Einführung in die Logik (WS 2005/06)

Abschlussklausur

14. Februar 2006

Musterlösung

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens, ob der folgende Satz von AL wahrheitsfunktional falsch ist.

$$(\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}) \leftrightarrow ((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \rightarrow (\neg\neg\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}))$$

Lösung:

A	B	(A	$\leftrightarrow$	B)	$\leftrightarrow$	((A	$\vee$	B)	$\rightarrow$	($\neg$	$\neg$	A	$\wedge$	B))
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	f	w	w	w
w	f	w	f	f	w	w	w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	f	f	w	w	f	w	w	f	f	w	f	f	w
f	f	f	w	f	w	f	f	f	w	f	w	f	f	f

Der Satz ‚$(\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}) \leftrightarrow ((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \rightarrow (\neg\neg\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}))$‘ ist *nicht* wahrheitsfunktional falsch, sondern wahrheitsfunktional wahr.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Überprüfen Sie mit Hilfe des Tableauverfahrens, ob die folgende Satzmenge wahrheitsfunktional konsistent ist. Falls die Satzmenge konsistent ist, geben Sie das Fragment einer Wahrheitswertzuordnung an, unter der jedes Element dieser Satzmenge wahr wird.

$$\{\neg(\mathrm{C} \wedge \neg\mathrm{D}),\ \neg\mathrm{E} \vee \mathrm{C},\ \mathrm{E} \leftrightarrow \mathrm{D}\}$$

Lösung:

1.				$\neg(\mathrm{C} \wedge \neg\mathrm{D})$				EdT
2.				$\neg\mathrm{E} \vee \mathrm{C}$				EdT
3.				$\mathrm{E} \leftrightarrow \mathrm{D}$				EdT
4.		E				$\neg$E		3, $\leftrightarrow$D
5.		D				$\neg$D		3, $\leftrightarrow$D
6.	$\neg$E		C		$\neg$E		C	2, $\vee$D
	X							
7.		$\neg$C	$\neg\neg$D	$\neg$C	$\neg\neg$D	$\neg$C	$\neg\neg$D	1, $\neg\wedge$D
8.		X	D		D	X	D	7, $\neg\neg$D
					X		X	

Offenes Tableau, d.h. die Satzmenge ist wahrheitsfunktional konsistent.

Ein Fragment einer Wahrheitswertzuordnung unter der jedes Element dieser Satzmenge wahr wird, ist z.B.

C: w, D: w, E: w (erster offener Zweig)

Ein weiteres Fragment einer Wahrheitswertzuordnung unter der jedes Element dieser Satzmenge wahr wird:

C: f, D: f, E: f (zweiter offener Zweig)

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Überprüfen Sie mit Hilfe des Tableauverfahrens, ob die folgende Satzmenge wahrheitsfunktional konsistent ist. Falls die Satzmenge konsistent ist, geben Sie das Fragment einer Wahrheitswertzuordnung an, unter der jedes Element dieser Satzmenge wahr wird.

$$\{\neg[(\neg F \land \neg G) \leftrightarrow \neg(F \lor G)]\}$$

Lösung:

1.	$\neg[(\neg F \land \neg G) \leftrightarrow \neg(F \lor G)]$				EdT
2.	$\neg\neg(F \lor G)$		$\neg(F \lor G)$		1, $\neg \leftrightarrow$ D
3.	$\neg F \land \neg G$		$\neg(\neg F \land \neg G)$		1, $\neg \leftrightarrow$ D
4.	$F \lor G$				2, $\neg\neg$D
5.	$\neg F$				3, $\land$ D
6.	$\neg G$				3, $\land$ D
7.	F	G			4, $\lor$ D
	X	X			
8.			$\neg F$		2, $\neg \lor$ D
9.			$\neg G$		2, $\neg \lor$ D
10.			$\neg\neg F$	$\neg\neg G$	3, $\neg \land$ D
11.			F	G	10, $\neg\neg$D
			X	X	

Geschlossenes Tableau, d.h. die Satzmenge ist *nicht* wahrheitsfunktional konsistent (sondern wahrheitsfunktional inkonsistent).

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Die charakteristische Wahrheitstafel für das wahrheitsfunktionale Konnektiv ‚$|\!\!\leftarrow$' (Pränonpendenz; das hier benutzte Zeichen stammt von U. Felgner) sieht wie folgt aus:

A	B	$A \,|\!\!\leftarrow B$
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wenn wir Sätze, die mit ‚$|\!\!\leftarrow$' zusammengesetzt sind, mit Hilfe des Tableauverfahrens bearbeiten wollen, müssen wir zwei neue Dekompositionsregeln einführen. Eine Regel für Sätze mit der Dekompositionsform $A \,|\!\!\leftarrow B$ und eine Regel für Sätze mit der Dekompositionsform $\neg(A \,|\!\!\leftarrow B)$. Formulieren Sie die entsprechenden Dekompositionsregeln.

