Übungen zur Mathematischen Logik I — Blatt 10

Prof. Schroeder-Heister **Wintersemester 2017/18**
René Gazzari **Universität Tübingen**

Aufgabe 37: Das Überführungslemma für Terme lautet wie folgt:

- Sei $\mathcal{L}$ beliebige formale Sprache; t, s Terme dieser Sprache und $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Dann gilt für jede Belegung v die folgende Gleichheit:

$$[\![t(s)]\!]_v^{\mathfrak{A}} \;=\; [\![t(x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto [\![s]\!]_v^{\mathfrak{A}}]}$$

Beweisen Sie dieses Lemma durch vollständige Induktion; setzen Sie dabei voraus, dass $\mathcal{L}$ eine Konstante c und ein n-stelliges Funktionszeichen (mit $0 \neq n \in \mathbb{N}$) besitzt. Beachten Sie dabei, dass in $t(x)$ eine Variable x markiert wird (unabhängig davon, ob diese in t vorkommt) und dass $t(s)$ das Resultat einer Ersetzung aller freien Vorkommen von x in t durch s ist.

DEF (Schwache Arithmetik): Die *schwache Arithmetik* PA_0 ist durch folgende Axiome gegeben:

(O_1) $\forall x.\ 0 \neq N(x)$

(O_2) $\forall xy.\ (N(x) = N(y) \to x = y)$

(IS) $\phi(0) \land \forall x.(\phi(x) \to \phi(N(x))) \to \forall x.\phi(x)$

Dabei ist (IS) ein Axiomenschema für jede Formel ϕ mit genau der freien Variable x (also für Formeln ϕ mit $\mathrm{FV}(\phi) = \{x\}$). Weiterhin führen wir die folgende metasprachliche Schreibweise für beliebige Terme t ein:

- $N^{\mathbf{0}}(t) \doteq t$ und $N^{\mathbf{n+1}}(t) \doteq N(N^{\mathbf{n}}(t))$

Beachten Sie, dass $\mathbf{0}$, $\mathbf{n}$ und $\mathbf{n+1}$ metasprachliche Zahlen sind, die angeben, wie oft das Funktionszeichen N auf den Term t angewandt wurde; insbesondere sind $\mathbf{0}$, $\mathbf{n}$ und $\mathbf{n+1}$ in dieser Verwendung keine Terme der formalen Sprache.

Aufgabe 38: Geben Sie eine (minimale) formale Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}_0}$ an, in der die oben genannten Axiome formuliert werden können. Geben Sie zudem jeweils eine $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}_0}$-Struktur über den Grundräumen $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ an. Zeigen Sie schließlich semantisch, dass Modelle von PA_0 unendlich groß sein müssen. (Eine Menge M ist genau dann unendlich groß, wenn es eine Funktion $F : M \to M$ gibt, die injektiv aber nicht surjektiv ist.)

Aufgabe 39: Zeigen Sie, dass die folgenden Ableitbarkeitsbehauptungen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

1. $\mathrm{PA}_0 \vdash \forall x. x \neq N^{\mathbf{n+1}}(x)$
2. $\mathrm{PA}_0 \vdash \forall x \forall y.\, x = N^{\mathbf{n+1}}(y) \to x \neq y$

Hinweis: Beide Teilaufgaben können durch die Betrachtung einer beliebigen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gelöst werden (und erfordern keine Induktion über die natürliche Zahlen). Im ersten Teil kann die Formel mithilfe des Induktionsschemas (angewandt auf die Formel $\phi \triangleq x \neq N^{n+1}(x)$) im Kalkül bewiesen werden. In der zweiten Teilaufgabe wird die erste vorausgesetzt; auf die Verwendung des Induktionsschemas kann aber verzichtet werden.

Aufgabe 40: Es sei die Aussagenmenge

$$\Delta := \{\forall x(x = x), \forall xyz(x = y \land z = y \to x = z)\} \subseteq \mathcal{L}$$

in einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$ (mit einstelligen Funktionszeichen f und g) gegeben. Zeigen Sie im Kalkül NK$'$ folgende Behauptungen über Ableitbarkeit:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \Delta \vdash \forall xy(x = y \to y = x) \\ \text{(b)} & \Delta \vdash \forall xyz(x = y \land y = z \to x = z) \end{array}$$

Zeigen Sie anschließend im Kalkül NK$'_=$:

$$\begin{array}{ll} \text{(c)} & \vdash \forall z(x = z \to y = z) \leftrightarrow x = y \\ \text{(d)} & \forall x(f(x) = g(x)) \vdash \forall x(f(f(x)) = g(g(x))) \end{array}$$

Hinweis: Im Kalkül NK$'$ gibt es keine Schlussregeln für die Gleichheit.

Abgabe der Aufgaben montags bis 17:30 Uhr (Internet) bzw. in der Vorlesung.