologien, die der Sprache $\mathcal{L}_{II}$ angehören:

$$\mathrm{Taut}_{II} = \{\Phi;\ \Phi \text{ ist } \mathcal{L}_{II}\text{-Aussage und es ist } \models \Phi\}.$$

Nach Voraussetzung gibt es einen Kalkül (also einen Algorithmus), mit dessen Hilfe man schrittweise alle Elemente von Taut_{II} erzeugen kann (man sagt auch: Taut_{II} wäre 'rekursiv aufzählbar'). Dann ist aber auch die folgende Menge A algorithmisch erzeugbar (d.h. rekursiv aufzählbar), denn man kann ja den

Algorithmus zur Erzeugung von ganz $\mathrm{Taut}_{\mathrm{II}}$ nehmen und zusätzlich überprüfen, ob die erzeugte Formel syntaktisch die Gestalt $\mathrm{DPA}_{\mathrm{II}} \to \Theta$ hat, wobei Θ eine $\mathcal{L}$-Aussage 1. Stufe ist:

$$\begin{aligned} A = \ & \{\Phi;\ \Phi \text{ ist } \mathcal{L}\text{-Aussage und es ist } \models \mathrm{DPA}_{\mathrm{II}} \to \Phi\} \\ = \ & \{\Phi;\ \Phi \text{ ist } \mathcal{L}\text{-Aussage und es ist } \mathrm{DPA}_{\mathrm{II}} \models \Phi\} \\ = \ & \{\Phi;\ \Phi \text{ ist } \mathcal{L}\text{-Aussage und es ist } \langle \mathbb{N},+,\bullet,0,1\rangle \models \Phi\}, \end{aligned}$$

wobei die erste Umformung nach dem Deduktions-Theorem gilt und die zweite Umformung nach Satz 18.3 (Kategorizität von $\mathrm{DPA}_{\mathrm{II}}$) gilt. Nach der 3. Beschreibung von A wäre aber A eine vollständige Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen. Das widerspricht jedoch dem 1. Gödelschen Unvollständigkeits-Satz. Die Existenz eines vollständigen Kalküls zur Herleitung aller $\mathcal{L}_{\mathrm{II}}$-Tautologien ist also zu verwerfen. ❑

Übungsaufgaben zu §18

(1) Zeigen Sie, daß der Begriff der wohlgeordneten Menge in der Logik der 2. Stufe durch einen einzigen Satz ausdrückbar ist.

(2) Zeigen Sie, daß es eine Aussage der 2. Stufe Φ_1 gibt, so daß für beliebige $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ gilt: $(\langle M, \dots \rangle \models \Phi_1) \Leftrightarrow$ M hat Mächtigkeit $\aleph_1$.

> Lösung: Mit den Formeln Φ_e und Φ_a aus Satz 18.1 sei Φ_1 der Ausdruck: $\neg\Phi_e \wedge \neg\Phi_a \wedge$ es gibt eine lineare Ordnung, deren sämtliche echten Anfangssegmente endlich oder abzählbar-unendlich sind. ❑

(3) Schreiben Sie in der ringtheoretischen Sprache der 2.Stufe einen Ausdruck hin, dessen Modelle genau die noetherschen Ringe sind.

§19. *Die Antinomie vom Lügner*

„So ein Ragout von Wahrheit und von Lügen,
das ist die Köcherey, die mir am besten schmeckt.“

Mephisto in den Paralipomena zum Faust I
von J.W.Goethe.

Wir wollen über *Antinomien* und *Paradoxien* sprechen.

Eine ‘Antinomie’ ist dem eigentlichen Wortsinne nach ein ‘Widerspruch des Gesetzes mit sich selbst’. Das Wort ist aus ἀντί (= gegenüber, entgegen) und νόμος (= das Festgesetzte, die Satzung, das Gesetz) zusammengesetzt. In der Logik nennt man eine Aussage A eine Antinomie (ἀντινομία), wenn sie mit ihrer eigenen Negation äquivalent ist, d.h. wenn $A \dashv\models \neg A$ gilt. Eine Antinomie ist also eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn sie falsch ist.

Eine ‘Paradoxie’ ist dagegen eine Aussage, die auf den ersten Blick hin zwar falsch zu sein scheint, aber doch wahr ist. Dieses Wort ist aus παρά (= gegen, wider, darüber) und δόξα (= die Ansicht, Meinung, Vorstellung) zusammengesetzt. τὸ παράδοξον ist das Unerwartete, das Unglaubliche, das, was der Vorstellung widerspricht.

Die Begriffe ‘Antinomie’ und ‘Paradoxie’ werden oft verwechselt, obwohl sie doch sehr verschieden sind.

Als Beispiel für eine Antinomie (oder eine Paradoxie) geben viele Lexika, viele Lehrbücher der Philosophie und manche Lehrbücher der Logik den Ausspruch des Kreters EPIMENIDES, der einmal gesagt hatte, daß alle Kreter Lügner wären. Wie wird argumentiert?

(1) Angenommen, der Ausspruch *»Kreter lügen«* ist wahr. Die Kreter sind dann allesamt Lügner. Da Epimenides ein Kreter ist, ist also auch das, was Epimenides sagt, gelogen. Sein Ausspruch, ist also falsch.

(2) Angenommen, der Ausspruch *»Kreter lügen«* sei falsch. Dann ist das Gegenteil davon wahr. Es gilt also *»Kreter lügen nicht«*. Da Epimenides ein Kreter ist, ist also auch das, was Epimenides sagt, nicht gelogen. Sein Ausspruch, ist somit wahr.

So steht es bei Galilei im „Dialogo“, Seite 44

Ergebnis: Die Aussage *»Kreter lügen«* des Kreters Epimenides ist genau dann wahr, wenn sie falsch ist.

So findet man es tausendfach, in Mathematischen Enzyklopädien, in Fachbüchern, in wissenschaftlichen Abhandlungen (zur Logik, zur Philosophie, zur Altphilologie etc.) und millionenfach in populär-wissenschaftlichen Schriften (so z.B. in N.I. Kondakows 'Wörterbuch der Logik', Leipzig 1983, Stichwort „Epimenides", in R. Eislers 'Wörterbuch der Philosophischen Begriffe', Berlin 1929, Stichwort „Lügner", etc.).

- Aber, ist die Argumentation überhaupt korrekt? -

Sie ist fehlerhaft! Es ist höchst erstaunlich, daß sie seit Jahrhunderten immer wieder vorgeführt wird, ohne daß die Autoren merken, daß in der Argumentation Fehler gemacht werden. Wie ist das möglich?

Was ist die Negation des Satzes

»Kreter lügen« [Cretenses semper mendaces] ?

Man möchte *»Kreter lügen nicht«* sagen, aber das stimmt nicht, denn es wird nur das Prädikat *»x lügt«* verneint und nicht die gesamte Aussage. Schon Leibniz[1]) hatte auf solche Fehler hingewiesen:

„aliud est negari propositionem, aliud negari prädicatum".

Wir deuten die Aussage *»Kreter lügen«* als universelle Aussage:

»Alle Kreter lügen«

und erkennen, daß ihre Negation

»Es gibt wenigstens einen Kreter, der nicht dauernd lügt«

lautet[2]). Wenn man jetzt noch einmal die Argumentation in der „Epimenides-Geschichte" durchgeht, dann sieht man, daß in (1) richtig geschlossen wurde, daß aber in (2) ein Fehler gemacht wurde. Wenn die Aussage *»Alle Kreter lügen«* falsch ist, dann gibt es irgendeinen Kreter, der nicht lügt, aber diese Person muß nicht Epimenides sein, und man kann nicht weiter schließen. Es liegt hier überhaupt keine Antinomie vor!

Der Fehler in der Debatte über das Epimenides-Zitat ist der, daß das *kontradiktorische Urteil* mit dem *konträren Urteil* verwechselt wurde.

