Übungen zur Informatik III — Blatt 10

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2003/04**

Abgabe am Donnerstag, den 8. Januar, in der Vorlesungspause

Anleitung: Die Aufgaben 47, 48 und 49 zählen zum Abschnitt "Formale Sprachen", die Aufgaben 50, 51 und 52 zum Abschnitt "Berechenbarkeit". Pro Abschnitt zählt eine Aufgabe als reguläre Aufgabe, d.h. die Punkte dieser Aufgabe zählen zu den für den Erwerb des Scheines relevanten *erreichbaren* Punkten, die Punkte einer weiteren Aufgabe sind Zusatzpunkte, die Punkte der dritten Aufgabe werden nicht gewertet. Mit anderen Worten: Sie dürfen sich aus jedem Abschnitt zwei Aufgaben zur Bearbeitung aussuchen, von denen eine als Zusatzaufgabe gewertet wird. Bitte geben Sie an, welche der beiden Aufgaben als Zusatzaufgabe gewertet werden soll.

Bemerkung: Begründen Sie alle Antworten und kommentieren Sie die Automaten!

Aufgabe 47 (1+1+4 Punkte)

Für zwei Wörter $u, v \in \Sigma^*$ ist das Resultat der Operation $u \parallel v$ des *Mischens* von u und v die Menge aller Wörter, die man durch Zerlegung der Wörter und das Zusammenfügen der dadurch erzeugten Teile unter Beibehaltung der relativen Reihenfolgen erhält. Es ist z.B.

$$ab \parallel cd \quad = \quad \{abcd, acbd, acdb, cabd, cadb, cdab\}$$

Die Menge $u \parallel v$ ist durch folgende Vorschrift erklärt:

$$\begin{array}{lll} \epsilon \parallel v & =_{def} & \{v\} \\ u \parallel \epsilon & =_{def} & \{u\} \\ au \parallel bv & =_{def} & \{a\} \circ (u \parallel bv) \cup \{b\} \circ (au \parallel v) \end{array}$$

Die Mischung zweier Sprachen L_1 und L_2, geschrieben $L_1 \parallel L_2$, ist die Menge aller Wörter, die man durch Mischen eines Wortes aus L_1 mit einem Wort aus L_2 erhält:

$$L_1 \parallel L_2 \quad =_{def} \quad \bigcup_{u \in L_1, v \in L_2} u \parallel v$$

(a) Beschreiben Sie die Sprache $0^* \parallel (11)^*$ durch einen regulären Ausdruck.

(b) Beschreiben Sie die Sprache $(01)^* \parallel (10)^*$ durch einen regulären Ausdruck.

(c) Zeigen Sie: Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \parallel L_2$ regulär.

Aufgabe 48 (2+2+2 Punkte)

Welche der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$ sind regulär bzw. kontextfrei?

(a) $L_1 = \{w \mid \#_\$(w) \leq \#_0(w) + \#_1(w)\}$

(b) $L_2 = \{w \mid \#_0(w) = \#_1(w) = 1\}$

(c) $L_3 = \{w^* \mid w = v\$v^R \text{ für } v \in \{0, 1\}^*\}$

Aufgabe 49 (4+2 Punkte)

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt *schließlich periodisch*, wenn es natürliche Zahlen $n \geq 0$ und $p > 0$ gibt, so daß für alle $m \geq n$: $m \in A$ genau dann, wenn $m + p \in A$. Die Zahl p heißt *Periode* von A.

(a) Sei $L \subseteq \{a\}^*$. Zeigen Sie: L ist genau dann regulär, wenn die Menge $\{m \mid a^m \in L\}$ schließlich periodisch ist.

(b) Sei L eine reguläre Sprache über einem endlichen Alphabet. Ist die Menge $\{|w| \mid w \in L\}$ schließlich periodisch?

Aufgabe 50 (4+2 Punkte)

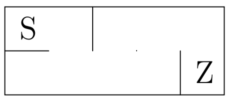
Ein zweidimensionales Labyrinth der Größe $5 \times n$ wird wie folgt als String über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$ codiert:

- Jede Position des Labyrinthes wird durch einen sechsstelligen Binärstring repräsentiert. Die Bits codieren dabei (in dieser Reihernfolge) folgende Eigenschaften: Start, Ziel, Weg nach oben, Weg nach unten, Weg nach links, Weg nach rechts. Dabei stehe 1 für "hat diese Eigenschaft" und 0 für "hat die Eigenschaft nicht".
- Ein Labyrinth kann nicht verlassen werden, unterliegt aber ansonsten keinerlei Beschränkungen hinsichtlich seiner Struktur.
- Die Binärstrings stehen, getrennt durch ein \$, von links nach rechts, dann von oben nach unten auf dem Band.

Beispiel: Der String

100001\$000110\$000101\$000111\$000110\$000001\$001011\$001011\$001010\$001000

repräsentiert folgendes 5×2 Labyrinth:



(a) Geben Sie eine Turing-Maschine an, welche die Sprache L derjenigen Wörter über Σ akzeptiert, die ein Labyrinth der Größe $5 \times n$ repräsentieren, das vom Start bis zum Ziel durchlaufen werden kann.

(b) Ist L kontextfrei? Ist L regulär?

Aufgabe 51 (2+2+1+1 Punkte)

Das Maschinenmodell eines deterministischen, durch Endzustand akzeptierenden Kellerautomaten läßt sich durch Hinzunehmen zusätzlicher Keller oder eine Modifikation des Kellers selbst erweitern. Welche Sprachklassen werden durch folgende Erweiterungen erfaßt?

(a) Kellerautomaten mit zwei synchronen Kellern, d.h. bei jedem Übergang wird in beiden Kellern dieselbe Anzahl von Zeichen eingekellert.

(b) Kellerautomaten mit zwei asynchronen Kellern, d.h. bei jedem Übergang kann in jedem der beiden Keller eine beliebige Anzahl von Zeichen eingekellert werden.

(c) Kellerautomaten mit drei asynchronen Kellern.

(d) Kellerautomaten mit Tiefenzugriff, d.h. ein Übergang hängt nicht nur vom obersten gelesenen Kellersymbol ab, sondern es können beliebig viele Zeichen im Keller gelesen werden.

Aufgabe 52 (1+1+2+2 Punkte)

Ein Büchi-Automat ist ein endlicher Automat, der unendliche Wörter liest. Ein solches Wort wird akzeptiert, wenn der Automat beim Lesen unendlich oft in einen der Endzustände gelangt (den er im weiteren Verlauf natürlich auch wieder verlassen darf). Geben Sie Büchi-Automaten an, die folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ erkennen:

(a) Alle Wörter, die nur aus as bestehen.

(b) Alle Wörter, die zunächst nur aus as, dann nur aus bs und dann nur aus cs bestehen.

(c) Alle Wörter, bei denen auf jedes a auch wieder ein b folgt.

(d) Alle Wörter, bei denen ein b nur nach einer geraden Anzahl von as und ein c nur nach einer durch 3 teilbaren Anzahl von as folgen darf.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!