Lösung:

Dekompositionsregel für $A \,|\!\!\leftarrow B$:

$$\begin{array}{ccc} & A \,|\!\!\leftarrow B & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg A & & \neg A \\ B & & \neg B \end{array}$$

Dekompositionsregel für $\neg(A \,|\!\!\leftarrow B)$:

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \,|\!\!\leftarrow B) & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & & A \\ B & & \neg B \end{array}$$

Alternative Lösung:

Dekompositionsregel für $A \,|\!\!\leftarrow B$:

$$\begin{array}{c} A \,|\!\!\leftarrow B \\ \\ \neg A \end{array}$$

Dekompositionsregel für $\neg(A \,|\!\!\leftarrow B)$:

$$\begin{array}{c} \neg(A \,|\!\!\leftarrow B) \\ \\ A \end{array}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie (ausschließlich unter Verwendung der Ableitungsregeln von KNSAL):

$$\{H \rightarrow \neg I,\ (I \land \neg K) \rightarrow (\neg K \land H)\} \vdash_{\text{KNSAL}} I \rightarrow K$$

Lösung:

1	$H \rightarrow \neg I$	Annahme
2	$(I \land \neg K) \rightarrow (\neg K \land H)$	Annahme
3	$\quad I$	Annahme
4	$\quad\quad \neg K$	Annahme
5	$\quad\quad I \land \neg K$	3,4 $\land$E
6	$\quad\quad \neg K \land H$	2,5 $\rightarrow$B
7	$\quad\quad H$	6 $\land$B
8	$\quad\quad \neg I$	1,7 $\rightarrow$B
9	$\quad\quad I$	3
10	$\quad K$	4-9 $\neg$B
11	$I \rightarrow K$	3-10 $\rightarrow$E

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeigen Sie (unter Verwendung der Ableitungsregeln von KNSAL+):

$$\{L \vee M\} \vdash_{\text{KNSAL+}} \neg(\neg L \wedge \neg M)$$

Lösung:

1	$L \vee M$	Annahme
2	$\neg\neg(L \vee M)$	1 DN
3	$\neg(\neg L \wedge \neg M)$	2 DeM

Alternative Lösung:

1	$L \vee M$	Annahme
2	$\neg\neg L \vee M$	1 DN
3	$\neg\neg L \vee \neg\neg M$	2 DN
4	$\neg(\neg L \wedge \neg M)$	3 DeM

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Symbolisieren Sie die folgenden Sätze in PLI, ohne Satzbuchstaben zu verwenden. Verwenden Sie dabei den angegebenen Symbolisierungsschlüssel.

UD:	Menschen
M^1:	„... ist ein Mann‘
V^2:	„... verehrt ...‘
p:	‚Paris Hilton‘
w:	‚Werner‘

(a) Werner verehrt Paris Hilton. (1 Punkt)

(b) Nicht alle Männer verehren Paris Hilton. (1 Punkt)

(c) Niemand wird von allen verehrt. (2 Punkte)

(d) Jeder, der von jemandem verehrt wird, verehrt sich selbst. (3 Punkte)

(e) Jeder verehrt sich selbst nur dann, wenn er von jemand anderem verehrt wird. (3 Punkte)

Lösung:

(a) V^2wp

(b) $\neg(\forall x)(M^1x \rightarrow V^2xp)$

(c) $\neg(\exists x)(\forall y)(V^2yx)$

(d) $(\forall x)[(\exists y)V^2yx \rightarrow V^2xx]$

(e) $(\forall x)[V^2xx \rightarrow (\exists y)(\neg y = x \wedge V^2yx)]$

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Zeigen Sie (ausschließlich unter Verwendung der Ableitungsregeln von KNSPL):

$$\{(\exists x)\neg(Rax \rightarrow Sxb) \rightarrow (\forall y)Tyy,\ Raa \wedge \neg Sab\} \vdash_{KNSPL} Tcc$$

Lösung:

1	$(\exists x)\neg(Rax \rightarrow Sxb) \rightarrow (\forall y)Tyy$	Annahme
2	$Raa \wedge \neg Sab$	Annahme
3	$\quad$ $Raa \rightarrow Sab$	Annahme
4	$\quad$ Raa	2 $\wedge$B
5	$\quad$ Sab	3,4 $\rightarrow$B
6	$\quad$ $\neg Sab$	2 $\wedge$B
7	$\neg(Raa \rightarrow Sab)$	3-6 $\neg$E
8	$(\exists x)\neg(Rax \rightarrow Sxb)$	7 $\exists$E
9	$(\forall y)Tyy$	1,8 $\rightarrow$B
10	Tcc	9 $\forall$B