---

[1]) cf. L. Couturat: *Opuscules et fragments inédits de Leibniz,* Paris 1903 (Nachdruck G.Olms in Hildesheim 1961), p.273.

[2]) Den Ausspruch „Kreter lügen" kann man aber auch wie folgt lesen:„Kreter sind im allgemeinen (in der Mehrzahl, in der Regel) Lügner" (vergl. Muschenbroek „Logica, sive Ars Cogitandi", Verona 1722, pp.126-132). Die negierte Aussage kann hier allerdings nicht mehr vereinfacht werden. Aber auch bei dieser Lesart kommt keine Antinomie zustande.

Solch eine Verwechlung kann allerdings nur demjenigen passieren, der nie das sogenannte 'Logische Quadrat' (siehe § 10) gesehen hat.

Die historischen Wurzeln vom Ausspruch, daß alle Kreter Lügner seien

Da die vermeintliche Antinomie von den lügenden Kretern in aller Munde ist, fragen wir uns, woher denn dieses Gerücht stammt. Manche wissen es wohl schon, aber manche sind vielleicht doch überrascht, wenn sie erfahren, daß es in der Bibel steht, und zwar im Neuen Testament im Pastoralbrief des Paulus an Titus. Dort heißt es (I,12):

> Κρῆτες ἀεὶ ψεῦσται, κακὰ θηρία, γατέρες ἀργαί.
> *Cretenses semper mendaces, malae bestiae, ventres pigri.*
> *Kreter sind Lügner, böse Tiere und faule Bäuche.*

Diese Zeile ist ein Hexameter, also offenbar ein Zitat aus einem Gedicht. Bevor Paulus diese Zeile zitiert sagt er noch, daß sie von einem Kreter selbst stammt, nämlich von ihrem eigenen Propheten:

> εἶπέν τις ἐξ αὐτῶν ἴδιος αὐτῶν προφήτης.

In einem frühen Kommentar schrieb Hieron (Comm. in ep. ad Tit. VII, 706 Vallarsi):

> *„dicitur autem iste versiculus in Epimenidies Cretensis poetae oraculis reperiri".*

Nach diesem Zeugnis stammt die Hexameter-Zeile also aus einem Gedicht des Epimenides (Ἐπιμενίδης). Wir kennen diesen Epimenides als einen der sieben Weisen des Altertums. Wir kennen ihn auch als Sühne-Priester, der ähnlich wie vor ihm Hesiod (der etwa hundert Jahre nach Homer gelebt hat) eine Theogonie (Θεογονία, d.h. eine Göttergeschichte, eine Geschichte über die Herkunft und das Geschlecht der Götter) gedichtet hatte. Epimenides war um 596 v.u.Z. in Athen geboren und soll 229 Jahre alt geworden sein. Als Hirtenknabe schlief er 57 Jahre lang in einer Höhle. All das berichten Platon, Aristoteles und Diogenes Laertius. Die Theogonie von Hesiod ist uns fast vollständig überliefert. In den Zeilen 26-29 heißt es dort:

> *Hirten vom Lande, ihr Lumpengesindel und lediglich Bäuche,*
> *Seht, wir reden viel Trug, auch wenn es wie Wirklichkeit klingt,*
> *Seht aber, wenn wir gewillt, verkünden wir lautere Wahrheit.*
> *Also sprachen beredsam die Töchter des großen Kronion.*

Die Ähnlichkeit dieser Hesiodschen Zeilen mit der Zeile des Epimenides ist nicht zu übersehen. Leider ist die Theogonie des Epimenides nicht erhalten. Wir müssen dem Apostel Paulus dankbar sein, daß er die eine Zeile wenigstens überliefert hat (für weitere Zeilen, die uns aus anderen Quellen überliefert sind, siehe Diels-Kranz: *Fragmente der Vorsokratiker*). Übrigens sind sich die Theologen beider christlicher Kirchen seit längerer Zeit einig, daß der Paulus-Brief nicht echt ist. Das haben stilistische und sprachliche Untersuchungen gezeigt[1]). Das soll uns hier nicht stören, denn das Epimenides-Zitat ist jedenfalls echt.

Der schlechte Ruf der Kreter

Gibt es Gründe für den schlechten Ruf der Kreter?

(A) Die Kreter waren nach dem Verfall ihrer hohen Kultur ein Volk von Seeräubern und haltlosen Gesellen geworden. Dafür gibt es aus der Antike viele Zeugnisse. In der »Palatinischen Anthologie« kann man einige finden. Diese »Palatinische Anthologie« ist eine äußerst umfangreiche Sammlung von etwa 3700 Gedichten aus der Zeit von etwa 500 v.u.Z. bis ungefährt 900 n.u.Z. und ist uns nur in einem einzigen Exemplar überliefert. Dieses Exemplar (Cod. Pal. Gr. 23) gehörte zur Palatinischen Bibliothek der Heidelberger Universität, bis es Papst Gregor XV während des 30-jährigen Krieges 1623 als Kriegsbeute stehlen ließ[3]). Die ersten vollständigen Editionen der Palatinischen Anthologie erschienen in Straßburg/Elsass (herausgegeben von Ph. Brunck, 1772-1776) und in Leipzig (herausgegeben von Friedrich Jacobs in 13 Bänden, 1794-1814). Hier findet sich beispielsweise (in Buch VII, 654) das folgende Grab-Epigramm von Leonidas von Tarent:

„Räuber, Piraten, Verbrecher, das waren die Kreter ja immer.
Welcher Kreter bewies // einmal Gerechtigkeit schon? ...“
(cf. Jacobs, Band 1, p.176 Nr.LXXXII, und Band 7, p.137)

(B) Daß die Kreter als Lügner beschimpft wurden, hat aber einen ganz anderen Grund. Man nahm ihnen übel, daß sie behaupteten, Zeus wäre auf Kreta gestorben. Er war ja auf Kreta im Ida-Gebirge geboren, aber als mächtigster aller Götter unsterblich. In seinem 'Hymnus an Zeus' dichtete bereits Kallimachos [diese Zeilen hatte Athenagoras (Suppl.30) überliefert]:

Κρῆτες ἀεὶ ψεῦσται. καὶ γὰρ τάφον, ὦ ἄνα σεῖο
Κρῆτες ἐτεκτήναντο. σὺ δ'οὐ θάνες. ἐσσὶ γαρ αἰεί.

---

[1]) vergl. M.Dibelius: Pastoral-Briefe. Handbuch zum NT, Tübingen 1966.

[3]) Als Napoleon nach seinem Kriegszug durch Italien 1797 den Frieden von Toletino schloß, verlangte er vom Vatikan die Auslieferung von 500 kostbaren Handschriften, darunter die Anthologia Palatina. So kam diese Anthologie vorübergehend in die Pariser Bibliothèque Nationale. Nach den Niederlagen Napoleons in den Befreiungskriegen kam der ganze Bücherschatz 1816 zurück in den Vatikan, und nur der 1. Band der Palatinischen Anthologie wurde der Heidelberger Universitätsbibliothek zurückgegeben; der 2. Band blieb unrechtmäßig in Paris. Er trägt die Signatur Ms.Gr.suppl.384.

Allzeit lügen die Kreter: ein Grabmal bauten, oh König,
Selbst dir die Kreter, und doch nicht starbst du ja; ewiglich bist du.

