Vorlesungen

über

Modelltheorie

von

Ulrich Felgner

Mathematisches Institut
der Universität Tübingen,
Winter-Semester 2002/2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Modellkonstruktionen, die den Sätzen von Gödel, Löwenheim, Skolem, Tarski, Henkin, Łoś, Robinson, Shelah und anderen zugrunde liegen, haben bedeutende Anwendungen auch außerhalb der reinen Logik. Das führte in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts zu einem systematischen Studium der allgemeinen Eigenschaften von Modellen mathematischer Theorien und damit zum Aufbau einer eigenständigen Disziplin, die den Namen „Modelltheorie" trägt. In ihr werden Fragen behandelt, die die Modelle von beliebigen mathematischen Theorien T grundsätzlich betreffen, wie z.B. die Fragen nach den Anzahlen von T-Modellen in den verschiedenen endlichen und unendlichen Mächtigkeiten, Fragen nach der Existenz besonders reichhaltiger Modelle, Fragen nach der Möglichkeit, alle T-Modelle bis auf Isomorphie durch Invarianten zu klassifizieren, etc.

Die Modelltheorie hat den Begriff des „Modells" einer Theorie T (oder eines Axiomensystems S) zum Gegenstand. Dabei ist eine Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ ein Modell von T (oder von S), wenn alle Aussagen von T (bzw. alle Axiome von S) in $\mathfrak{M}$ gültig sind. In der Modelltheorie geht es in erster Linie um die Beantwortung der folgenden Fragen:

(1) Wie konstruiert man Modelle einer vorgegebenen Theorie T ?

In den verschiedenen Teilgebieten der Algebra kennt man viele konkrete Modellkonstruktionen, im Falle der Ringtheorie etwa die Konstruktion von Matrizenringen, Polynomringen, direkten Summen etc., aber solche Konstruktionen können im allgemeinen nicht für andere Theorien übernommen werden.

In der Modelltheorie sucht man hingegen Methoden zur Konstruktion von T-Modellen, die für alle widerspruchsfreien Satzmengen T zum Ziele führen. Man kennt inzwischen viele derartige Konstruktionen, etwa die Methode der Modellkonstruktion mittels Zeugenkonstanten (Skolem-Henkin), mittels Ultraprodukten (Łoś), mittels Skolem-Funktionen, mittels Erzwingungs-Relationen (forcing à la Robinson), etc. - Einige dieser Konstruktions-Methoden werden wir detailliert vorführen.

(2) Wieviele Modelle einer vorgegebenen Kardinalität hat T und lassen sich diese Modelle durch Systeme von Invarianten übersichtlich klassifizieren?

Vollständige Theorien, die bis auf Isomorphie nur genau ein abzählbares Modell haben, werden $\aleph_0$-kategorisch genannt. Wir werden solche Theorien ausführlich behandeln. Die viel allgemeinere Frage nach der möglichen Anzahl der Modelle einer Theorie in einer bestimmten Mächtigkeit und die Frage, ob diese Modelle durch Invarianten klassifizierbar sind, wird in der

„Stabilitäts-Theorie“ behandelt, auf die wir hier aus Zeitgründen nicht eingehen können.

(3) Hat T Modelle, die „besonders reichhaltig“ sind?

Besonders „reichhaltig“ sind T-Modelle $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$, die beispielsweise von jedem T-Modell $\mathfrak{N} = \langle N, \ldots \rangle$ mit $\mathcal{K}ard(N) \leq \mathcal{K}ard(M)$ eine isomorphe Kopie als Substruktur enthalten. Solche Modelle bezeichnet man als „universelle T-Modelle“. Besonders „reichhaltig“ sind aber auch T-Modelle $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$, die Elemente aller nur möglichen (d.h. mit T widerspruchsfreien) Typen enthalten. Das sind die sogenannten „saturierten“ Modelle. Andere Reichhaltigkeits-Forderungen treten unter den Namen „Gleichungs-kompakt“, „existenziell-abgeschlossen“, etc. auf.

- Wir werden viele dieser Reichhaltigkeits-Bedingungen behandeln.

Wir können in einer einsemestrigen Vorlesung nur einen kleinen Ausschnitt aus der Modelltheorie geben. Aber dieser kleine Ausschnitt hat bereits zahlreiche gute und beeindruckende Anwendungen in der klassischen Mathematik. Wir werden daher auch einige dieser Anwendungen ausführlich vorführen.

Tübingen, im März 2003.

§1. *Elementar-äquivalente Strukturen*

Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen, in denen genau dieselben Aussagen gelten, sind sich in mancher Hinsicht ähnlich. Tarski nannte sie „elementar-äquivalent“ (siehe Alfred Tarski *„Grundzüge des Systemen-Kalküls, 2.Teil“* (Fund. Math. 26 (1936), pp.283-301, dort: Appendix, Seite 299). Mit dem Adjektiv „elementar“ wollte er andeuten, daß sich die Äquivalenz auf die Gültigkeit von „elementaren Aussagen“ (d.h. quantoren-logischen Aussagen der 1. Stufe) bezieht.

Definition (Alfred Tarski, 1936) Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ und $\mathfrak{N} = \langle N, \dots \rangle$ heißen *elementar-äquivalent,* (in Zeichen: $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$), falls für jede $\mathcal{L}$-Aussage Φ gilt:

$$\mathfrak{M} \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{N} \models \Phi.$$

Das Symbol '$\equiv$' zur Bezeichnung der elementaren Äquivalenz hatte Tarski erst 1949 (*„Arithmetical classes and types of mathematical systems“,* Bull. AMS 55 (1949), p.63) eingeführt.

Wir machen zunächst die einfache Feststellung, daß isomorphe Strukturen stets elementar-äquivalent sind. Der Isomorphie-Begriff ist dabei wie folgt definiert.

Definition. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Strukturen derselben Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$,

$$\mathfrak{A} = \langle A, f_j, R_k, c_i \rangle_{j \in J, k \in K, i \in I} \quad , \qquad \mathfrak{B} = \langle B, g_j, S_k, d_i \rangle_{j \in J, k \in K, i \in I}.$$

Eine ein-eindeutige Abbildung φ von A auf B heißt *Isomorphismus* von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, falls

(1) für jedes $j \in J = \mathrm{Dom}(\sigma)$ gilt (mit der Abkürzung $n = \sigma(j)$):

$$\forall x_0, \dots, x_n \in A: \; x_0 = f_j(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_0) = g_j(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)),$$

(2) für jedes $k \in K = \mathrm{Dom}(\tau)$ gilt (mit der Abkürzung $m = \tau(k)$):

$$\forall x_1, \dots, x_m \in A: \; \langle x_1, \dots, x_m \rangle \in R_k \Leftrightarrow \langle \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m) \rangle \in S_k.$$

(3) für jedes $i \in I$ gilt: $\varphi(c_i) = d_i$.

Drei Bemerkungen zur Terminologie. (1) Die Bezeichnung kommt aus dem Griechischen: *isos* (ἴσος) heißt „gleich“ und *morphé* (μορφή) ist „die (schöne) Gestalt, das Ansehen, das Aussehen, die Form“. Isomorphismen sind also eineindeutige Abbildungen, die die Gestalt unverändert lassen. Isomorphe Strukturen haben „die gleiche Gestalt“.

