

MATHEMATIK DER WAHRNEHMUNG

WENDEPUNKTE

Felix A. Wichmann^{1,2,3} und Marc O. Ernst¹

¹Max-Planck-Institut für Biologische Kybernetik, Spemannstr. 38, 72076 Tübingen

²Bernstein Center for Computational Neuroscience Berlin, Humboldt Universität Berlin, Philippstr. 13 Haus 6, 10115 Berlin

³Technische Universität Berlin, Fakultät IV, Franklinstr. 28/29, Sekr. 6-4, 10587 Berlin

Die experimentelle Psychologie selbst ist zwar keine Naturwissenschaft, denn den Gegenstand ihrer Untersuchung bilden die geistigen Vorgänge, aber sie benutzt naturwissenschaftliche Methoden zur Festlegung der Gesetze dieser geistigen Vorgänge. Gerade durch diese Beziehung zu den beiden großen Gebieten der kulturellen Betätigung, nach der Seite der Methode zu den Naturwissenschaften, nach der Seite des Inhaltes ihrer Untersuchung zu den Geisteswissenschaften ist sie wie keine andere Disziplin geeignet, der Vermittlung zwischen Naturwissenschaft und Geisteswissenschaft zu dienen, und in diesem Sinne zu wirken, soll ihr keine Willensanstrengung zu groß sein.

Narziss Ach, »Über den Willen«, 1910

Narziss Ach hatte Recht: die experimentelle Psychologie – und die Wahrnehmungsforschung als deren Teilgebiet – ist gerade deswegen so spannend, weil sie sich mit geistigen Vorgängen beschäftigt, sich aber der naturwissenschaftlichen Vorgehensweise bedient. Doch Narziss Ach konnte noch nicht wissen, dass die Sprache der modernen Naturwissenschaft die Mathematik ist. Ein Ziel dieses Aufsatzes ist es, zu zeigen, wie geistige Vorgänge – hier die Wahrnehmung – durch Mathematik beschrieben und besser verstanden werden können.

1. Wahrnehmung als Inferenz, oder: Warum Wahrnehmungsforschung?

Ein Problem der Wahrnehmungsforschung ist, die Schwierigkeit des Wahrnehmungsprozesses dem Nichteingeweihten verständlich zu machen. Für das Sehen gilt das im Besonderen: Augen auf und – voilà – die Welt ist da! Sehen fällt uns so leicht, dass Metaphern des Sehens wie selbstverständlich auch geistige Vorgänge beschreiben: »das ist doch klar«, »ich sehe die Lösung«, »ein durchsichtiger Versuch, mich hinter das Licht zu führen...«, »ein heller Kopf«, »der ist keine Leuchte«. Die Kognitionsforschung hat es viel leichter, denn jeder sieht (!) sofort, dass es schwierig ist, Fragen wie »wie denken wir logisch?« oder »wie spielen wir Schach?« zu erforschen. Intuitiv sollten Handlungen, die uns schwer fallen, wie logisches Denken und Schachspielen, doch profunder sein als das scheinbar triviale Sehen. Doch Intuition ist hier ein ganz schlechter Lehrer. Logik und Schach sind bei weitem besser verstanden (und trivialer!) als Wahrnehmung. Menschen haben technische Systeme – Software – entwickelt, die sowohl logische Schlüsse

als auch Schachspielen besser können als jeder Mensch. Technische Systeme, deren visuelle Wahrnehmung auch nur annähernd so gut ist wie die des Menschen, werden noch lange auf sich warten lassen. Warum glauben Sie, dass Sie noch immer so viele PIN-Nummern auswendig lernen müssen? Weil kein Bankautomat ihr Gesicht wieder erkennen kann, obwohl dies schon Kleinkinder und selbst der leicht senilen Verwandtschaft leicht fällt! Auch die traurig hohe Anzahl von Verkehrsopferten zeigt, wie schwer ein System zu realisieren ist, das automatisch, von Kamerabildern gesteuert, beim Bremsen hilft. Einerseits sollte es effektiv genug sein, um Zusammenstöße zu verhindern, andererseits nicht bei jeder Ortsdurchfahrt Dutzende unnötiger Notbremsungen und Halswirbelschleudertraumata auslösen. Seit Jahren arbeiten alle großen Automobilhersteller mit gigantischem Aufwand an einer solchen Lösung, bislang aber noch ohne Erfolg.