Daß die Kreter vom Grab des Zeus auf Kreta fabelten, empörte auch viele andere Schriftsteller, etwa Athenaios in senem 'Gastmal' (p. 251) oder auch Lukian (im 'Lügenfreund' Philopseudes,- Band 1, pp.141-143):

> *„Doch den Dichtern möchten ihre Lügen immer hingehen, aber, ... wenn z.B. die Kreter sich nicht schämen, den Reisenden das Grab des Zeus zu zeigen, ...“*

Ähnlich äußert sich Lukian in seiner Schrift 'Timon' (Band 1, p.76):

> *„... und wenn man anders nicht glauben soll, was die Kretenser von DIR fabeln, sie, die den Fremden sogar auf ihrer Insel DEIN Grab zeigen“.*

Auch in der Griechischen Anthologie (VII, Nr. 275) wird darüber gesprochen. In dem Grabepigramm von Gaetulicus I heißt es:

„Schiffbruch erlitt der Kydoner Astydamas, Sprößling des Damis,
Kreta, des Seefahrers Schreck // - weiter die Péleponnés -
Schließlich die Umfahrt Maleas mit lauernden Felsklippen brachten
Untergang ihm, und schon längst // fraßen ihn Tiere der See.
Trügerisch baute man mich, als sein Grab, auf dem Festland; kein Wunder -
Kreter lügen, ein Grab // weihten sogar sie für Zeus!“ etc.
(Jacobs, Band II, p.153, Nr.VII).

Daß die Kreter lügen, wurde bald zu einem Sprichwort und auch die römischen Dichter bezogen sich gerne darauf, etwa Lucan (*'Pharsalia'*, am Ende des 8. Gesanges) und Ovid. Aber Ovid spielt mit dem Motiv und verändert es dabei. In seinen Liebeselegien (*Amores* III, Elegie 10, Zeile 19) sagt er:

„Cretenses erunt testes; nec fingunt omnia Cretes“
Die Kreter sind meine Zeugen: nicht alles erlügen die Kreter.

und in seiner 'Liebeskunst' (*Ars amatoria*, I,298) heißt es:

„quamvis sit mendax, Creta negare potest“
Soviel es auch lügt, dies kann Kreta nicht verneinen

Hier bezieht sich Ovid auf die Liebe der Pasiphae zu einem weißen Stier. Pasiphae war die Gemahlin des Königs Minos in Kreta. Sie zeugte zusammen mit dem Stier den Minotaurus. -

Wir haben genug Zeugnisse über den schlechten Ruf der Kreter zusammengetragen und kennen die Quelle der vermeintlichen Antinomie vom Kreter Epimenides, der gesagt haben soll, daß alle Kreter Lügner wären. Wir wissen auch, daß hier gar keine Antinomie vorliegt. Die Geschichte ist aber damit noch lange nicht zu Ende, denn es ist doch verwunderlich, daß bereits Aristoteles, Cicero, Seneca et al. und später im Mittelalter Albert von Sachsen, Paulus

Venetus et al. immer von der Lügner-Antinomie sprachen. Haben all diese berühmten Männer einem logischen Fehler aufgesessen?

- *Nein:* all diese Autoren sprachen von einer ganz anderen Lügner-Antinomie und diese ist tatsächlich eine Antinomie. Leider wird der Unterschied zwischen beiden Versionen des „Lügners" nur selten sorgfältig unterschieden. Wir wollen jetzt über diese andere Lügner-Version sprechen.

Die »Antinomie des Lügners« von Eubulides

Etwa um 400 vor unserer Zeitrechnung lebte der Sophist Eubulides von Milet (er war Schüler des Philosophen Eukleides von Megara, der von ca. 450 - 370 v.u.Z. lebte). Er ist durch einige besonders harte Nüsse, die er seinen Zeitgenossen vorgelegt hatte, berühmt geworden. Überliefert sind bei Diogenes Laertius, bei Aristoteles, Cicero und Lukian et al. die folgenden Probleme:

(1) Der Gehörnte (Κεράτινος λόγος):

> „Was Du nicht verloren hast, das hast Du doch noch immer? - („ja")
> Hörner hast Du nicht verloren? - („nein")
> Also hast Du Hörner!"

(2) Der Kahlköpfige: „Wenn man einem jungen Manne, der volles Haar auf dem Kopfe trägt, ein einzelnes Haar ausreißt, dann behält er doch volles Haar? - Und wenn man ihm noch ein Haar ausreißt? - und noch eines? - etc. - bis man ihm schließlich alle Haare ausgerissen hat??.

Diogenes Laertius (im 2. Buch, §108) erwähnt noch (3) den Betrüger, (4) den Sorites (Haufenschluß), (5) die Elektra, (6) den Verhüllten und (7) den Lügner (Ψευδόμενος).

Diogenes Laertius schmückt seinen kurzen Bericht über Eubulides mit einem Zitat eines Komikers:

> *„Eubulides, der Kampfhahn, der mit dem Gehörnten Staat macht,*
> *Mit Prahlereien, Lug und Trug den Rednern kräftig mitspielt.*
> *Zog zungenfertig ab von hier, Demosthenes vergleichbar."*

Der <u>Pseudomenos</u> (Lügner) von Eubulides (Εὐβουλίδης) ist das folgende Problem:

> *Wenn ich den Satz „ich lüge" behaupte, ist dann diese Behauptung wahr oder falsch?*

Diskussion. 1. Nehmen wir an, daß meine Aussage „ich lüge" wahr sei. Dann würde es also stimmen, daß ich lüge. Meine Aussage wäre dann auch gelogen, d.h. meine Aussage wäre falsch!

2. Wenn meine Aussage „ich lüge" falsch ist, dann stimmt es nicht, daß ich lüge. Das heißt aber, daß ich die Wahrheit rede. Was ich sage ist also wahr. Meine Aussage „ich lüge" ist also wahr.

3. Meine Aussage „ich lüge" ist also genau dann wahr, wenn sie falsch ist. - Es liegt also in der Tat eine Antinomie vor.

Diese Form der Lügner-Antinomie hatte im Altertum ein ungeheuer großes Aufsehen gemacht: alle Welt sprach darüber und man sprach darüber Jahrhunderte lang! Eine Auflösung konnte keiner finden. Diese Antinomie wurde ein beliebtes Thema bei Abendgesellschaften, wie etwa Aulus Gellius in seinen *Noctes Atticae* berichtet hat. Athenaios berichtete in seiner Schrift, die den Titel „Gastmahl" trägt, daß Philitas von Kos sich darüber zu Tode studiert habe und erwähnt sein Grabepigramm (Seite 261):

> *„Fremder, Philitas bin ich. Die lügende Rede verdarb mich,*
> *Rätselprobleme dazu // quälten mich tief in die Nacht."*

Viele haben sich ernsthaft um eine Lösung bemüht, aber niemandem gelang die Lösung. Schließlich reagierte man gereizt. **Seneca** reagierte empört auf all diese unlösbaren logischen Probleme. Er schrieb im 45. Brief an Lucilius:

> *„Quid me detines in eo, quem tu ipse pseudomenon appelles, de quo tantum librorum compositum est? Ecce tota mihi vita mentitur: hanc coarge! hanc ad verum, si acutus est, redige!"*
>
> *Was hälst Du mich mit jenem Schlusse auf, den Du selbst den »Lügner« nennst, über den so viele Bücher geschrieben sind? Siehe: die ganze Welt lügt mir; diese überführe, diese bringe, wenn Du scharfsinnig bist, zur Wahrheit zurück!*

Die Diskussion der logischen Antinomien und Sophismen ging aber immer weiter, in philosophischen Zirkeln ebenso wie in den Abendgesellschaften der reichen und halbwegs gebildeten Römer. Noch hundert Jahre später klagte **Lukian** (in den 'Totengesprächen', Band 2, pp.142-143):

> *Diogenes: ... leg es den Philosophen recht nahe, daß sie doch endlich einmal aufhören sollen, sich die Zeit mit Possen zu verderben, sich über das Weltall zu zanken, einander Hörner aufzupflanzen, Krokodile zu machen und junge Leute auf dergleichen läppische Spitzfindigkeiten Wert legen zu lehren."*

Das Problem mit dem Krokodil ist nur eine Variante der Lügner-Antinomie.