(2) Das Wort „Isomorphismus“ wurde von Camille Jordan in seinem *„Traité des substitutions et des Équations algébriques“,* Paris 1870, (dort Seite 56) in die Mathematik eingeführt.

(3) Die Isomorphie zweier Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird durch das Zeichen $\cong$ angedeutet. Es war von Leibniz 1679 vorgeschlagen worden, um damit die Kongruenz von geometrischen Figuren anzudeuten (cf. Leibniz Werke, 3. Folge, Band 5, p. 153 (Gerhardt, Herausgeber) und *Miscellanea Berolinensa* 1710). Die ‘Ähnlichkeit’ hatte Leibniz mit dem Symbol $\backsim$ angedeutet. Es ist ein liegendes S, das an das lateinische Wort *similis* erinnern soll. Leibniz schrieb dazu: „Similitudinem ita notabimus: $\backsim$ “. Über das Zeichen $\cong$ schrieb er: „Nam $\backsim$ mihi est signum similitudinis, et = aequalitatis, unde congruentiae signum compono, quia quae simul et similia et aequalia sunt, ea congrua sunt“.

Wir sagten oben, daß isomorphe Strukturen offenbar elementar-äquivalent sind. Gilt davon die Umkehrung? Im allgemeinen nicht, wie wir in Satz 16.5 zeigen werden. Es gilt jedoch nach A. Tarski, *Contributions to the Theory of Models,* Teil 2, Indagationes Math.16 (1954), pp.582-588:

1.1 Satz (Alfred Tarski, 1954) *Seien* $\mathfrak{M} = \langle M,\dots\rangle$ *und* $\mathfrak{N} = \langle N,\dots\rangle$ *zwei elementar-äquivalente* $\mathcal{L}$*-Strukturen. Wenn* $\mathfrak{M} = \langle M,\dots\rangle$ *endlich ist, dann sind* $\mathfrak{M} = \langle M,\dots\rangle$ *und* $\mathfrak{N} = \langle N,\dots\rangle$ *isomorph.*

Beweis. Sei $M = \{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ für eine natürliche Zahl $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Dann ist in $\mathfrak{M} = \langle M,\dots\rangle$ die folgende Aussage gültig:

$$\mathfrak{M} = \langle M,\dots\rangle \models \exists v_1 \exists v_2 \dots \exists v_n \Big(\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} v_i \neq v_j \;\wedge\; \forall v_0\colon \bigvee_{1\leq i\leq n} v_0 = v_i \Big)$$

Aus $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ folgt, daß die genannte Aussage auch in $\mathfrak{N}$ gilt. Also hat auch N genau n verschiedene Elemente. Wir suchen eine geeignete Aufzählung von $N = \{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ so, daß die Zuordnung $a_i \longmapsto b_i$ (für $1 \leq i \leq n$) ein Isomorphismus ist. Dazu betrachten wir den quantorenfreien Typ von $a_1,a_2,\dots,a_n$ in $\mathfrak{M}$:

$$\mathcal{T} = \{\Phi \in \mathcal{L};\ \mathrm{Fr}(\Phi) \subseteq \{v_1,v_2,\dots,v_n\}\ \&\ \Phi \text{ ist quantorenfrei } \&\ \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1\},$$

wobei h eine Belegung (der Variablen v_i mit Elementen von M) ist, für die $h(v_i) = a_i$ (für $1 \leq i \leq n$) ist (Konstantentheorem!).

Unter der Belegung h sind also alle Formeln aus $\mathcal{T}$ in $\mathfrak{M}$ gültig.

<u>Behauptung</u>: Es gibt auch eine Belegung $g: \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \to N$, unter der alle Formeln aus $\mathcal{T}$ in $\mathfrak{N}$ wahr sind.

Angenommen zu jeder Abbildung $g: \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \to N$ gäbe es wenigstens eine $\mathcal{L}$-Formel Ψ aus $\mathcal{T}$ mit $\mathrm{val}^g_{\mathfrak{N}}(\Psi) = 0$. Dann wählen wir zu jedem derartigen g eine Formel Ψ_g aus $\mathcal{T}$ mit $\mathrm{val}^g_{\mathfrak{N}}(\Psi_g) = 0$. Da N die Mächtigkeit n hat, gibt es nur genau n^n verschiedene Abbildungen von $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in N. Sei Ψ^* die Konjunktion all dieser endlich vielen Formeln Ψ_g. Dann ist Ψ^* unter allen Belegungen $f: \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \to N$ falsch, denn Ψ^* enthält das Konjunktions-Glied Ψ_f, das unter f falsch ist. Aber die Formeln Ψ_g liegen alle in $\mathcal{T}$, und daher liegt auch ihre Konjunktion Ψ^* in $\mathcal{T}$. Also $\mathfrak{M} \models \Psi^*[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, woraus

$$\mathfrak{M} \models \exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_n \Psi^*(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

folgt. Da $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ elementar-äquivalent sind, ist dieser Existenz-Satz auch in $\mathfrak{N}$ gültig. Es gibt also eine Belegung der Variablen v_i mit Elementen von N, unter der $\Psi^*(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ in $\mathfrak{N}$ wahr ist - ein Widerspruch, und die Behauptung ist bewiesen.

Sei jetzt g eine Belegung $g: \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \to N$, unter der alle Formeln aus $\mathcal{T}$ in $\mathfrak{N}$ wahr sind. Setze $b_i = g(v_i)$ (für $1 \leq i \leq n$). Dann ist die Zuordnung $\varphi: a_i \mapsto b_i$ (für $1 \leq i \leq n$) ein Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{N}$, denn

(1.) ist φ ein-eindeutig und surjektiv, weil die Formel

$$v_1 \neq v_2 \wedge v_1 \neq v_3 \wedge v_2 \neq v_3 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \neq v_n$$

in $\mathcal{T}$ liegt und daher auch die b_i paarweise verschieden sind, und

(2.) werden alle funktionalen und alle relationalen Beziehungen von φ übertragen, weil die entsprechenden Formeln in $\mathcal{T}$ liegen. ❑

Definition. (1) Eine Formel Φ wird „*existentielle Formel*" (oder auch Σ_1-Formel) genannt, wenn sie die Form $\exists v_{i_1} \exists v_{i_2} \ldots \exists v_{i_n} \Psi$ hat, wobei Ψ quantorenfrei ist.

(2) Eine Formel Φ wird „*universelle Formel*" (oder auch Π_1-Formel) genannt, wenn sie die Form $\forall v_{i_1} \forall v_{i_2} \ldots \forall v_{i_n} \Psi$ hat, wobei Ψ quantorenfrei ist.

(3) $\mathfrak{M} \equiv_1 \mathfrak{N}$ soll besagen, daß in den $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ dieselben existentiellen (und daher auch dieselben universellen) $\mathcal{L}$-Aussagen gelten.