Vielleicht ist folgende Frage die grundlegendste zur visuellen Wahrnehmung: Die Welt ist räumlich dreidimensional. Bilder von dreidimensionalen Objekten der Welt werden auf unsere zweidimensionale Netzhaut projiziert. Dort erzeugen sie zweidimensionale Erregungsmuster der Photorezeptoren. Aus diesem zweidimensionalen Bild muss das visuelle System Anzahl, Größe, Eigenschaften und Entfernungen der dreidimensionalen Objekte schätzen. Mathematisch gesprochen ist ein solcher Vorgang nicht eindeutig lösbar: für jede zweidimensionale Projektion (»Bild auf der Netzhaut«) gibt es unendlich viele verschiedene dreidimensionale Szenen (»mögliche Welten«), die der Projektion zugrunde liegen könnten. Visuelle Wahrnehmung stellt also immer eine Form von Inferenz dar, denn was wir bewusst wahrnehmen (»sehen«), geht über die sensorischen Daten hinaus. Es ist immer eine Interpretation dieser Daten. Wahrnehmung als Inferenz oder unbewusster Schluss (ein Ausdruck, der auf Hermann von Helmholtz zurückgeht) sollte aber nicht als perzeptuelle Willkür missverstanden werden: die dabei verwendeten Rechenverfahren scheinen ziemlich universell zu sein; so genannte optische Täuschungen und visuelle Illusionen – also Perzepte, die nicht der »wirklichen Welt« entsprechen oder »physiktreue Perzepte« – werden auf die gleiche Weise von (fast) allen Menschen erlebt.

2. Segmentierung von Objekten vom Hintergrund

Wahrnehmung hat nicht das Ziel, die Welt physikalisch genau abzubilden, quasi als Fotografie im Gehirn. Wir sehen nicht, um uns an der Bild gewordenen Physik zu freuen, sondern um zu handeln, zu überleben: der Sehsinn in Mensch und Tier erlaubt es, die Umwelt aus der Distanz zu sondieren, Objekte zu manipulieren, Essbares zu finden, Gefahren frühzeitig gewahr zu werden. Ein in diesem Handlungs- und Überlebenssinne ideales Sehsystem sollte visuelle Objekte klar herausstellen, zum Beispiel den Tiger von Busch und Ästen visuell »abheben« oder »herauslösen« – trotz der Tarnung des Tigers, der ja gerade nicht gesehen werden will. (Und weil dies unserem Sehsystem meist so gut gelingt, zum Beispiel das Gesicht des Herzallerliebsten aus der Masse anderer Gesichter, Körper und Objekte in unser mentales Spotlight zu stellen, glauben wir irrtümlicherweise Sehen wäre so einfach.) Wenn wir unsere Betrachtung der Einfachheit halber auf Schwarz-weiß-Bilder beschränken, sollte das Sehsystem Übergänge zwischen Objekten herausarbeiten: die Helligkeitsunterschiede oder (Helligkeits-)Kanten sollten prägnanter gemacht werden. Dabei sollten Helligkeits- oder Objektkanten vernünftig nachgeschärft werden, wie es die digitale Bildbearbeiterin in Adobe Photoshop auch versucht: scharf, prägnant, aber ohne Artefakte. Vernünftiges Kantenschärfen bedeutet, wie so oft, einen Kompromiss zu finden: Zu wenig, und der Tiger hebt sich bedauerlicherweise visuell nicht von den Ästen ab; zu viel, und wir nehmen viel zu viele Objektkanten und damit verschiedene Objekte wahr. Wir sehen nur noch sich bewegende gelbe und schwarze Streifen, aber eben auch keinen Tiger mehr – genauso bedauerlich oder fatal.