> Antinomie vom Krokodil: Ein kleines Kind spielte am Nil. Ein Krokodil schlich heran, fing es und wollte es soeben herunterschlucken, als die Mutter herbeigelaufen kam und das Krokodil bat, ihr das Kind zurückzugeben. „Das will ich tun", antwortete das Krokodil, „wenn Du mir auf die Frage, die ich Dir vorlegen werde, wahrheitsgemäß antwortest". Die

Mutter ließ sich die Bedingung gefallen. „Sage mir also", sprach das Krokodil, „werde ich Dir Dein Kind zurückgeben oder nicht?" - Die Mutter sagte „Du wirst mir mein Kind nicht wiedergeben." Darauf sagte das Krokodil: „Dann darf ich das Kind je ganz genüßlich auffressen, denn solltest Du mit Deiner Antwort recht haben, dann bekommst Du, wie Du selber sagst, Dein Kind nicht zurück. Wenn Du aber mit Deinem Ausspruch unrecht hast, dann muß ich Dir nach unserer Verabredung Dein Kind nicht zurück geben." Die Mutter hingegen sagte: „Ganz im Gegenteil! Wenn ich mit meiner Antwort recht habe, dann bekomme ich mein Kind aufgrund unserer Verabredung zurück; und wenn ich unrecht habe, dann dann gibt Du ja selber zu, daß ich mein Kind zurückerhalte. Ich bekomme also in jedem Falle mein Kind zurück!" - Wer hat recht?

Aber Lukian beklagt nicht nur das Philosophen-Gezänk über die Krokodile und die Lügner. Er treibt auch sein Spiel damit und zwar auf folgende Weise.

In einem Werk mit dem Titel *„Der wahren Geschichte, erstes Buch"* (Lukian, Werke, Band 3, p.316) erzählt Lukian eine von vorn bis hinten erlogene Reisegeschichte zum Mond und zur Sonne (ähnlich wie nach ihm auch der fanzösische Schriftsteller Cyrano de Bergerac, 1619-1655). Lukian möchte dabei die Reisegeschichten von Homer, Herodot und anderen aufs Korn nehmen. Lukian sagt gleich zu Beginn, daß auch er lauter Lügengeschichten erzählen will, aber mit einem Unterschied, und diesen Unterschied betont er:

„denn ich sage doch wenigstens eine Wahrheit, indem ich sage, daß ich lüge".

Auf subtilere Weise kann man die Lügner-Antinomie wohl nicht parodieren.

Aber auch nach Lukian haben manche Dichter die Lügner-Antinomie parodiert, beispielsweise **Miguel de Cervantes.** Im 2. Band seines berühmten Romans *„Don Quichote"* (spanisch: capitulo 51, deutsch, in der Übersetzung von Ludwig Tieck: 9.Buch, Kapitel 18) wird die Geschichte von einer Lügenbrücke erzählt. Dazu muß man wissen, daß Sancho Pansa endlich Statthalter auf der Insel Barataria geworden ist und damit die Aufgabe bekommen hat, in Streitfällen Urteile zu sprechen. Eines morgens wird ihm die folgende Geschichte vorgelegt.

„Señor, un caudaloso rio divida dos términos de un mismo señorío ....."

„Gnädiger Herr, ein ansehnlicher Strom fließt durch die Mitte einer und derselben Herrschaft - ich bitte um einige Aufmerksamkeit, denn die Sache ist sehr wichtig und ziemlich schwierig -, und über diesen Fluß ist eine Brücke geschlagen, an deren Ende ein Galgen steht und eine Art von Rathaus, in dem sich gewöhnlich vier Richter befinden, welche über das Gesetz wachen, das der Besitzer des Flusses, der Brücke und der Herrschaft gegeben hat und welches so lautet: Wenn jeman über diese Brücke von einem Ende zum anderen geht, so soll er vorher schwören,

wohin er geht und was sein Geschäft; ist sein Schwur wahr, so lasse man ihn ziehen, sagt er eine Lüge, so soll er an den Galgen gehenkt werden, der dort steht, ohne alle Barmherzigkeit. Dieses Gesetz und sein strenger Inhalt waren bekannt, viele gingen über die Brücke, man sah, daß das, was sie beschworen hatten, die Wahrheit sei, und die Richter ließen sie ungehindert ziehen.

- Es geschah darauf, daß man einem Manne den Eid abnahm, welcher schwur und sagte, daß, so gewiß er schwöre, er hingehe, um an dem dort befindlichen Galgen zu sterben, und zu keiner andern Absicht. Die Richter kamen über diesen Schwur in Verlegenheit und sagten: »lassen wir diesen Mann frei ziehen, so ist sein Schwur ein Meineid, und er muß nach den Gesetzen sterben; hängen wir ihn aber, so hat er geschworen, daß daß er hingehe, um an dem Galgen zu sterben, und da er die Wahrheit geschworen hat, so muß er nach ebendiesen Gesetzen frei sein« Jetzt fragen wir Euch nun, gnädiger Herr Statthalter, was sollen die Richter mit diesem Manne anfangen, denn sie sind noch immer zweifelhaft und in Verlegenheit? Sie haben von Eurem scharfen und hohen Verstande Nachricht erhalten und schicken mich ab, um Euer Gnaden demütig zu bitten, ihnen Eure Meinung in diesem verwickelten und zweifelhaften Falle mitzuteilen."

Worauf Sancho antwortete: „Wahrlich, diese Herren Richter, die Euch zu mir geschickt haben, hätten es wohl können bleibenlassen, denn ich bin nur ein Mann, der mehr Einfalt als Scharfsinn besitzt; dessenungeachtet aber *sagt mir den ganzen Handel noch einmal, damit ich begreifen kann, vielleicht fügt es sich, daß ich in die Mitte des Riemchens steche."*

Der Gefragte erzählte hierauf den Fall noch einmal so, wie er ihn erst schon vorgetragen hatte. ......

„So sage ich denn", versetzte Sancho, „daß von diesem Menschen die Seite, welche wahr geschworen hat, ungehindert ziehen soll, die aber, welche gelogen hat, soll man aufhängen, und auf die Art kann das Gesetz der Brücke buchstäblich erfüllt werden."

„Aber, Herr Statthalter", versetzte der Fragende, „so wird es nötig sein, daß dieser Mensch in zwei Hälften, in eine lügende und in eine wahrhaftige, geteilt werde, und wenn man ihn teilt, so muß er notwendig sterben; und so geschieht gerade nichts von dem, was das Gesetz verlangt, welches doch durchaus in Erfüllung gehen soll."

„Nun so hört denn, mein guter Freund", sagte Sancho, „dieser Reisende, von dem ihr sprecht, entweder bin ich ein Dummkopf, oder er hat ebensoviel Recht, zu als zu leben und über die Brücke zu gehen, denn wenn die Wahrheit ihn freispricht, so verdammt ihn ebensogut die Lüge; da die Sache nun so steht, so ist meine Meinung, diesen Herren zu sagen, die Euch hergeschickt haben, daß, da die Gründe, ihn zu verdammen oder freizusprechen, sich einander die Waage halten, sie ihn freilassen sollen, denn es ist immer löblicher, Gutes zu tun als Böses".

Die Auflösung der Lügner-Antinomie

Auch Sancho Pansa wird mit der Lügner-Antinomie nicht so recht fertig, aber er findet eine menschliche Art, sich dieser Antinomie zu entledigen:

> *„Mir kam eine Vorschrift ins Gedächtnis, die mir, nebst vielen anderen, mein Herr Don Quixote den Abend zuvor gab, ehe ich als Statthalter in diese Insel kam, daß ich mich nämlich, wenn die Gerechtigkeit zweifelhaft sei, zum Mitleiden neigen sollte."*

Wie sollen wir mit der Antinomie umgehen? Wie sind die Logiker in früheren Zeiten mit dieser Antinomie umgegangen?