Bemerkung: Satz 1.1 kann etwas verschärft werden: *Seien* $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ *und* $\mathfrak{N} = \langle N,\ldots\rangle$ *zwei* $\mathcal{L}$*-Strukturen, in denen dieselben existentiellen* $\mathcal{L}$*-Aussagen gelten. Wenn* $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ *endlich ist, dann sind* $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ *und* $\mathfrak{N} = \langle N,\ldots\rangle$ *isomorph.*

In der Tat, wenn M mindestens n Elemente hat, dann kann das mit einem existentiellen Satz (siehe oben) ausgedrückt werden und aus $\mathfrak{M} \equiv_1 \mathfrak{N}$ folgt, daß auch N mindestens n Elemente hat. Wenn N mindestens n+1 Elemente haben sollte, dann würde dieser existenzielle Satz auch in M gelten, und M müßte mindestens n+1 Elemente haben. Es folgt, daß M und N gleich viele Elemente haben. In dem restlichen Beweis von 1.1 wurden nur existentielle Aussagen verwendet. ❑

Elementare Substrukturen

Wir möchten jetzt über „elementare Substrukturen" sprechen und erinnern zunächst an die übliche Definition des Begriffes einer „Substruktur":

Definition. Sei $\mathfrak{M} = \langle M, f_j, R_k, c_i\rangle_{j\in J, k\in K, i\in I}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{L}$ habe die Signatur $\langle\sigma,\tau,I\rangle$. Es sei $J = \mathrm{Dom}(\sigma)$ und $K = \mathrm{Dom}(\tau)$. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, g_j, S_k, d_i\rangle_{j\in J, k\in K, i\in I}$ heißt *Substruktur* von $\mathfrak{M}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(S1) $A \subseteq M$,

(S2) für alle $j \in J$, für alle $a_1,a_2,\ldots,a_{\sigma(j)} \in A$: $g_j(a_1,a_2,\ldots,a_{\sigma(j)}) = f_j(a_1,a_2,\ldots,a_{\sigma(j)})$,

(S3) für alle $k \in K$: $S_k = R_k \cap A^{\tau(j)}$,

(S4) für alle $i \in I$: $c_i = d_i$.

Die Substruktur-Eigenschaft hängt sehr wesentlich von der Signatur ab. $\langle \mathbb{N}, +, \leq\rangle$ ist beispielsweise Substruktur von $\langle \mathbb{R}, +, \leq\rangle$, wenn $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen ist, $\mathbb{R}$ die Mengen aller reellen Zahlen ist und $\leq$ die übliche lineare Ordnung auf diesen Mengen. Aber $\langle \mathbb{N}, \ldots\rangle$ ist keine Substruktur von $\langle \mathbb{R}, +, -, \leq\rangle$, weil die Subtraktion auf $\mathbb{N}$ nicht total erklärt ist.

Elementare Substrukturen. Sei G die Menge aller geraden Zahlen, $G = \{0,2,4,\ldots\}$. Dann ist $\langle G, \leq\rangle$ Substruktur von $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$. Beide Strukturen sind offenbar isomorph und sind daher auch elementar-äquivalent. Aber sie sind in vieler Hinsicht doch sehr verschieden. Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, deren einziges außerlogisches Zeichen das 2-stellige Relations-Zeichen $\dot{\leq}$ ist. Das Element 0 hat in beiden Strukturen dieselben Eigenschaften, die sich in der Sprache $\mathcal{L}$ formulieren lassen. Es hat beispielsweise die Eigenschaft, das kleinste Element zu sein, einen unmittelbaren Nachfolger zu haben, etc. Das Element 2 hat aber in beiden Strukturen verschiedene Eigenschaften. In $\langle G, \leq \rangle$ hat es die Eigenschaft, daß links von ihm nur ein einziges Element liegt (nämlich die 0), aber in $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ hat es die Eigenschaft, daß links von ihm genau zwei verschiedene Elemente (nämlich 0 und 1) liegen.

Von besonderem Interesse sind sicherlich solche Substrukturen $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ einer gegebenen $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$, in denen jedes Element a von A in $\mathfrak{A}$ dieselben Eigenschaften hat wie in $\mathfrak{M}$. Dazu muß man aber auch in der zugrunde liegenden Sprache über das Element a reden können. Nun hat allerdings nicht unbedingt jedes Element von A einen „Namen" in $\mathcal{L}$ (mit anderen Worten: es kann sein, daß es zu $a \in A$ keine Individuen-Konstante $\dot{c}$ in $\mathcal{L}$ gibt, deren Interpretation in $\mathfrak{A}$ gerade a ist). In dem Fall expandieren wir die Sprache durch Hinzunahme neuer Individuen-Konstanten wie folgt:

Definition. Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Wir expandieren $\mathcal{L}$ um neue Individuen-Konstanten,

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L} \sqcup \{\dot{a} \,;\, a \in A\}$$

Dann ist $\mathfrak{A}$ in kanonischer Weise eine $\mathcal{L}(A)$-Struktur, wenn man festsetzt, daß $\dot{a}$ durch a interpretiert wird.

Den folgenden Begriff haben Alfred Tarski und Robert L. Vaught in ihrer Arbeit *„Arithmetical extensions of Relational Systems"*, Compositio Math. 13 (1956/58), pp.81-102, eingeführt:

Definition. Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, und sei $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ eine Substruktur von $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$. Wir nennen $\mathfrak{A}$ eine *elementare Substruktur* von $\mathfrak{M}$ (in Zeichen: $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{M}$), falls für jede $\mathcal{L}(A)$-Aussage Φ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \Phi.$$

Offenbar gilt: $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{M} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M}$. Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel $\langle G, \leq \rangle \subseteq \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ belegt, wo $G = \{2n;\, n \in \mathbb{N}\}$ (siehe oben). Im allgemeinen läßt sich nur die folgende Aussage machen:

(#) Wenn $\mathfrak{A}$ eine Substruktur der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{B}$ ist,
$\mathfrak{A} = \langle A, f_j, R_k, c_i\rangle_{j\in J, k\in K, i\in I}$, $\mathfrak{B} = \langle B, g_j, S_k, d_i\rangle_{j\in J, k\in K, i\in I}$

und $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L} \sqcup \{\dot{a} \; ; \; a\in A\}$, dann gelten in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dieselben *atomaren* $\mathcal{L}(A)$-Aussagen. Dabei sei verabredet, daß die Individuen-Konstante $\dot{a}$ durch das Element a selbst interpretiert wird.

Mehr kann man im allgemeinen nicht sagen, wie das folgende Beispiel zeigt. In der Struktur $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ hat das Element 0 ganz andere Eigenschaften als in der Substruktur $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. In $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ gibt es unterhalb der 0 noch Objekte, aber in $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ist 0 das kleinste Element. Etwas ausführlicher aufgeschrieben:

$$\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \models \exists x : x < 0, \qquad \text{aber:} \qquad \langle \mathbb{N}, \leq \rangle \models \neg \exists x : x < 0 .$$

Es ist geschickt, die sämtlichen Eigenschaften, die ein Element a in einer Struktur $\mathfrak{M}$ hat, zu sammeln und in einer Menge zusammenzufassen. Wir definieren etwas allgemeiner:

Definition. Sei $\mathfrak{M} = \langle M, ...\rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $1 \leq n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, a_2,...,a_n$ Elemente von M. Dann sei

$tp_{\mathfrak{M}}(a_1, a_2,...,a_n) = \{\Phi \in \mathcal{L}; \;\; Fr(\Phi) \subseteq \{v_1, v_2,...,v_n\} \;\&\; \mathfrak{M} \models \Phi[a_1, a_2,...,a_n]\}$

der *Typ* des n-tupels $a_1, a_2,...,a_n$ in $\mathfrak{M}$.

