Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik II

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 3**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei R eine zweistellige Relation, und sei $R^t(x, y)$ definiert durch

$$\forall X^2[(\forall x X^2(x,x) \wedge \forall xyz(X^2(x,y) \wedge X^2(y,z) \rightarrow X^2(x,z)) \wedge \forall xy(R(x,y) \rightarrow X^2(x,y)) \rightarrow X^2(x,y))]$$

Zeigen Sie, daß R^t die reflexive und transitive Hülle von R ist, d.h. die kleinste reflexive und transitive Relation, die R umfaßt.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Beweisen Sie:

a) $\vdash \neg\neg(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg\neg\psi)$

b) $\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$

c) $\vdash \neg(\phi \wedge \neg\phi)$

d) $\vdash \neg\neg(\neg\neg\phi \rightarrow \phi)$

e) $\neg\neg\phi, \neg\neg(\phi \rightarrow \psi) \vdash \neg\neg\psi$

f) $\vdash \neg\neg(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg(\phi \wedge \neg\psi)$

g) $\vdash \neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \rightarrow \psi)$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Definieren Sie die Übersetzung von ϕ zu $\phi^{\neg\neg}$, bei der vor jede Teilformel von ϕ eine doppelte Negation gesetzt wird. Zeigen Sie: $\vdash_i \phi^o \leftrightarrow \phi^{\neg\neg}$ und $\vdash_c \phi$ genau dann, wenn $\vdash_i \phi^{\neg\neg}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß im aussagenlogischen Fall gilt: $\vdash_i \neg\phi$ genau dann, wenn $\vdash_c \neg\phi$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Intuitionistische Arithmetik **HA** (Heyting Arithmetik) ist die intuitionistische Theorie 1. Stufe, welche die Axiome von Seite 87 des Buches von van Dalen als mathematische Axiome verwendet. Zeigen Sie mithilfe des Induktionsprinzips: $\mathbf{HA} \vdash \forall \mathbf{xy}(\mathbf{x} = \mathbf{y} \vee \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$. Zeigen Sie weiterhin, daß die Gödel-Übersetzung für die Arithmetik funktioniert, d.h. $\mathbf{PA} \vdash \phi$ genau dann, wenn $\mathbf{HA} \vdash \phi^o$ (wobei **PA** Peanos klassische Arithmetik ist).

Hinweis: Die Atome müssen nicht doppelt negiert werden.

(Aufgaben 2-5 aus van Dalen, Logic and Structure, 4. Aufl., S. 180f)