Aristoteles widmete eine umfangreiche Schrift den logischen Trugschlüssen: *Über sophistische Elenchen* (Topik, Buch IX). In Kapitel 25 behandelt er auch eine Lügner-Antinomie (ob er den Pseudomenos von Eubulides bespricht, ist jedoch unklar). Er bezweifelt, daß es Menschen geben soll, die schlechthin Lügner wären. Eine Lösung der Antinomie ist damit nicht gefunden.

Eine klare und überzeugende Lösung hat Marcus Tullius **Cicero** (106-43 v.u.Z.) gegeben. Cicero war gewiß kein großer Logiker und als Stoiker hielt er überhaupt nichts von den sophistischen Spitzfindigkeiten (vergl. Cicero *'Von* *der Weissagung'* II,4), aber er hat als erster erkannt, daß der Lügner-Antinomie eine Hypothese zugrundeliegt, deren Annahme keinswegs zwingend ist. In seiner Schrift *'Academica'*, Buch II (genannt *'Lucullus'*) weist er darauf hin, daß die Antinomie nur deshalb zustande kommt, weil man davon ausgeht, daß

„jede Aussage entweder wahr oder falsch"

ist. In der Tat wird in der Diskussion der Lügner-Antinomie ganz selbstverständlich davon ausgegangen, daß auch ein Satz wie „ich lüge" (oder: „dieser Satz ist falsch") einen Wahrheitswert hätte und es wird nur diskutiert, welchen Wahrheitswert der Satz hat. Und wenn der Satz überhaupt keinen Wahrheitswert hat? - dann verschwindet die Antinomie! Diese Lösung haben auch Buridan und Leibniz (In: Specimen Questionum philosophicorum ex jure Collectarum, 1664, A.S.69-95) gegeben.

- Aber man kann eine neue Antinomie formulieren:

Der verstärkte Lügner: *„Dieser Satz ist entweder falsch oder hat keinen Wahrheitswert"*.

Man überzeugt sich schnell, daß für diesen Satz jeder der drei Fälle (i) „er ist wahr", (ii) „er ist falsch", (iii) „er hat keinen Wahrheitswert" zu einem Widerspruch führt.

Eine befriedigende Lösung gelang erst Alfred Tarski und Rudolf Carnap (in *„Logische Syntax der Sprache"*, Wien 1934). Dazu wird die Umgangssprache typentheoretisch geschichtet. Hier gehören die Prädikate „ist wahr" und „ist falsch" nie zur selben Schicht, in der die Sätze liegen, deren Wahrheitswert man beurteilen will. Die Sprache der Schicht 0 hat die Prädikate „ist wahr" und „ist falsch" überhaupt nicht. Die Sprache der Schicht 1 hat die Prädikate „ist wahr_0" und „ist falsch_0", die auf Sätze der Schicht 0 anwendbar sind, nicht aber auf Sätze einer höheren Schicht. Die Sprache der Schicht 2 hat Prädikate „ist wahr_1" und „ist falsch_1", die auf Aussagen aus den Schichten 0 und 1 anwendbar sind, nicht aber auf Aussagen höherer Schichten, und so fort. Man erkennt, daß hier weder der „Lügner" noch der „verstärkte Lügner" auftreten [In den formalen Sprachen $\mathcal{L}$ aus Kapitel I und II treten diese Antinomien auch nicht auf, weil die Wahrheitswert-Funktion *val* nicht zu $\mathcal{L}$ gehört].

Wer ist an der Verwechslung der beiden Lügner-Geschichten schuld?

Es war wohl Angelo Politiano (1454-1494), der diesen Fehler aufgebracht hat.

Poliziano war zu seiner Zeit ein hochberühmter Dichter, der mit bewunderns-würdiger Leichtigkeit und Anmut in lateinischer und griechischer Sprache Oden, Epigramme und Elegien schrieb. Er übersetzte Theokrit, Kallimachos, Epiktet und Herodian aus dem Griechischen ins Lateinische. In italienischer Sprache schrieb er Canzonen, Canzonetten, Stanzen und ein kleines, in 5 Akte geteiltes Drama 'Orfeo'.

Lorenzo de Medici (1449-1492) nahm ihn in sein Haus auf, um ihn immer um sich zu haben und sich seines lehrreichen Umganges erfreuen zu können. Lorenzo de Medici ernannte ihn zum Erzieher seiner Kinder.

Leider verstand Poliziano von Logik so gut wie gar nichts. Für ihn war die formale Logik nichts anderes als „Schmutz" (sordes). Es ist daher auch nicht verwunderlich, daß er den Unsinn mit der Epimenides-Antinomie aufgebracht hat. In einem Brief an den berühmten Venezianischen Buchdrucker Aldus Manutius Romanus (1446-1516) schrieb er, daß die aus der Bibel bekannte Aussage des Kreters Epimenides eine Illustration der „Lügner-Antinomie" wäre.

> *„Redditae mihi .... etc. Etenim hoc genus ut mendaces notavit Epimenides, qui tamen & ipse Cretensis, ut mentiri non minus potuerit. Ideoque non mendaces illi. Sic ergo verus Epimenides, atque ita rursus illi mendaces, vides hunc dialecticorum ψευδόμενον. Mihi tamen extra iocum, veros esse omnino Cretenses libet. ..."*

> .... Und doch hat Epimenides dieses Geschlecht [nämlich das Geschlecht der Kreter] als lügnerisch bezeichnet, er, der doch selber ein Kreter war, so daß er möglicherweise selbst nicht weniger log. Und deshalb sind jene keine Lügner. So ist also Epimenides ein wahrheitsliebender Mensch und umgekehrt jene lügenhaft. Du siehst hier den sogenannten Pseudómenos der Dialektiker. ... etc.

Da die Werke und Briefe Polizianos eine lange Zeit hindurch immer wieder gedruckt und gelesen wurden (etwa: Omnia Opera, Venedig (Aldus) 1498; Basel 1553 etc.), war auch der Irrtum Polizanos sehr bald weit verbreitet. Allerdings war in der Renaissance kaum noch jemand in der Logik hinreichend geschult, um den Fehler Polizianos zu bemerken.

Der französische Mathematiker und Philosoph Pierre Gassendi griff in seiner Schrift *Syntagmatis Philosophici* (posthum 1658 erschienen) die Epimenides-Geschichte auf und schrieb dort, nachdem er zuerst über den „Lügner" von Eubulides gesprochen hat:

> *„Unde hunc spectat illud celebre, Epimenides ait omneis Cretenseis esse mendaceis; ipse verò Cretensis est; igitur ipse non credendum, igitur Cretenses veraces, illisque credendum: ipse autem Cretensis est; igitut et illi credendum."*

P. Gassendi: Syntagmatis Philosophici, Pars Prima, quae est Logica, liber unus, caput III. Band 1 der Opera Omnia, Lyon 1658. Nachdruck bei F.Frommann-Holzboog, Stuttgart 1964, Seite 40.

Der französische Philosoph Pierre Bayle (1647-1706) hielt Gassendi für den größten Gelehrten unter den Philosophen und den größten Philosophen unter den Gelehrten. Es ist daher auch nicht verwunderlich, daß Bayle die Epimenides-Geschichte in sein berühmtes *Dictionnaire historique et critique* (1695-1697) aufnahm und so zu seiner weiteren Verbreitung beitrug. In diesem Dictionnaire schreibt Bayle unter dem Stichwort 'Euclide' (Band 1, pp.414-415, Fußnote D), nachdem er zuerst über den „Lügner“ von Eubulides gesprochen hat:

„On bâtissoit le même Sophisme sur ce qu'Epimenide, qui étoit de l'Ile de Crete, avoit dit, que tous les Cretois étoient menteurs. Il a donc menti en disant cela, concluoit-on, donc les Cretois ne sont pas menteurs, donc ils sont dignes de créance, donc il faut ajouter foi à l'affirmation d'Epimenide, donc tous les Cretois sont menteurs.“

Bayles Beschreibung der Epimenides-Geschichte ist kaum mehr als eine Übersetzung der lateinischen Version Gassendis ins Französische (siehe auch das Stichwort 'Philetas', Fußnote E, in Bayles Dictionnaire).