Wir bemerken am Rande, daß dieser Begriff schon sehr alt ist und in der mittelalterlichen Logik „quidditas" (quid-itas, die „Washeit") oder auch „essentia" (das „Wesen") genannt wurde.

<u>1.2 Proposition</u> (Tarski-Vaught, 1956) Sei $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, und sei $\mathfrak{A} = \langle A,\ldots\rangle$ eine Substruktur von $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathfrak{A}$ ist elementare Substruktur von $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{M}$),

(ii) für alle natürlichen Zahlen n und alle $a_1,...,a_n \in A$ gilt:

$tp_{\mathfrak{A}}(a_1, a_2,...,a_n) = tp_{\mathfrak{M}}(a_1, a_2,...,a_n)$,

(iii) für alle natürlichen Zahlen n und alle $a_0,a_1,...,a_n \in A$ gilt:

$\langle \mathfrak{A}, a_0,a_1,...,a_n\rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, a_0,a_1,...,a_n\rangle$,

(iv) $\langle \mathfrak{A}, a\rangle_{a\in A} \equiv \langle \mathfrak{M}, a\rangle_{a\in A}$.

Beweis: Klar nach Definition. ❑

Der folgende Satz findet sich in der Arbeit *„Arithmetical extensions of Relational Systems"*, Compositio Math. 13 (1956/58), pp.81-102, von Alfred Tarski 1952 und Robert L. Vaught. In einer Fußnote (loc.cit., p.82) wird gesagt, daß der Satz zuerst von Tarski im Winter 1952/53 bewiesen wurde.

1.3 Proposition (Kettensatz von Tarski, 1952/53)) *Sei* $\{\mathfrak{M}_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$ *eine Familie von* $\mathcal{L}$*-Strukturen und sei* $\leq$ *eine lineare Ordnung auf der Index-Menge* Γ. *Wir setzen voraus, daß* $\forall\beta,\gamma\in\Gamma(\beta\leq\gamma\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{M}_\beta \preccurlyeq \mathfrak{M}_\gamma)$ *gilt. Dann gilt für alle* $k\in\Gamma$:

$$\mathfrak{M}_k \preccurlyeq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathfrak{M}_\gamma .$$

Beweis. Sei $\mathfrak{M}_\gamma = \langle M_\gamma, \ldots \rangle$. Zunächst ist sagen, daß $\bigcup\{\mathfrak{M}_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$ diejenige $\mathcal{L}$-Struktur ist, deren Individuen-Bereich $\bigcup\{M_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$ ist, und deren ausgezeichnete Funktionen und Relationen gerade die Unionen der entsprechenden Funktionen, bzw. Relationen sind, die in den einzelnen $\mathfrak{M}_\gamma$ ausgezeichnet sind. Die Behauptung von 1.3 kann jetzt durch Induktion über den Formelaufbau leicht bewiesen werden. Für atomare $\mathcal{L}(M_k)$-Aussagen ist das nach der obigen Bemerkung (#) klar. Der Induktions-Schritt ist trivial. ❑

1.4 Satz *Sei* $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ *eine unendliche* $\mathcal{L}$*-Struktur. Dann gibt es für jede Kardinalzahl* κ *mit* $\mathcal{K}ard(M)\leq\kappa$ *und* $\mathcal{K}ard(\mathcal{L})\leq\kappa$ *eine elementare Erweiterung* $\mathfrak{B} = \langle B,\ldots\rangle$ *von* $\mathfrak{M}$ *der Kardinalität* $\mathcal{K}ard(B)\geq\kappa$.

Beweis. Seien $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ und κ gegeben. Wir expandieren $\mathcal{L}$ zunächst, indem wir für jedes Element m von M einen Namen $\dot{m}$ einführen,

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L} \sqcup \{\dot{m};\ m\in M\}.$$

Wir expandieren auch $\mathcal{L}(M)$, indem wir noch zusätzlich κ viele neue Individuenkonstanten $\dot{c}_\alpha$ (für $\alpha\in\kappa$) einführen,

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}(M) \sqcup \{\dot{c}_\alpha;\ \alpha\in\kappa\}.$$

Betrachte die folgende Menge T von $\mathcal{L}^*$-Aussagen:

$T = \{\Phi;\ \Phi$ ist $\mathcal{L}(M)$-Aussage mit $\mathfrak{M} \models \Phi\} \cup \{\dot{c}_\alpha \neq \dot{c}_\beta;\ \alpha \neq \beta \in \kappa\ \&\ \alpha \in \kappa\}$.

Da M unendlich ist, ist $\mathfrak{M}$ ein Modell einer jeden endlichen Teilmenge von T. Nach dem Kompaktheits-Satz von Gödel-Malzew hat ganz T ein Modell $\mathfrak{N}^* = \langle N,\ldots\rangle$. Dabei ist $\mathfrak{N}^* = \langle N,\ldots\rangle$ eine $\mathcal{L}^*$-Struktur. Sei $\mathfrak{N} = \langle N,\ldots\rangle$ die Restriktion von $\mathfrak{N}^* = \langle N,\ldots\rangle$ auf die Sprache $\mathcal{L}$. Aus

$$\mathfrak{N}^* \models \{\Phi;\ \Phi \text{ ist } \mathcal{L}(M)\text{-Aussage mit } \mathfrak{M} \models \Phi\}$$

folgt dann sofort $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$. Aus

$$\mathfrak{N}^* \models \{\dot{c}_\alpha \neq \dot{c}_\beta;\ \alpha \neq \beta \in \kappa\ \&\ \alpha \in \kappa\}$$

folgt noch, daß N mindestens κ paarweise verschiedene Elemente enthalten muß. Also $\mathcal{K}ard(N) \geq \kappa$. ❑

Im Beweis von Satz 1.4 haben wir einen Begriff verwendet, den wir noch oft verwenden werden. Wir wollen ihn deshalb hervorheben.

Definition. Für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ sei $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$ das *quantorenfreie Diagramm* von $\mathfrak{M}$ und $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ die volle $\mathcal{L}(M)$-*Theorie* von $\mathfrak{M}$, d.h.

$$\mathcal{D}(\mathfrak{M}) = \{\Phi;\ \Phi \text{ ist quantorenfreie } \mathcal{L}(M)\text{-Aussage mit } \langle \mathfrak{M}, m\rangle_{m\in M} \models \Phi\},$$

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \{\Phi;\ \Phi \text{ ist } \mathcal{L}\text{-Aussage mit } \mathfrak{M} \models \Phi\},$$

$$\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, m\rangle_{m\in M}) = \{\Phi;\ \Phi \text{ ist } \mathcal{L}(M)\text{-Aussage mit } \langle \mathfrak{M}, m\rangle_{m\in M} \models \Phi\}.$$

Das quantorenfreie Diagramm einer Struktur $\mathfrak{M}$ hatte Anatol Malzew 1941 in die Modelltheorie eingeführt. Einen ähnlichen Begriff hatte Arthur Cayley bereits 1854 eingeführt. Die von Cayley betrachtete *„Gruppentafel"* einer Gruppe G (auch „Cayley-Diagramm" genannt) enthält alle un-negierten atomaren Aussagen, die in G gelten. Würde man auch alle negierten atomaren Aussagen, die in G gelten, hinzufügen und die so vergrößerte Menge unter allen aussagenlogischen Folgerungen abschließen, so würde man das quantorenfreie Diagramm von G erhalten. - Die Bedeutung des quantorenfreien Diagramms einer Struktur hatte auch Abraham Robinson 1954 in seinem Vortrag auf dem Mathematiker-Kongress in Amsterdam hervorgehoben.