2.1. Mach-Bänder

Ein Beispiel, wie subtil Bilder durch unser visuelles System nachgeschärft werden, zeigt *Abbildung 1*. Dort sehen Sie ein so genanntes Mach-Band abgebildet, ein geradezu »berühmtes« Helligkeitsmuster. Der Helligkeitsverlauf von links nach rechts, z.B. an der pink markierten Linie in der oberen Hälfte, ist in Hellblau aufgetragen: das linke äußere Drittel ist durchgehend hellgrau, das äußere rechte Drittel

Hermann von Helmholtz (1821–1894)

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz war einer der Universalgelehrten des 19. Jahrhunderts; im letzten Band seines epochalen Werkes »Handbuch der physiologischen Optik« prägte er schon 1867 für die notwendige Inferenz in der Wahrnehmung den Ausdruck des unbewussten Schlusses. Der unbewusste Schluss, laut Helmholtz, ist prärrational, erfolgt automatisch und spontan, und weder können wir introspektiv ergründen, warum und wie er geschlossen wurde, noch können wir kognitiv darauf Einfluss nehmen. Visuelle Illusionen und optische Täuschungen z.B. können auf rationalem Wege nicht zum Verschwinden gebracht werden; alle kognitive Einsicht, dass unser visuelles System getäuscht wird, hilft nichts: der unbewusste Schluss ist Herr über unsere Wahrnehmung, unser Wille nur sein Knecht. Dies ist im Übrigen keineswegs ungewöhnlich, da alle fundamental wichtigen Prozesse des Körpers – glücklicherweise – nicht dem Willen gehorchen: weder die Magensaft- oder Blutzusammensetzung, noch Hormonspiegel oder gar die Synthese von Cholesterin oder Neurotransmittern (und der Fakir bestätigt als Ausnahme die Regel). Könnten wir hier willentlich eingreifen, wäre unser frühes Ende nahe.

Ernst Mach (1838–1916)

Ernst Mach beschrieb 1865 erstmals die hellen und dunklen Streifen an den Enden einer Helligkeitsrampe, und sie heißen deswegen heute Mach-Bänder. Mach war, wie auch Hermann von Helmholtz, ein Physiker, Psychologe-, Philosophie- und Mathematik-Universalgenie. Über Mach-Bänder berichtete er erstmals in seinem Aufsatz »Über die Wirkung der räumlichen Verteilung des Lichtreizes auf der Netzhaut« in einem Sitzungsbericht der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mitte des 19. Jahrhunderts wurden Machs Beobachtungen zu Anfang als Reproduktionsfehler seines Instrumentariums bzw. des photographischen Prozesses gewertet, denn Mach konnte kontinuierlich abfallende Helligkeitsmuster damals nur trickreich mit Hilfe rotierender Scheiben erzeugen, und brachte deswegen Fotografien seines Stimulus und Versuchsaufbaus zur Kaiserlichen Akademie. Damals war die Einsicht, dass die visuelle Wahrnehmung womöglich nicht einfach eine perfekte Kopie der Außenwelt erzeugt, noch in weiter Ferne.