Bayles *Dictionnaire historique et critique* hat die geistige Entwicklung des 18. Jahrhunderts stark beeinflußt. Es wurde auch noch im 19. Jahrhundert von Altphilologen, Philosophen und Theologen intensiv benutzt. Es ist nicht verwunderlich, daß auf diesem Wege, der Irrtum Polizianos in die ganze Welt getragen wurde.

Als typisches Beispiel möchte ich die Fußnote anführen, die der Übersetzer August Friedrich (von) Pauly (1796-1845) zu den Briefen Senecas an Lucilius geschrieben hat (Senecas Werke, Metzlersche Buchhandlung Stuttgart 1852, p.1577):

„Epimenides sagt, alle Creter seien Lügner, und ist selbst ein Creter, also ist er selbst auch ein Lügner, und man muß ihm nicht glauben. Deßwegen sind die Creter wahrhaft, und man muß ihnen glauben; Epimenides aber ist ein Creter; also muß man ihm glauben. Also muß man dem Epimenides glauben und man muß ihm nicht glauben.“

Diese Fußnote (zum 45.Brief, - siehe oben) von August Pauly ist kaum mehr als eine Übersetzung der französischen Version Bayles ins Deutsche. Seneca bespricht dort die Lügner-Antinomie (natürlich von Eubulides), aber der Übersetzer denkt bei dem Wort „Pseudomenos“ nur noch an Epimenides und die lügenden Kreter. August Pauly war ein berühmter Altphilologe, dessen 'Real-Encyclopädie der classischen Altertumswissenschaft' (1839, erneuert 1896 von G. Wissowa und 1996 von H. Cancik und H. Schneider) heute noch zu den Standardwerken gehören.

Wenn man die Wirkungsgeschichte weiter verfolgen will, so wird man bis in die Gegenwart hinein Beispiele in Hülle und Fülle finden, in denen die Epimenides-Geschichte als Antinomie verkauft wird.

Psychologen haben herausgefunden, daß die Beschäftigung mit Antinomien krank machen kann. Wir müssen also endlich mit der Diskussion der Antinomie vom Lügner Schluß machen. Wir kommen zum Abschluß und berichten über verblüffende Anwendung in der Zahlentheorie.

Der Unvollständigkeitssatz von Gödel

Kurt Gödel hatte 1931 gezeigt, daß man mit einer Variante der Antinomie des Lügners die Unvollständigkeit der DEDEKIND-PEANO-Arithmetik **DPA** zeigen kann (siehe §18, Seite 181). Ausgehend von einer umfassenden Formalisierung der DEDEKIND-PEANO-Arithmetik der ersten Stufe werden alle Zeichen zunächst mit Zahlen identifiziert (man nennt diese Identifikation „Gödelisierung") und sodann alle Operationen des mathematischen Beweisens als (rekursive) zahlentheoretische Funktionen gedeutet. Auf diese Weise läßt sich die Relation „B ist ein Beweis innerhalb der DEDEKIND-PEANO-Arithmetik von der Aussage Φ" als zwei-stellige Relation auf den natürlichen Zahlen deuten. Damit kann eine zahlentheoretische Formel $\Psi(x)$ konstruiert werden, die den Sachverhalt

> „die Aussage mit der Gödelzahl x hat in der DEDEKIND-PEANO-Arithmetik keinen Beweis"

wiedergibt. Wenn m die Gödel-Zahl dieser Formel $\Psi(x)$ ist, dann ist $\Psi(m)$ eine wahre Aussage, die in der DEDEKIND-PEANO-Arithmetik weder beweisbar noch widerlegbar ist. $\Psi(m)$ ist gewissermaßen eine »selbstbezügliche Aussage«, die ihre eigene Unbeweisbarkeit aussagt. $\Psi(m)$ ist offenbar eine Variante des Pseudomenos.

Die DEDEKIND-PEANO-Arithmetik **DPA** ist somit unvollständig. Es gibt wahre zahlentheoretische Aussagen, die im System **DPA** nicht beweisbar sind. Es ist noch sehr viel erstaunlicher, daß ein analoger Sachverhalt für jede widerspruchsfreie, rekursive Liste von Axiomen gilt, die **DPA** erweitert! Die Gesamtheit aller wahren, zahlentheoretischen Aussagen ist also grundsätzlich nicht algorithmisch erfaßbar.

Diesen Satz von Gödel werden wir im nächsten Semester im 2. Teil der Vorlesung über Mathematische Logik beweisen.

Übungsaufgaben zu §19

(1) In der Novelle 'Carmen' (von Prosper Mérimée) spricht José über Carmen die folgenden Worte: „Sie log,... sie hat immer gelogen. Ich weiß nicht, ob dieses Mädchen in ihrem ganzen Leben je ein wahres Wort gesprochen hat,..."

> *„Elle mentait, monsieur, elle a toujours menti. Je ne sais pas si dans sa vie cette fille-là a jamais dit un mot de vérité; mais quand elle parlait, je la croyais."*

Hätte Carmen so etwas über sich selbst aussagen können, oder hätte sie sich dann in Widersprüche verwickelt?

(2) Im 3. Brief an die Römer heißt es in Zeile 4: „alle Menschen sind Lügner" (Est autem deus verrax, omnis autem homo mendax" : ὁ θεὸς ἀληθής, πᾶς δὲ ἄνθρωπος φεύστης). Ist dieser Ausspruch von Paulus wirklich wahr?

(3) In Goethes 'Faust' behauptet Mephisto von sich selber, „er sei der Geist, der stets verneine". Ist das möglich?

(4) Im Jahre 1896 publizierte der Verlag Seitz und Schauer in München ein Buch mit dem Titel *'Ungedrucktes aus dem Goethe-Kreise'*, das von Gustav Ad. Müller herausgegeben wurde (gr.8°, 136 S.). Können Sie sagen, was in dem Buche sicherlich nicht zu finden ist, ohne in das Buch hineinzuschauen? Überprüfen Sie ihre Lösung mit einem Blick in das Buch!

§ 20.

ZUR INTERPRETATION DER ARISTOTETLISCHEN SYLLOGISTIK

Ulrich Felgner

Es ist üblich geworden, die Aristotelische Syllogistik als einen Teil der einstelligen Prädikatenlogik zu interpretieren. Die dyadischen Funktoren a, i, e, o werden dann wie folgt erklärt:

$$(\#)\quad \begin{cases} XaY & \text{steht für } \forall x\,(X(x) \Rightarrow Y(x)), \\ XiY & \text{steht für } \exists x\,(X(x) \wedge Y(x)), \\ XeY & \text{steht für } \forall x\,(X(x) \Rightarrow \neg Y(x)), \\ XoY & \text{steht für } \exists x\,(X(x) \wedge \neg Y(x)). \end{cases}$$

Die Vokale a, i, e, o , die den Wörtern *'affirmo'* und *'nego'* entnommen sind, bezeichnen dabei der Reihe nach die *universelle Affirmation* (XaY : alle X sind Y), die *particulare Affirmation* (XiY : einige X sind Y), die *universelle Negation* (XeY : kein X ist Y) und die *particulare Negation* (XoY : einige X sind nicht Y).

