Übungen zur Mathematischen Logik I

Blatt 6

Aufgabe 23: Beweisen Sie, dass die in Prop 6.8 genannten abkürzenden Schlussregeln für die Disjunktion im Kalkül NK′ gelten.

Zeigen Sie also für beliebige Formeln $\phi, \psi, \sigma \in$ PROP und beliebige Formelmengen $\Gamma, \Delta_\phi, \Delta_\psi \subseteq$ PROP die folgenden Aussagen:

(a) $\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Delta_\phi, \phi \vdash \sigma$ und $\Delta_\psi, \psi \vdash \sigma \quad \Rightarrow \quad \Gamma, \Delta_\phi, \Delta_\psi \vdash \sigma$
(b) $\Gamma \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \phi \vee \psi$
(c) $\Gamma \vdash \psi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \phi \vee \psi$

Beachten Sie dabei, dass die Formel $(\phi \vee \psi)$ lediglich eine abkürzende Schreibweise ist.

Aufgabe 24: Zeigen Sie für beliebige Formeln $\phi, \psi, \sigma \in$ PROP mithilfe des Kalküls NK die folgenden Aussagen über Ableitbarkeit:

(a) $\phi \dashv\vdash (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \psi \to \phi)$
(b) $\phi \wedge \sigma \leftrightarrow \psi \wedge \sigma, \phi \vee \sigma, \psi \vee \sigma \vdash \phi \leftrightarrow \psi$
(c) $\neg(\phi \leftrightarrow \psi) \dashv\vdash (\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \wedge \psi)$

Sind $\phi, \psi \in$ PROP, dann steht „$\phi \dashv\vdash \psi$“ abkürzend für „$\phi \vdash \psi$ und $\psi \vdash \phi$“. Dies wird dann auch gegenseitige Ableitbarkeit genannt.

Hinweis: Im Kalkül NK wird vorausgesetzt, dass die Junktoren $\vee$ und $\leftrightarrow$ genuin zur Sprache gehören und eigene Schlussregeln besitzen. Sie sind also keine Abkürzungen für Formeln über $\{\perp, \wedge, \to\}$.

Aufgabe 25: Beweisen Sie für beliebige Formelmengen $\Gamma \subseteq$ PROP die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(a) Γ ist konsistent.
(b) Es gibt keine Formel $\phi \in$ PROP mit: $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$.
(c) Es gibt eine Formel ϕ mit: $\Gamma \nvdash \phi$

Aufgabe 26: Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine geeignete Formelmenge $\Gamma \subseteq$ PROP an. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

(a) Γ hat keine maximal-konsistente Erweiterung.
(b) Γ hat genau eine maximal-konsistente Erweiterung.
(c) Γ hat genau zwei maximal-konsistente Erweiterungen.
(d) Γ hat überabzählbar viele maximal-konsistente Erweiterungen.

Zusatz:

(e) Γ hat abzählbar viele maximal-konsistente Erweiterungen.

Hinweis: Mit der Funktion Cn von Blatt 3 lassen sich recht einfach unendliche Formelmengen angeben.

Abgabe der Aufgaben am Do. 3.12.2009 nach der Vorlesung