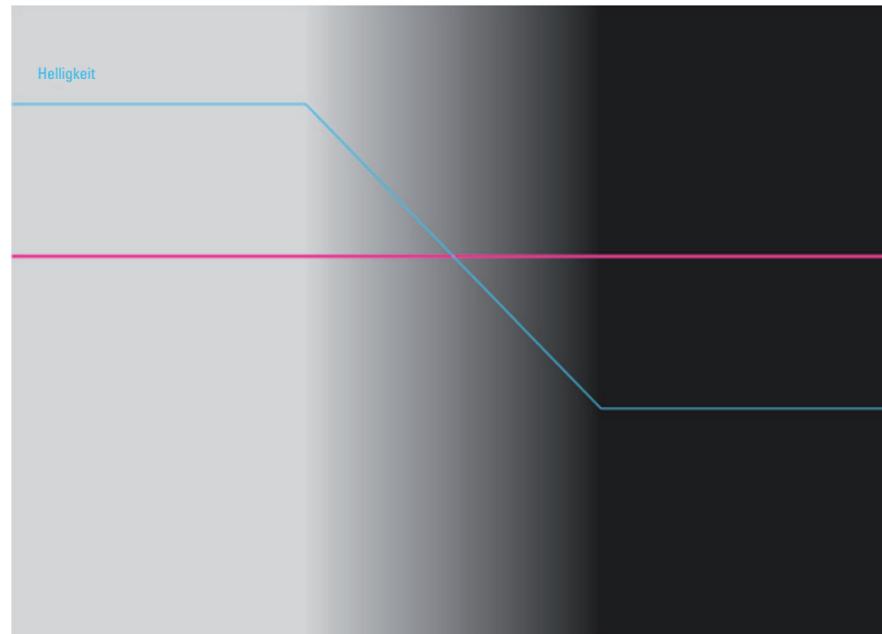


Abbildung 1

fast schwarz. Im mittleren Drittel fällt die Helligkeit linear von hellgrau nach dunkelgrau ab. Was Sie aber zusätzlich sehen, ist ein heller, vertikaler Streifen an der Stelle, wo die uniforme helle Fläche beginnt, dunkler zu werden (1/3 von links), sowie ein dunkler Streifen am Übergang von linearem Helligkeitsabfall zu gleichförmiger Dunkelheit (1/3 von rechts). Diese vertikalen hellen und dunklen Streifen – die Mach-Bänder – existieren nur in Ihrer Wahrnehmung: Ein technisches Gerät zur Helligkeitsmessung, wie eine Photodiode, die auch in den meisten Belichtungsmessern von Fotoapparaten zu finden ist, misst ausschließlich den blauen Helligkeitsverlauf, ohne helles und dunkles Mach-Band. Mach-Bänder sind so instruktiv, da sie den der bewussten Wahrnehmung inhärenten Inferenzprozess – hier Nachschärfen von Kanten – offen legen und als unseren ständigen Begleiter offenbaren. Im Übrigen können Sie mit Hilfe von Mach-Bändern »schwärzer-als-schwarz« oder je nach philosophischer Natur, auch »schwärzer-als-das-Nichts« sehen: wenn die dunkle, homogene Fläche so schwarz wie nur physikalisch möglich ist, also kein einziger Lichtquant reflektiert wird,

dann sehen Sie dennoch ein noch dunkleres Mach-Band: die Mutter alles Schwarzen. Im Folgenden werden wir eine einfache Strategie erklären, wie wichtige Objektkanten aus Bildern herausgefiltert werden: Zuerst Tiefpassfiltern oder Glätten (2.2), dann Wendepunkte der (geglätteten) Helligkeitsfunktion berechnen (2.3), und drittens, die signifikanten Objektkanten extrahieren (2.4). In Abschnitt 2.5 zeigen wir dann, dass dies ziemlich exakt der Strategie der Netzhaut entspricht: Die große Mehrzahl der Zellen der Netzhaut, welche Signale an den Rest des Gehirns weiterleiten, signalisieren die lokale, geglättete zweite Ableitung der Helligkeit an dem visuellen Kortex, nicht die absolute Helligkeit (das physikalische Bild).

2.2 Tiefpass-Filterung (Glättung)

Auch in *Abbildung 2* befindet sich in der oberen Hälfte eine horizontale pinkfarbene Linie. Die hellblaue Linie zeigt wieder, wie in *Abbildung 1*, die Helligkeit der jeweiligen Bildpixel auf Höhe der pinkfarbenen Linie. Die obere gestrichelte Linie