Im Beweis von Satz 1.4 hatten wir die Satzmenge

$$T = \mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, m\rangle_{m\in M}) \cup \{\dot{c}_\alpha \neq \dot{c}_\beta;\ \alpha \neq \beta \in \kappa\ \&\ \alpha \in \kappa\}$$

eingeführt und festgestellt, daß jedes Modell von T eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{M}$ der Mächtigkeit $\geq \kappa$ ist. Es gilt etwas mehr:

1.5 **Lemma**. *Sei* $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ *eine* $\mathcal{L}$*-Struktur. Dann gilt:*

(i) *Jedes Modell von* $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$ *enthält eine mit* $\mathfrak{M}$ *isomorphe Substruktur.*

(ii) *Jedes Modell von* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *ist mit* $\mathfrak{M}$ *elementar-äquivalent.*

(iii) *Jedes Modell von* $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, m \rangle_{m \in M})$ *enthält eine mit* $\mathfrak{M}$ *isomorphe elementare Substruktur.*

Beweis. Zu (i): Sei $\mathfrak{N}$ irgendein Modell von $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$. Wenn $\hat{m}$ die Interprtetation der Individuen-Konstante $\dot{m}$ in $\mathfrak{N}$ ist, dann ist $m \mapsto \hat{m}$ (für $m \in M$) die gesuchte isomorphe Einbettung von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$.

Zu (ii): trivial! - Zu (iii): Das folgt ähnlich wie in (i). ❑

Literatur

Alfred Tarski: *Grundzüge des Systemenkalküls. Teil 2.* Fundamenta Mathematicae Band 26 (1936), pp.283-301.

Alfred Tarski: *Arithmetical classes and types of mathematical systems",* Bull. AMS 55 (1949), p.63.

Alfred Tarski: *Contributions to the Theory of Models,* 3 Teile. Indagationes Mathematicae Band 16 (1954), pp.572-581, pp.582-588, und Band 17 (1955), pp.56-64.

Alfred Tarski - Robert L.Vaught: *Arithmetical extensions of Relational Systems",* Compositio Math. 13 (1956/58), pp.81-102.

— * —

Übungsaufgaben zu §1

Für eine Menge T von $\mathcal{L}$-Aussagen sei

$$T_\forall = \{\Phi;\ \Phi \text{ ist universelle } \mathcal{L}\text{-Aussage so, daß } T \models \Phi\}$$

der „universelle Teil" von T und

$$T_\exists = \{\Phi;\ \Phi \text{ ist existentielle } \mathcal{L}\text{-Aussage so, daß } T \models \Phi\}$$

der „existentielle Teil" von T.

(1) Sei $\mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ ein T-Modell. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A}$ ein $T_\forall$ -Modell ist.

(2) Sei $\mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ ein T-Modell. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{B}$ ein $T_\exists$ -Modell ist.

(3) Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ eine Substruktur von $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$. Wir nehmen an, daß es für je endlich viele Elemente $a_1, a_2, \ldots a_n$ aus A und jedes b aus B stets einen Automorphismus φ von $\mathfrak{B}$ gibt, so daß $\varphi(a_1) = a_1$, $\varphi(a_2) = a_2, \ldots, \varphi(a_n) = a_n$, und $\varphi(b) \in A$ gilt. Zeigen Sie, daß dann $\mathfrak{A}$ eine elementare Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist.

(4) Sei $\mathbb{Q}$ die Menge aller rationalen Zahlen und $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen. Zeigen Sie, daß $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ eine elementare Substruktur von $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ ist.

Tip: Verwenden Sie Aufgabe 3.

(5) Sei $\mathbb{Q}$ die Menge aller rationalen Zahlen und $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen. Zeigen Sie, daß der Körper $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ keine elementare Substruktur von $\langle \mathbb{R}, , +, \cdot, 0, 1 \rangle$ ist.

(6) Sei F eine freie Gruppe, die von der unendlichen Menge T frei erzeugt wird, und sei S eine unendliche Teilmenge von T. Zeigen Sie, daß die von S erzeugte (freie) Untergruppe eine elementare Substruktur der Gruppe F ist.

Tip: Verwenden Sie Aufgabe 3.

§2. *Der Satz von Löwenheim-Skolem*

Im Jahre 1914 publizierte Leopold Löwenheim in den Mathematischen Annalen (Band 76, pp.447-470) eine aufsehenerregende Arbeit mit dem Titel *„Über Möglichkeiten im Relativ-Kalkül“*. Was er ‘Relative’ nannte, nennen wir heute ‘$\mathcal{L}$-Strukturen’, ‘Relational-Strukturen’, oder auch ‘Modelle’. Löwenheim bewies den folgenden Satz (dort Satz 2):

> *„Jede Aussage (aus einer quantorenlogischen Sprache der ersten Stufe), die ein überabzählbares Modell besitzt, besitzt auch ein abzählbar-unendliches Modell“.*

Der Löwenheimsche Satz wurde von Thoralf Skolem (*„Logisch-kombinatorische Untersuchungen etc.“*, 1920) verallgemeinert und besagt, daß auch *jede höchstens abzählbare Menge von Aussagen erster Stufe, die überhaupt ein unendliches Modell besitzt, stets auch ein abzählbar-unendliches Modell besitzt“*. Weitere Verallgemeinerungen gaben Alfred Tarski 1934, 1956 und Leon Henkin 1949. Darüber wollen wir hier ausführlich berichten.

Wir beginnen mit der Skolemschen Verallgemeinerung des Löwenheimschen Satzes.

2.1 Satz (Satz von Löwenheim-Skolem) *Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare quantorenlogische Sprache 1. Stufe und sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen. Wenn Σ ein überabzählbares Modell hat, dann hat Σ auch ein abzählbar-unendliches Modell.*

Beweis. Wir expandieren $\mathcal{L}$ um abzählbar-unendlich viele neue Individuenkonstanten $\dot{c}_n$ (für $n \in \mathbb{N}$) und setzen:

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \sqcup \{\dot{c}_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\dot{c}_n \neq \dot{c}_k \;;\; n \neq k\}$. Da Σ ein unendliches Modell $\mathfrak{M}$ hat, ist offenbar auch Σ^* widerspruchsfrei, denn wir können die neuen Individuenkonstanten $\dot{c}_n$ in $\mathfrak{M}$ durch beliebige, paarweise verschiedene Elemente interpretieren.