So natürlich diese Übersetzung (#) der Funktoren a, i, e, o in die Prädikatenlogik auch erscheinen mag, so ist doch festzustellen, daß sie in einigen wichtigen Punkten die Aristotelische Theorie der syllogistischen Schlüsse nur sehr unvollkommen wiederzugeben imstande ist. Zwei besonders relevante Punkte seien hier erwähnt:

(1) Aristoteles zeigt in den *Analytica priora* [1] , daß es genau 24 gültige Syllogismen gibt. Legt man die prädikatenlogische Deutung (#) zugrunde, so bleiben nur noch 15 davon gültig; ungültig sind dann die Modi *Barbari* und *Celaront* der I.Figur, *Cesaro* und *Camestrop* aus der II., *Darapti* und *Felapton* aus der III., *Fesapo*, *Camenop* und *Bamalip* aus der IV.Figur.

(2) In der Aussage XaY ist das Subjekt die Klasse derjenigen Individuen, die die Eigenschaft X haben. Demgegenüber ist das Subjekt der Aussage $\forall z\,(X(z) \Rightarrow Y(z))$ die Klasse *aller* Individuen, also auch solcher, die nicht notwendig die Eigenschaft X besitzen.

Der unter (1) genannte Einwand geht auf G.W.Leibniz zurück und wird seither in nahezu allen Darstellungen der mathematischen Logik erhoben. Das auftretende Problem ist das der *leeren Klasse* (vergl. Bocheński [4] p.38, [3] p.81, p.257ff, p.424ff, Hilbert-Ackermann [8] p.63). Der unter (2) genannte Einwand wurde erstmals von G.Patzig [15],p.37ff, erhoben.

Andere Deutungen der Funktoren a, i, e, o wurden von Gericke [6], v.Kempski [9], Lorenzen [12] und Łukasiewicz [14] gegeben. In der axiomatischen Interpretation von Łukasiewicz treten a und i als primitive Relationen auf; die Funktoren e und o werden dann durch $XeY := \neg XiY$, $XoY := \neg XaY$ definiert. Von Gericke, v.Kempski und Lorenzen wurden relationentheoretische Deutungen gegeben (vergl. dazu auch Bocheński [4],p.38, und Lorenzen [11], [13]). Bei diesen Deutungen des syllogistischen Formalismus lassen sich alle 24 Aristotelischen Syllogismen beweisen. Von einem rein formalen Standpunkt aus gesehen ist die Aristotelische Syllogistik daher zwar eine konsistente Theorie, aber man kann schwerlich behaupten, daß Aristoteles eine dieser Deutungen im Sinne gehabt hatte. In der Tat entsprechen diese Interpretationen nicht unserem intuitiven Verständnis von XaY, XiY, XeY und XoY. Keine der genannten Interpretationen kann daher als vollkommen befriedigend gelten.

Im Folgenden soll eine Deutung der Syllogistik in der mehrsortigen Prädikatenlogik erster Stufe gegeben werden. Diese Deutung, die sich beim Lesen der *Analytica priora* [1] eigentlich unmittelbar aufdrängt, spiegelt, nach unserer Auffassung, die Intentionen des Aristoteles genau wieder. Es ist überraschend, daß diese Deutung bisher noch nirgendwo gegeben worden ist.

Mehrsortige Sprachen. Bei metamathematischen Untersuchungen ist es häufig bequemer formale Sprachen, die nur eine Sorte von Individuen-Variablen haben, zu betrachten, als solche mit mehreren Sorten von Individuen-Variablen. Jede mehrsortige Sprache kann auch bekanntlich durch Einführung neuer primitiver einstelliger Prädikate (für jede Sorte) in eine einsortige Sprache übersetzt werden. In der mathematischen Logik beschränkt man sich daher fast immer auf einsortige Sprachen. Beim Aufbau konkreter mathematischer Theorien sind mehrsortige Sprachen jedoch häufig geeigneter. So ist es beispielsweise beim Aufbau der Geometrie üblich eine dreisortige Sprache zugrunde zu legen (eine Sorte von Variablen für Punkte, eine für Geraden und eine dritte Sorte für Ebenen - vergl. D.Hilbert [7] p.2). In der Theorie der Vektorräume sind zweisortige Sprachen bequem (eine Variablen-Sorte wird für Vektoren, eine andere für Skalare benutzt). Wir erinnern schließlich noch an die axiomatische Mengenlehre in der es beim weiteren Ausbau der Theorie Gang und Gäbe ist eine Variablen-Sorte für Ordinalzahlen $\alpha,\beta,\gamma,..$ eine Sorte für Mengen $x,y,z,..$ und eine Sorte für Klassen $X,Y,Z,..$ zu verwenden. Wir bemerken noch, daß in den ersten beiden Beispielen die Interpretationen der verschiedenen Sorten disjunkte Bereiche sind, während sie im Beispiel der Mengenlehre in Bezug auf die Inklusion $\subseteq$ linear geordnet sind.

Eine Interpretation der Syllogistik. Wir geben jetzt die angekündigte Deutung des syllogistischen Formalismus in der mehrsortigen Prädikaten-Logik. Es sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der Prädikaten-Logik der 1.Stufe, welche wenigstens drei verschiedene Sorten von Individuen-Variablen besitzt.
Die Variablen der ersten Sorte seien $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$,
die Variablen der zweiten Sorte seien $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$,
und die der dritten Sorte seien $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$
Als Mitteilungs-Zeichen für Variable der ersten Sorte verwenden wir $X, X', X'', \dots$; als Mitteilungszeichen für Variable der zweiten Sorte verwenden wir $Y, Y', Y'', \dots$ und für solche der dritten Sorte $Z, Z', Z'', \dots$

Die Funktoren a, i, e, o werden wie folgt definiert:

$$(\star)\quad \begin{cases} XaY & \text{steht für} \quad \forall x\, \exists y\, (x = y)\ , \\ XiY & \text{steht für} \quad \exists x\, \exists y\, (x = y)\ , \\ XeY & \text{steht für} \quad \forall x\, \forall y\, (x \neq y)\ , \\ XoY & \text{steht für} \quad \exists x\, \forall y\, (x \neq y)\ . \end{cases}$$

Der Syllogismus *Darapti* nimmt bei dieser Übersetzung beispielsweise die folgende Gestalt an:[1]

$$\left(\forall y\, \exists z\, (y = z) \ \wedge \ \forall y\, \exists x\, (x = y)\right) \implies \exists x\, \exists z\, (x = z)\ .$$

<u>Diskussion.</u> (a) Die Interpretation ($\star$) gibt die Funktoren a, i, e, o in ihrer natürlichen Bedeutung wieder. Dies ergibt sich aus der Verwendung der Quantoren 'für alle' ($\forall$) und 'es gibt' ($\exists$), welche übrigens nur Individuen-Variable binden (vergl. damit die Definitionen (F4), (F5), (3') und (4') in Lorenzen [11]). Ferner ist XoY das kontradiktorische Gegenteil von XaY und XeY ist es von XiY.

(b) Eine naive Formalisierung beispielsweise von der Aussage '*alle Menschen sind sterblich*' würde lauten '*alle M sind S*' (also MaS). Allgemein wird unter einer Ausdrucksform '*alle A sind B*' verstanden, daß A und B Variable sind, die bestimmte Variabilitätsbereiche durchlaufen, also Variable verschiedener Sorten sind. Die Interpretation ($\star$) schließt sich daher dem üblichen Gebrauch der Ausdrücke AaB, AiB, AeB, AoB unmittelbar an. Die Idee der Mehrsortigkeit ist in den Schriften des Aristoteles in diesem Sinne nur implizit enthalten. Daß ein Prinzip nicht vorliegt, zeigt etwa die folgende Stelle ([1] ,p.204, 25a15): εἰ οὖν μηδενὶ τῶν *B* τὸ *A* ὑπάρχει, οὐδὲ τῶν *A* οὐδενὶ ὑπάρξει τὸ *B*. εἰ γάρ τινι, οἷον τῷ Γ, οὐκ ἀληθὲς ἔσται τὸ μηδενὶ τῶν *B* τὸ *A* ὑπάρχειν· τὸ γὰρ Γ τῶν *B* τί ἐστιν. Das Objekt Γ gehört hier zur Sorte der *A*'s, an eine neue dritte Sorte ist nicht gedacht.