markiert die maximale Helligkeit (erreicht rechts außen, die helle Wand im Hintergrund), die untere gestrichelte Linie markiert die minimale Helligkeit (erreicht den schwarzen Brillenrahmen, ungefähr in der Bildmitte). Auffallend ist zunächst, wie »unruhig« der Helligkeitsverlauf ist; in Bereichen, die uns gleichförmig erscheinen, schwankt die Helligkeit stark, zu sehen im Gesicht und besonders im Bereich des Brillenrahmens und der Brillengläser. Eine gute Strategie für Bildsegmentierung und Objekterkennung ist, das Bild erst zu »glätten« oder, technisch gesprochen, »Tiefpass zu filtern«. Intuitiv ist das ganz einfach, wir lassen einfach die feinsten Details verschwinden. (Brillenträgern unter den Lesern fällt die Vorstellung besonders leicht, denn wenn sie die Brille abnehmen, entspricht das in den allermeisten Fällen einer, je nach Brillenstärke, leichten bis sehr starken Tiefpass-Filterung.) *Abbildung 3* zeigt in einem Hellblau die geglättete Helligkeit. Die Verarbeitung hat dazu geführt, dass im Bereich von Brille und Gesicht die Helligkeit ruhiger verläuft, da die feinen Details verschwunden sind.

2.3 Wendepunkte der Helligkeitsfunktion

Kurvendiskussion, Klasse 11 an deutschen Gymnasien: Ein Wendepunkt in einer Kurve – oder einem Graphen einer Funktion – ist derjenige Punkt, an dem sich die Richtung der Kurve ändert. Stellen Sie sich vor, Sie fahren mit dem Fahrrad durch hügeliges Gelände. In einer Talsohle hat die Straße keine Steigung; nachdem Sie die Talsohle durchfahren haben, steigt die Straße nun an, womöglich erst sanft, dann immer stärker. Irgendwann kommt aber auch der Punkt, an dem die Steigung wieder abnimmt, und oben auf dem Hügel hat die Straße wieder eine Steigung von Null: es geht geradeaus. Irgendwo auf der Strecke war der Anstieg am größten, dort war die Steigung maximal. Dieser Punkt ist der Wendepunkt. Er heißt so, weil der Graph der Kurve vorher nach rechts (links, oben, unten) gekrümmt war, danach aber nach links gekrümmt ist (rechts, unten, oben).

Um Wendepunkte zu erhalten, müssen wir die Funktion ableiten. Die erste Ableitung einer Funktion berechnet die lokalen Veränderungen der Funktion, die Steigung ihres Graphen. Im obigen

hügeligen Fahrradland ist die Ableitung in der Talsohle und auf dem Hügel gleich Null, maximal am Wendepunkt irgendwo dazwischen. Der Wendepunkt ist an der Stelle der maximalen Steigung. Dies bedeutet, dass der Wendepunkt dort ist, wo die erste Ableitung der Steigungsfunktion – gleichbedeutend mit der zweiten Ableitung der Ausgangsfunktion – gleich Null ist. Zudem darf die dritte Ableitung an dieser Stelle nicht Null sein. *Abbildung 4* zeigt diesmal in Orange die zweite Ableitung der geglätteten Helligkeit entlang der pinkfarbenen Linie. Interessant an der zweiten Ableitung ist, dass sie überall gleich Null ist und die Steigung Null hat – also waagrecht oder flach verläuft und kein Wendepunkt vorliegt – wo im Bild »nichts Interessantes passiert« (die Null der zweiten Ableitung liegt exakt auf Höhe der pinkfarbenen Linie). Auch in Bereichen, in denen sich die Helligkeit nur langsam verändert, wie am linken äußeren Bildrand, ist die zweite Ableitung gleich Null. An Objektkanten hingegen hat die zweite Ableitung einen Nulldurchgang – ein *zero-crossing* im Jargon der Wahrnehmungsforscher: hier liegt ein Wendepunkt der Helligkeitsfunktion vor, da die zweite Ableitung Null ist, aber die Steigung der zweiten Ableitung nicht Null ist. Deshalb geht die Kurve auch von oben nach unten oder umgekehrt durch die pinkfarbene Linie hindurch: ein Nulldurchgang. Dies ist besonders deutlich zu Beginn und am Ende des Brillenrahmens zu sehen. Wendepunkte der geglätteten Helligkeitsfunktion markieren Objektkanten!

