PD. Dr. Klaus Reinhardt **Universität Tübingen, WS 09/10**

Übungen zur Mathematischen Logik I

Blatt 1

Aufgabe 1: Geben Sie eine Definition für eine aussagenlogische Sprache $\mathcal{L}$ in Polnischer Praefix Notation (ohne Klammerung) an.

Dabei sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Zeichen A_n ein Aussagesymbol, die Zeichen N (Negation) ein 1-stelliger, I (Implikation), B (Biimplikation), K (Konjunktion) und D (Disjunktion) je 2-stellige Junktoren.

Geben Sie desweiteren die Menge aller Atome und das Alphabet der Sprache $\mathcal{L}$ an.

Aufgabe 2: Geben Sie an, welche der folgenden Zeichenreihen Formeln im Sinne der DEF 1.2 (Formel) sind. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Falls bei einer Formel Regeln zur Klammerersparnis angewandt wurden, geben Sie die Formel ohne Klammerersparnis an; falls die Regeln nicht angewandt wurden, wenden Sie diese soweit wie möglich an.

(a) $((p_1 \to$ (b) $p_1 \wedge p_2 \to p_3 \wedge p_4$
(c) $p_1 \to p_2 \to p_3 \wedge p_4$ (d) $(\neg((A_1 \wedge A_2) \vee A_3))$
(e) $((p_1 \to p_2))$ (f) $(\phi \to (\psi \to (\phi \to \phi)))$

Aufgabe 3: Geben Sie für die folgenden Formeln jeweils den Strukturbaum (samt den Teilformeln) und den Rang an.

(a) $\neg\neg(\neg\neg p_1 \to p_{15})$ (b) $\neg p_7 \wedge \neg p_3 \to p_3$
(c) $(p_7 \to \neg\bot) \leftrightarrow (p_4 \wedge \neg p_2 \to p_5)$

Aufgabe 4: Für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ sei $K(\phi)$ die Anzahl der Vorkommen von Junktoren in der Formel ϕ. Geben Sie eine rekursive Definition dieser Funktion an.

Zeigen Sie dann die folgenden Aussagen mithilfe der Induktion über den Formelaufbau von ϕ.

(a) Für alle $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt: $r(\phi) \leq K(\phi)$.

(b) Für alle $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt: $\#\,\mathrm{Sub}(\phi) \leq 2 \cdot K(\phi) + 1$

Dabei ist $r(\phi)$ der Rang und $\mathrm{Sub}(\phi)$ die Menge der Teilformeln von ϕ.

Abgabe der Aufgaben am Do. 29.10.2009 nach der Vorlesung