Da $\mathcal{L}$ abzählbar ist, ist auch $\mathcal{L}^*$ abzählbar. Dann ist aber auch die Henkinisierung $\mathcal{L}^*_H$ abzählbar und mit der Henkin-Methode (siehe Satz 13.7 der Vorlesung „Math. Logik") erhalten wir ein Modell $\mathfrak{A}$ von Σ^*. Nach Konstruktion gilt dabei $\mathcal{K}ard(\mathfrak{A}) \leq \mathcal{K}ard(\mathcal{L}^*_H) = \aleph_0$, wenn $\mathcal{K}ard(X)$ die Kardinalität der Menge X bezeichnet. Wegen $A \models \{\dot{c}_n \neq \dot{c}_k \ ; \ n \neq k\}$ gilt aber auch $\aleph_0 \leq \mathcal{K}ard(\mathfrak{A})$ und daher ist $\mathfrak{A}$ abzählbar-unendlich. ❑

Der Beweis von 2.1 liefert ein abzählbares Modell, das mit dem vorgegebenen überabzählbaren Modell sehr wenig zu tun hat. Das abzählbare Modell ist hier im allgemeinen keine Substruktur des gegebenen überabzählbaren Modells. - Wir werden jetzt einen zweiten Beweis von 2.1 geben, der die Existenz einer abzählbaren elementaren Substruktur sichert. Es gilt sogar sehr viel mehr:

2.2 Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski („Abwärts-Aussage"): *Sei* $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ *eine* $\mathcal{L}$*-Struktur und* A *eine beliebige Teilmenge von* M. *Sei* κ *eine Kardinalzahl mit den Eigenschaften* $\mathcal{K}ard(A) \leq \kappa \leq \mathcal{K}ard(M)$ *und* $\mathcal{K}ard(\mathcal{L}) \leq \kappa$. *Dann besitzt* $\mathfrak{M}$ *eine elementare Substruktur* $\mathfrak{B} = \langle B,\ldots\rangle$ *mit den Eigenschaften* $A \subseteq B$ *und* $\mathcal{K}ard(B) = \kappa$.

Beweis (unter Verwendung des Auswahlaxioms). Da $\mathcal{K}ard(\mathcal{L})$ stets unendlich ist ($\mathcal{L}$ ist die Menge aller $\mathcal{L}$-Formeln), ist auch κ unendlich. Da wir $\kappa \leq \mathcal{K}ard(M)$ voraussetzen, ist also auch M unendlich. Aus dem Auswahlaxiom folgt (nach Ernst Zermelo, 1904) der Wohlordnungs-Satz. Es gibt also auf der Menge M eine lineare Ordnung $\leq$ mit der Eigenschaft, daß jede nicht-leere Teilmenge X von M ein kleinstes Element (bezüglich $\leq$) hat. Sei Min(X) das kleinste Element von X (= das Minimum von X). Wir definieren jetzt eine aufsteigende Folge von Teilmengen $D_n \subseteq M$ ($n \in \mathbb{N}$) wie folgt:

D_0 sei eine beliebige Teilmenge von M mit $A \subseteq D_0$ und $\mathcal{K}ard(D_0) = \kappa$.

Angenommen, es wären $D_0, D_1, \ldots, D_n$ bereits konstruiert, so daß $\mathcal{K}ard(D_n) = \kappa$ und $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots \subseteq D_n \subseteq M$. Dann sei

$$D_{n+1} = \{a \in M;\ \text{es gibt } m \in \mathbb{N},\ 1 \leq m, \text{ und eine } \mathcal{L}\text{-Formel } \Phi \text{ mit } Fr(\Phi) = \{v_0, v_1, \ldots, v_m\} \text{ und es gibt } d_1, d_2, \ldots, d_m \in D_n \text{ mit } a = Min\{b \in M;\ \mathfrak{M} \models \Phi[b, d_1, d_2, \ldots, d_m]\}\}.$$

Für jede Formel $\Phi(v_0, d_1, d_2, \ldots, d_m) \in \mathcal{L}(D_n)$, die in $\mathfrak{M}$ erfüllbar ist, wird also das kleinste erfüllende Element in die Menge D_{n+1} hineingelegt.

1. Behauptung: es gilt $D_n \subseteq D_{n+1}$.

Beweis. Sei $d \in D_n$ beliebig. Dann ist die $\mathcal{L}(D_n)$ - Formel $v_0 = \dot{d}$ in $\mathfrak{M}$ erfüllbar und das einzige erfüllende Element ist d selbst. Definitionsgemäß gilt daher $d \in D_{n+1}$.

2. Behauptung: $\mathcal{Kard}(D_{n+1}) = \kappa$.

Beweis. Nach Induktions-Annahme gilt $\mathcal{Kard}(D_n) = \kappa$ und nach der 1. Behauptung gilt $D_n \subseteq D_{n+1}$. Daraus folgt zunächst $\kappa = \mathcal{Kard}(D_n) \leq \mathcal{Kard}(D_{n+1})$.

Wir müssen noch $\mathcal{Kard}(D_{n+1}) \leq \kappa$ zeigen! Dazu benutzen wir einen Satz der Mengenlehre, der (unter Verwendung des Auswahlaxioms) besagt, daß für jede unendliche Menge S stets $\mathcal{Kard}(S) = \mathcal{Kard}(S \times S)$ und allgemein

(†) $\mathcal{Kard}(S) = \mathcal{Kard}(\bigcup \{ S^k;\ 1 \leq k \in \mathbb{N}\})$

gilt. Nun gilt nach Voraussetzung $\mathcal{Kard}(\mathcal{L}) \leq \kappa$ und nach Induktions-Annahme auch $\mathcal{Kard}(D_n) = \kappa$. Das Alphabet von $\mathcal{L}(D_n)$ hat also genau κ verschiedene Zeichen. $\mathcal{L}(D_n)$ ist die Menge aller Formeln, die man aus dem Alphabet von $\mathcal{L}(D_n)$ bilden kann. Also ist $\mathcal{L}(D_n)$ eine Menge von Folgen endlicher Länge aus einer κ-mächtigen Symbol-Menge. Nach (†) gilt daher auch $\mathcal{Kard}(\mathcal{L}(D_n)) = \kappa$. Jedes Element $a \in D_{n+1}$ hängt von einer $\mathcal{L}(D_n)$-Formel ab. Also gilt $\mathcal{Kard}(D_{n+1}) \leq \mathcal{Kard}(\mathcal{L}(D_n)) = \kappa$. Damit ist auch die umgekehrte Abschätzung bewiesen. Aus beiden Abschätzungen folgt (nach dem Satz von Dedekind-Bernstein der Mengenlehre) die Gleichheit: $\kappa = \mathcal{Kard}(D_n) = \mathcal{Kard}(D_{n+1})$.

Wir setzen jetzt

$$B = \bigcup \{ D_n;\ 0 \leq n \in \mathbb{N}\}.$$

Aus $D_0 \subseteq B$, $\mathcal{Kard}(D_0) = \kappa$ und der 2. Behauptung folgt dann:

$$\kappa = \mathcal{Kard}(D_0) \leq \mathcal{Kard}(B) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Kard}(D_n) = \kappa \cdot \mathcal{Kard}(\mathbb{N}) = \kappa .$$

Also ist auch $\mathcal{Kard}(B) = \kappa$.