2.4 Das Extrahieren von signifikanten Objektkanten

Abbildung 5 zeigt diesmal nur die zero-crossings. Wir sehen, dass Nulldurchgänge der zweiten Ableitung der geglätteten Helligkeit tatsächlich die wichtigen Objekte und Kanten des Bildes markieren: der Hintergrund ist verschwunden, Brille, Kopf, Hand und Haare sind herausgearbeitet. Jede Objektkante ist ein zero-crossing – Wendepunkt der geglätteten Helligkeitsfunktion – aber leider gibt es zero-crossings, die unbedeutend sind: Wendepunkte der Helligkeitsfunktion sind ein notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium für eine wichtige Kante. Wir müssen also noch mindestens ein weiteres Kriterium hinzunehmen, um aus allen zero-crossings die wirklichen Objektkanten



Abbildung 2



Abbildung 3



Abbildung 4



Abbildung 5



Abbildung 6

zu gewinnen. In technischen Anwendungen werden dazu dutzende von Verfahren verwendet, doch welche das Gehirn verwendet, ist bis dato noch nicht geklärt. In *Abbildung 5* ist die denkbar einfachste Methode gewählt: die dritte Ableitung muss nicht nur ungleich Null sein, sondern einen Schwellenwert übersteigen.

Auch das vorhin besprochene Glätten haben wir gemacht, um die meistens unbedeutenden zero-crossings zu verhindern. *Abbildung 6* zeigt die zero-crossings, wenn auf die Glättung und den Schwellenwert verzichtet wird. Daher sind alle Wendepunkte der Helligkeitsfunktion markiert. Wir sehen den Bub vor lauter Linien, Kanten und Ecken nicht mehr, respektive nur helle und dunkle Streifen, aber keinen Tiger.

2.5 Neurophysiologie der Netzhaut

Beim Glätten und beim Ableiten hängt das Endergebnis nicht davon ab, in welcher Reihenfolge wir glätten und ableiten, da beides lineare Funktionen

sind – wir könnten auch erst ableiten, und dann die Ableitung glätten. Wir können sogar beide Operationen kombinieren, indem wir die zweite Ableitung der Glättungsfunktion ausrechnen, und damit das Bild glätten. *Abbildung 4* zeigt rechts unten die negative und positive zweite Ableitung der Glättungsfunktion.

Neurophysiologen unter Ihnen werden in den negativen und positiven zweiten Ableitungen der Glättungsfunktion alte Bekannte erkennen: diejenigen Nervenzellen der Netzhaut, die Signale an das Gehirn weiterleiten, so genannte retinale Ganglienzellen, zeigen ein Antwortverhalten auf visuelle Reize, das wie die in *Abbildung 4* gezeigten positiven und negativen zweiten Ableitungen der Glättungsfunktion aussieht. Im Neuro-Jargon: die Querschnitte durch die rotationssymmetrischen rezeptiven Felder solcher Zellen haben inhibitorische Flanken um eine zentrale Erregungsregion, so genannte *on-center retinal ganglion cells* (negative zweite Ableitung), bzw. erregende Flanken um eine zentrale inhibitorische Region, so genannte *off-center retinal ganglion cells* (positive zweite

Ableitung). Die große Mehrzahl der Zellen der Netzhaut, die Signale an den Rest des Gehirns weiterleiten, signalisieren die lokale, geglättete zweite Ableitung der Helligkeit an die visuelle Großhirnrinde, nicht einfach die Helligkeit (das physikalische Bild) – Ihre Netzhaut rechnet!

2.6 Warum der ganze Aufwand?

Wann immer Sie sich *Abbildung 2* anschauen, wird Sie womöglich das Gefühl beschleichen, dass die Herren Wichmann und Ernst unfähig sind: der Bub und seine Brille sind doch so unglaublich leicht zu sehen! Wozu das ganze Glätten, Ableiten, Schwellenwerte setzen, um dann in *Abbildung 5* eine einigermaßen ordentliche Karikatur des Buben zu erhalten. Seien Sie ehrlich – befällt Sie dieser Gedanke? Dann sind wir wieder am Ausgangspunkt unseres Aufsatzes, die Schwierigkeit der Wahrnehmung zu kommunizieren. Ein Problem ist die Visualisierung: Warum sagt ein Bild mehr als tausend Worte? Weil unsere effektive Sehmaschinerie in Auge und Kopf über Millionen von Jahren, und während wir vom Tag unserer Geburt an lernen, eine große Zahl Helmholtz'scher unbewusster Schlüsse ausgebildet hat, die Helligkeitsunterschiede und -kanten in der Welt zu Objekten gruppieren.