(c) Eine Aussage Φ der Sprache $\mathcal{L}$ heißt logisch-allgemeingültig (oder ein Theorem von $\mathcal{L}$), wenn Φ in jeder Realisierung $\mathfrak{M}$ von $\mathcal{L}$ gültig ist (Realisierungen von $\mathcal{L}$ werden oft auch $\mathcal{L}$-Strukturen genannt). Der Begriff der Realisierung $\mathfrak{M}$ von $\mathcal{L}$ ist so gefaßt, daß jede Variablen-Sorte von $\mathcal{L}$ in $\mathfrak{M}$ einen nicht-leeren Variabilitätsbereich hat (vergl. Kreisel-Krivine [10] pp.82-85). Daraus ergibt sich sofort, daß die folgenden Aussagen (aus $\mathcal{L}$) logisch-allgemeingültig sind:

(T 1) $XaY \Longrightarrow XiY$,

(T 2) $XeY \Longrightarrow XoY$.

Offenbar sind auch die folgenden zwei Ausdrücke logisch-allgemeingültig:

(T 3) $XeY \Longrightarrow YeX$,

(T 4) $XiY \Longrightarrow YiX$.

Aufgrund der Thesen (T 3) und (T 4) ist die *conversio simplex* (= einfache Vertauschung von Subjekt und Prädikat) bei *e*-Urteilen und *i*-Urteilen zulässig. Aus (T 1) und (T 4), bzw. (T 2) und (T 3) ergibt sich, daß auch die *conversio per accidens:*

(p) $\dfrac{XaY}{YiX}$ $\qquad$ $\dfrac{XeY}{YoX}$

eine zulässige Regel ist. Aus diesen Bemerkungen folgt, daß die von Aristoteles gegebenen Beweise der Syllogismen auch bei Zugrundelegung unserer Interpretation (☆) alle uneingeschränkt durchführbar sind (wie die Beweise im einzelnen zu führen sind, geben die mnemotechnischen Ausdrücke *Barbara, Celarent, ..., Fesapo* an[2]). Insbesondere sind also alle 24 von Aristoteles angegebenen Syllogismen bei der Interpretation (☆) logisch-allgemeingültig.

(d) Der unter (1) gegebene Einwand gegen die Deutung (#) trifft nach dem unter (c) Gesagten auf die Deutung (☆) nicht zu. Es ist klar, daß auch der Einwand (2) nicht auf die Deutung (☆) zutrifft.

(e) Um Mißverständnisse auszuräumen, sei folgendes bemerkt. Der Begriff der logisch-allgemeingültigen Formel hängt vom zugrunde gelegten Modellbegriff ab. Sobald eine Klasse $\mathfrak{K}$ von Realisierungen einer (formalen) Sprache $\mathcal{L}$ irgendwie festgelegt ist, kann man erklären, daß ein $\mathcal{L}$- Ausdruck Φ genau dann *logisch-allgemeingültig* ist (bezüglich $\mathfrak{K}$), wenn Φ in allen Strukturen $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{K}$ gilt(Relevant ist dies insbesondere bei Sprachen der zweiten Stufe). Es ist üblich als Modelle stets nur nicht-leere Modelle (=Strukturen) zuzulassen.[3] Insbesondere sind Strukturen $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ für einsortige prädikatenlogische Sprachen 1.Stufe stets nicht-leer. Daß nicht alle 24 Syllogismen bei der Deutung (#) in der einstelligen einsortigen Prädikatenlogik logisch-allgemeingültig sind, liegt daran, daß die Syllogismen hier für jedes Tripel von $\mathfrak{L}$-Formeln $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ mit einer freien Variablen x gültig sein müssen. Aber nicht in jeder $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ muß es erfüllende Objekte für die Prädikate A, B, C geben. Schlüsse wie *Barbari*, oder *Bamalip* sind daher bei der Deutung (#) nicht allgemeingültig. Die geeignete Festlegung des Modellbegriffes hat hier keinen Einfluß. Es entsteht das Problem des '*existential import*' (vergl. Beth [2] pp.127-132). Diese Probleme treten bei der Deutung (☆) nicht auf, da die Gültigkeit der Thesen (T 1) und (T 2) sich bereits aus der Festlegung nur des Modellbegriffes ergibt.

L I T E R A T U R

[1] ARISTOTLE, I. Categories, On Interpretation, Prior Analytics. Loeb Classical Library No.325; London-Cambridge/Mass. 1973.

[2] E.W.BETH: Moderne Logica; Van Gorcum & Comp., Assen 1969.

[3] J.M.BOCHEŃSKI: Formale Logik; K.Alber-Verlag Freiburg/München 1962.

[4] J.M.BOCHEŃSKI: A precis of mathematical Logic; D.Reidel Publ.Comp. Dordrecht-Holland. 1959.

[5] J.CORCORAN: Aristotelian Syllogisms: Valid Arguments or True Universalized Conditionals. Mind 83(1974)pp.278-281.

[6] H.GERICKE: Algebraische Betrachtungen zu den aristotelischen Syllogismen. Archiv der Mathematik 3(1952)pp.421-433.

[7] D.HILBERT: Grundlagen der Geometrie. Teubner Verlag Stuttgart1968 (10.Auflage; 1.Auflage 1899).

[8] D.HILBERT - W.ACKERMANN: Grundzüge der theoretischen Logik. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1967 (5.Auflage).

[9] J.v.KEMPSKI: Relationen- und Prädikatenlogische Untersuchungen zur Syllogistik. Archiv f.Math.Logik und Grundlagenforschung 2(1954)pp. 407-419.

[10] G.KREISEL - J.L.KRIVINE: Modelltheorie. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[11] P.LORENZEN: Zur Interpretation der Syllogistik. Archif f.Math.Logik und Grundlagenforschung 2(1954)pp.420-423.

[12] P.LORENZEN: Über die Syllogismen als Relationenmultiplikationen. Archiv für Math.Logik u.Gundlagenforschung 3(1956)pp.112-116.

[13] P.LORENZEN: Formale Logik. Sammlung Göschen Band 1176/1176a. W.De Gruyter&Co. Berlin 1962.

[14] J.ŁUKASIEWICZ: Aristotle's Syllogistic from the standpoint of modern formal logic. 2nd Edition, Oxford, At the Clarendon Press 1957.

[15] G.PATZIG: Aristotle's Theory of the Syllogism. D.Reidel Publ.Comp. Dordrecht-Holland 1968.

[16] F.TITELMANN: Compendium dialecticae, Francisci Titelmanni ad libros Logicorum Aristotelis admodum utile ac necessarium. Nuper recognitum. Parisiis, 1588.

ULRICH FELGNER
Mathematisches Institut der Universität
74 TÜBINGEN (BRD).

FUSSNOTEN

1) Ob Syllogismen Implikationen oder Ableitungsregeln sind, wird seit Łukasiewicz oft diskutiert (vergl. dazu Corcoran [5], Łukasiewicz [14] und Patzig [15]). Die Unterscheidung zwischung <Implikation> und <Folgerung> wurde erst in aller Klarheit im 19. Jahrhundert getroffen.

2) vergleiche Titelmann [16].

3) Leere Modelle werden als unnatürlich empfunden; will man diese zulassen, so muß dies besonders begründet werden. Für eine Logik, bei der auch leere Modelle zugelassen werden siehe Th. Hailperin: Quantification theory and empty Individual-domains, Journal of Symbolic Logic 18 (1953) pp. 197 - 200.