3. Behauptung: B ist unter allen Funktionen, die in $\mathfrak{M}$ ausgezeichnet sind, abgeschlossen.

Beweis. Sei $\dot{f}$ ein n-stelliges Funktions-Zeichen von $\mathcal{L}$ und f seine Interpretation in $\mathfrak{M}$. Seien $b_1,\dots,b_n \in B$ beliebig. Da B die Union der Mengen D_n ist, gibt es eine hinreichend große natürliche Zahl z so daß $b_1,\dots,b_n \in D_z$. Da f auf M total definiert ist, gilt

$$\mathfrak{M} \models \exists v_0\colon v_0 = \dot{f}(\dot{b}_1, \dot{b}_2, \dots, \dot{b}_n).$$

Sei etwa $b_0 = f(b_1,\ldots,b_n)$ in $\mathfrak{M}$. Dann ist b_0 eindeutig bestimmt und nach Definition von D_{z+1} gilt $b_0 \in D_{z+1}$. Aus $b_0 \in D_{z+1} \subseteq B$ folgt damit $b_0 = f(b_1,\ldots,b_n) \in B$.

4. Behauptung: B ist die Grundmenge einer Substruktur von $\mathfrak{M}$:

Da B unter allen in $\mathfrak{M}$ ausgezeichneten Funktionen abgeschlossen ist, müssen wir nur noch zeigen, daß B auch alle in $\mathfrak{M}$ ausgezeichneten Individuen-Konstanten enthält. Wenn aber $\dot{c}$ irgendeine Individuen-Konstante von $\mathcal{L}$ ist und c ihre Interpretation in $\mathfrak{M}$ ist, dann ist c das einzige Element, das die $\mathcal{L}$-Formel $v_0 \doteq \dot{c}$ erfüllt und nach Konstruktion liegt es bereits in D_1, also auch in B.

Damit ist die gesuchte Substruktur $\mathfrak{B} = \langle B,\ldots\rangle$ gefunden. Nach Konstruktion gilt $A \subseteq D_0 \subseteq B$ und $\mathcal{K}ard(B) = \kappa$. Wir müssen noch zeigen, daß $\mathfrak{B}$ eine elementare Substruktur von $\mathfrak{M}$ ist.

5. Behauptung: $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{M}$.

Beweis. Nach Konstruktion der Mengen D_{n+1} gilt:

(‡) für jede $\mathcal{L}$-Formel Φ mit $Fr(\Phi) = \{v_0, v_1,\ldots,v_m\}$ und beliebige Elemente $d_1, d_2,\ldots,d_m \in B$ gilt: wenn $\mathfrak{M} \models \exists v_0{:}\ \Phi[v_0, d_1, d_2,\ldots,d_m]$, dann gibt es ein $d \in B$ mit $\mathfrak{M} \models \Phi[d, d_1, d_2,\ldots,d_m]$.

Daraus folgt durch Induktion über den Formelaufbau sofort die Behauptung. ❑

Aus Satz 2.2 können wir die folgende Variante des ursprünglichen Satzes von Löwenheim-Skolem ableiten. Hier darf die zugrundeliegende Sprach $\mathcal{L}$ der 1. Stufe auch überabzählbar sein.

<u>**2.3**</u> <u>**Korollar**</u> *Sei* T *eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und sei $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ ein unendliches Modell von* T. *Wenn $\mathcal{K}ard(T) \leq \mathcal{K}ard(M)$, dann besitzt* T *auch ein Modell $\mathfrak{B} = \langle B,\ldots\rangle$ der Kardinalität $\mathcal{K}ard(B) = \mathrm{Max}\{\aleph_0, \mathcal{K}ard(T)\}$, das eine Substruktur von $\mathfrak{M}$ ist.*

<u>Beweis</u>. Es könnte sein, daß das Alphabet von $\mathcal{L}$ mehr außerlogische Zeichen enthält, als in den Aussagen aus T vorkommen. Wenn das der Fall ist, dann lassen wir diese unnötigen Zeichen fort. T gehört also in jedem Fall einem Fragment $\mathcal{L}^{\#}$ von $\mathcal{L}$ an, wobei

$$\mathcal{K}ard(\mathcal{L}^{\#}) = \mathrm{Max}\{\aleph_0, \mathcal{K}ard(T)\}.$$

Somit ist T eine Menge von $\mathcal{L}^{\#}$-Aussagen. Sei $\mathfrak{M}^{\#} = \langle M,\ldots\rangle$ die Restriktion von $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ auf die Signatur von $\mathcal{L}^{\#}$. Es gilt weiterhin $\mathfrak{M}^{\#} \models T$. Jetzt können wir Satz 2.2 anwenden und erhalten eine $\mathcal{L}^{\#}$-Struktur $\mathfrak{B}^{\#} = \langle B,\ldots\rangle \preccurlyeq \mathfrak{M}^{\#}$ der Mächtigkeit $\mathcal{K}ard(\mathfrak{B}^{\#}) = \mathcal{K}ard(\mathcal{L}^{\#}) = \mathrm{Max}\{\aleph_0, \mathcal{K}ard(T)\}$. Aus $\mathfrak{B}^{\#} \preccurlyeq \mathfrak{M}^{\#}$ folgt noch $\mathfrak{B}^{\#} \models T$. Wir können jetzt $\mathfrak{B}^{\#}$ zu einer $\mathcal{L}$-Struktur expandieren, indem wir für die noch nicht interpretierten außerlogischen Zeichen von $\mathcal{L}$ die Interpretationen in $\mathfrak{M}$ hernehmen und auf B einschränken. Diese Expansion sei $\mathfrak{B} = \langle B,\ldots\rangle$. $\mathfrak{B}$ ist Substruktur von $\mathfrak{M}$. Es gilt weiterhin $\mathfrak{B} \models T$ und damit ist alles bewiesen. ❑

Der „abwärtige“ Löwenheim-Skolem-Tarskische Satz hat das folgende Analogon:

<u>**2.4 Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski**</u> („<u>Aufwärts-Aussage</u>“): *Sei $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots\rangle$ eine unendliche $\mathcal{L}$-Struktur. Dann gibt es für jede Kardinalzahl κ mit $\mathcal{K}ard(M) \leq \kappa$ und $\mathcal{K}ard(\mathcal{L}) \leq \kappa$ eine elementare Erweiterung $\mathfrak{B} = \langle B,\ldots\rangle$ von $\mathfrak{M}$ der Kardinalität $\mathcal{K}ard(B) = \kappa$.*

<u>Beweis</u>. Mit Satz 1.4 erhalten wir zunächst eine elementare Erweiterung $\mathfrak{C} = \langle C,\ldots\rangle$ von $\mathfrak{M}$ der Kardinalität $\mathcal{K}ard(C) \geq \kappa$. Mit dem „abwärts-gerichteten“ Löwenheim-Skolem-Tarskischen Satz 2.2 gibt es dann eine elementare Substruktur $\mathfrak{B} = \langle B,\ldots\rangle \preccurlyeq \mathfrak{C}$ mit $M \subseteq B$ und $\mathcal{K}ard(B) = \kappa$. Aus $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ mit $M \subseteq B$ folgt dann sofort auch $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{B}$. ❑.

Wir beweisen abschließend einen Satz, der als Umkehrung des Kettensatzes von Tarski (Proposition 1.3) angesehen werden kann. Wir verwenden dabei den folgenden Begriff:

Definition. Sei δ eine unendliche Ordinalzahl und $\{\mathfrak{A}_\gamma;\ \gamma \in \delta\}$ eine aufsteigend geordnete Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen, also

$$\forall\alpha\in\delta\ \forall\beta\in\delta\ (\mathfrak{A}_\alpha \text{ ist Substruktur von } \mathfrak{A}_\beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta).$$

Wir nennen eine solche Familie $\{\mathfrak{A}_\gamma;\ \gamma \in \delta\}$ *stetig geordnet,* falls für jede Limesordinalzahl $\lambda \in \delta$ immer $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup\{\mathfrak{A}_\gamma;\ \gamma \in \lambda\}$ gilt.