Negative von schwarz-weißen Bildern, aber insbesondere Negative von Farbfotos hingegen sind schon deutlich schwerer richtig wahrzunehmen – für unser Sehsystem ist es deutlich schwieriger, sie zu interpretieren: die merkwürdigen, psychedelischen Farben des Farbnegativs und die invertierte Helligkeit verhindern, dass der visuelle Inferenzapparat in Gang kommt. Die Schwierigkeit für ein technisches Sehsystem wird so offenbar, da wir unsere evolutionären und gelernten »Tricks« bei der Interpretation bildhafter Daten nicht anwenden können.

3. Schlussworte

Wir sehen helle und dunkle Streifen in Mach-Bändern, die nur in unserer Wahrnehmung existieren. Dort, wo wir Mach-Bänder sehen, hat die geglättete zweite Ableitung der – von den Photo-

rezeptoren in unserer Netzhaut ermittelten – Helligkeitsfunktion Wendepunkte, »signalisiert« dem Gehirn also wichtige Objektkanten. Die Illusion dieser distinkt abgesetzten hellen und dunklen Bänder ist Nebenprodukt eines unserer Helmholtz'schen unbewussten Schlüsse, der den »Nachschärfen- und -Kanten-Hervorheben-Prozess«, anstößt. Mach-Bänder verdeutlichen die allgegenwärtige Tendenz des Gehirns, das kontinuierliche Erregungsmuster unserer Netzhaut in semantisch bedeutsame Objekte zu zerlegen, Hypothesen über die Welt zu bilden, Inferenz zu betreiben. Beinahe ein Jahrhundert nach Mach hat die Neurophysiologie gefunden, dass die meisten derjenigen Nervenzellen der Netzhaut, die Signale an das Gehirn weiterleiten, sich verhalten wie die in *Abbildung 4* gezeigten positiven und negativen zweiten Ableitungen des Glättungskerns. Mathematik, schlussendlich, hilft uns diese empirischen Befunde zu interpretieren. Warum zeigen die Nervenzellen der Netzhaut ein solches Verhalten: sie berechnen die Wendepunkte der geglätteten Helligkeit. Denn die Netzhaut übermittelt dem Gehirn vorverarbeitete Daten darüber, wo im Bild die wichtigen Ecken und Kanten sind, und leitet eben nicht nur eine Kopie des auf die Photorezeptoren fallenden Lichtmusters weiter.

Wenn alle Menschen statt der Augen grüne Gläser hätten, so würden sie urteilen müssen, die Gegenstände, welche sie dadurch erblicken, sind grün – und nie würden sie entscheiden können, ob ihr Auge ihnen die Dinge zeigt, wie sie sind, oder ob es nicht etwas hinzutut, was nicht ihnen, sondern dem Auge gehört.

Heinrich von Kleist am 22. März 1811 in einem Brief an seine Halbschwester Ulrike

Spätestens nach Lektüre dieses Artikels wissen Sie, dass Kleists Verunsicherung hinsichtlich des »Wahrheitsgehaltes« der Wahrnehmung – ausgelöst durch die Lektüre von Immanuel Kants *Kritik der reinen Vernunft* – berechtigt war. Nur den vollen Durchblick hatte er noch nicht: die Augen zeigen Ihnen zum Glück die Dinge nie wie sie sind – mit oder ohne grün getönter Sonnenbrille.

Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

Mathematiker, Physiker und Astronom; womöglich der beste Mathematiker, den die Welt bislang gesehen hat – auch wenn solche extremen Aussagen immer mit Vorsicht zu genießen sind. Dass Gauß ein besonderes mathematisches Talent besaß, wurde spätestens dann offenbar, als er als siebenjähriger (!) Volksschüler die Summe der ersten N-ganzen Zahlen herleitete.