<u>**Definition**</u> (G. Hessenberg, F. Hausdorff, 1906) Eine Teilmenge A einer partiell-geordneten Menge $\langle M, \leq\rangle$ ist *konfinal* in M, wenn es zu jedem $m \in M$ stets ein $a \in A$ gibt mit $m \leq a$.

Eine Kardinalzahl κ heißt (nach F. Hausdorff) *regulär,* wenn sie keine konfinale Teilmenge X besitzt mit $\mathcal{K}ard(X) < \kappa$.

Wir verwenden aus der Mengenlehre die Tatsache, daß $\aleph_1$ „regulär" ist. Jede abzählbare Menge von Ordinalzahlen X, $X \subseteq \aleph_1$, ist also beschänkt in $\aleph_1$.

<u>2.5</u> Reflexions-Theorem. *Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache der 1. Stufe, $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur der Mächtigkeit $\aleph_1$ und $\{\mathfrak{A}_\gamma;\ \gamma \in \aleph_1\}$ eine aufsteigende stetig geordnete Familie von abzählbar-unendlichen Substrukturen, deren Union ganz $\mathfrak{M}$ ist. Dann existiert zu jedem $\alpha \in \aleph_1$ ein Index $\beta \in \aleph_1$* mit $\alpha < \beta$ und $\mathfrak{A}_\beta \preccurlyeq \mathfrak{M}$.

Beweis. Zu $\mathfrak{A}_\alpha = \langle A_\alpha, \ldots \rangle$ gibt es nach Satz 2.2 eine abzählbare elementare Substruktur $\mathfrak{B}_0 = \langle B_0, \ldots \rangle$ von $\mathfrak{M}$ mit $A_\alpha \subseteq B_0$. Aus $\mathfrak{M} = \bigcup\{\mathfrak{A}_\gamma;\ \gamma \in \aleph_1\}$ und der Abzählbarkeit von B_0 folgt (weil $\aleph_1$ regulär ist), daß B_0 in einer der Strukturen $\mathfrak{A}_\gamma$ enthalten sein muß. Es gibt also eine hinreichend große Zahl γ_0 mit $B_0 \subseteq A_{\gamma_0}$. Wieder nach Satz 2.2 gibt es eine abzählbare elementare Substruktur $\mathfrak{B}_1 = \langle B_1, \ldots \rangle$ mit $A_{\gamma_0} \subseteq B_1$. Wir iterieren dieses Argument und erhalten eine aufsteigende Folge von Substrukturen:

(†) $$\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}_{\gamma_0} \subseteq \mathfrak{B}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{B}_n \subseteq \mathfrak{A}_{\gamma_n} \subseteq \mathfrak{B}_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{M}.$$

Sei jetzt $\gamma_\omega = \bigcup\{\gamma_n;\ n \in \omega\}$. Da $\{\mathfrak{A}_\gamma;\ \gamma \in \aleph_1\}$ stetig geordnet ist, gilt $\mathfrak{A}_{\gamma_\omega} = \bigcup\{\mathfrak{A}_{\gamma_n};\ n \in \omega\}$. Aus (†) ergibt sich dann aber auch $\mathfrak{A}_{\gamma_\omega} = \bigcup\{\mathfrak{B}_n;\ n \in \omega\}$. Aus $\mathfrak{B}_n \preccurlyeq \mathfrak{M}$ (für alle $n \in \omega$) folgt zunächst

$$\mathfrak{B}_0 \preccurlyeq \mathfrak{B}_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \mathfrak{B}_n \preccurlyeq \mathfrak{B}_{n+1} \preccurlyeq \ldots$$

und daraus (nach dem Tarskischen Kettensatz 1.3) sofort $\mathfrak{B}_n \preccurlyeq \bigcup\{\mathfrak{B}_k;\ k \in \omega\}$ (für alle $n \in \omega$), also auch $\bigcup\{\mathfrak{B}_k;\ k \in \omega\} \preccurlyeq \mathfrak{M}$, und daher $\mathfrak{A}_{\gamma_\omega} \preccurlyeq \mathfrak{M}$. ❑

Wir haben 2.5 als „Reflexions-Theorem" bezeichnet, weil es besagt, daß es in dem Turm $\{\mathfrak{A}_\gamma;\ \gamma \in \aleph_1\}$ stets Substrukturen $\mathfrak{A}_\beta$ gibt, in denen sich die Eigenschaften von $\mathfrak{M}$ spiegeln [reflectere (lat.) heißt „umdrehen, zurückwerfen, widerspiegeln"].

Eine Folge von $\mathcal{L}$-Strukturen $\{\mathfrak{A}_\gamma;\ \gamma \in \delta\}$, wo δ eine Ordinalzahl ist, nennen wir einen *elementaren Turm,* falls $\forall\alpha\in\delta\ \forall\beta\in\delta\ (\mathfrak{A}_\alpha \preccurlyeq \mathfrak{A}_\beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta)$.

2.6 Korollar. *Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache der 1. Stufe, $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur der Mächtigkeit $\aleph_1$ und $\{\mathfrak{A}_\gamma; \gamma \in \aleph_1\}$ eine aufsteigende, stetig geordnete Familie von abzählbar-unendlichen Substrukturen, deren Union ganz $\mathfrak{M}$ ist. Dann existiert eine konfinale Teilmenge D von $\aleph_1$ so daß $\{\mathfrak{A}_\gamma; \gamma \in D\}$ ein elementarer Turm ist, dessen Union $\mathfrak{M}$ ist.* ❑

Bemerkung. Die Sätze 2.5 und 2.6 gelten nicht nur für $\aleph_1$, sondern in analoger Form auch für alle anderen überabzählbaren regulären Kardinalzahlen.

Literatur

Leopold Löwenheim: *Über Möglichkeiten im Relativkalkül.* Math. Annalen 76 (1914/15), pp.447-470.

Thoralf Skolem: *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen,* Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiana, I (Math.-Nat. Klasse, Nr.4), 1920).

Übungsaufgaben zu §2

(1) Zeigen Sie, daß es unter den Gruppen, die mit der symmetrischen Gruppe Sym(IN) (das ist die Gruppe aller Permutationen der natürlichen Zahlen) elementar äquivalent sind, stets auch solche gibt, die keine symmetrischen Gruppen sind.

Tip: Verwenden Sie Satz 2.1 oder 2.2.

(2) Für eine unendliche Menge M sei

$$\mathrm{Sym}_\omega(M) = \{\pi \in \mathrm{Sym}(M); \mathrm{Supp}(\pi) \text{ ist endlich}\}$$

die Gruppe der finitären Permutationen, wobei $\mathrm{Supp}(\pi) = \{ x \in M; \pi(x) \neq x\}$ der Support (Träger) von π ist. Zeigen Sie, daß die Gruppen $\mathrm{Sym}_\omega(\aleph_0)$ und $\mathrm{Sym}_\omega(\aleph_1)$ elementar-äquivalent sind.

Tip: Verwenden Sie Satz 2.5.