KAPITEL II:

Quantoren-Logik

Partikel, welche Angaben über Anzahlen von Individuen, die irgendeine Eigenschaft haben, machen, werden *Quantifikatoren* (oder kurz: *Quantoren*) genannt. Die bekanntesten Quantoren sind *'für alle'* und *'für einige'* ($\forall, \exists$). Wir werden die Junktoren-Logik um diese beiden Quantoren erweitern und uns die Aufgabe stellen, alle logisch allgemeingültigen Aussagen der erweiterten Sprache herauszufinden. Danach wenden wir uns dem Begriff des Beweises zu.

Die Logik, die von den Eigenschaften (Attributen, Prädikaten) handelt und den Angaben darüber, auf wieviele Individuen sie zutreffen, wird *'Quantoren-Logik'* oder auch *'Prädikaten-Logik'* (der ersten Stufe) genannt.

Man spricht hier (seit Leopold Löwenheim, 1915) von einer Logik „der ersten Stufe", weil die verwendeten Quantoren nur Angaben machen über die Anzahlen von Individuen (Elementen) eines Objektbereiches. Erst in einer Logik der „zweiten Stufe" darf auch über die Teilmengen eines Objektbereiches quantifiziert werden. In einer Logik der dritten Stufe darf zusätzlich auch über Familien von Teilmengen eines Objektbereiches quantifiziert werden, und so fort.

Wir folgen der Tradition und entwickeln die Quantoren-Logik auf der Grundlage des *Wahrheits-Begriffes* (bzw. des Begriffes der *Gültigkeit* einer Aussage in einem Modell). Bei diesem Zugang bleibt der Folgerungs-Begriff zunächst unanalysiert, denn man sagt lediglich, daß eine Aussage Φ aus einer Menge Σ von Prämissen 'folgt', wenn jedes Modell von Σ auch ein Modell von Φ ist. Wir stellen daher (in §12) auch einen Kalkül auf, der es gestattet, aus vorgegebenen Prämissen-Mengen Σ schrittweise neue Aussagen 'herzuleiten'. Wir werden in §12 zeigen, daß in unserem Kalkül nur solche Aussagen hergeleitet werden können, die auch Folgerungen (aus der vorgegebenen Prämissenmenge Σ) sind, und in §§ 13-14, daß man in dem Kalkül jede Aussage, die aus den Prämissen folgt, auch herleiten (d.h. schrittweise gewinnen) kann. Der Begriff der Herleitbarkeit im Kalkül ist also äquivalent zum Folgerungsbegriff. Eine derartige Äquivalenzaussage wurde zuerst von Kurt Gödel 1929 bewiesen.

§8. *Formale Sprachen*

Einleitung. Es gibt viele logisch korrekte Schlußweisen, die nicht auf der Grundlage der Junktoren-Logik verifizierbar sind, zum Beispiel (nach Sextus Empiricus, Pyrrhonische Hypotyposen II, 195-196):

> Jeder Mensch ist ein Lebewesen (πᾶς ἄνθρωπος ζῷον);
> Sokrates ist ein Mensch;
> Also ist Sokrates ein Lebewesen.

Für die Gültigkeit dieses Schlusses ist die innere quantorenlogische Struktur der ersten Aussage maßgeblich. Als Quantoren bezeichnet man dabei die Partikel, die Aussagen über Anzahlen (Quantitäten) von Individuen machen, wie z.B. „jeder (jede, jedes)", „unendlich viele", „einige", „kein". Unser Beispiel illustriert den Schluß, den man in der Scholastik

> **Dictum de omni:** *Quicquid de omni valet, valet etiam de quibusdam et singulis* (Was von jedem gilt, das gilt auch von einigen und von einzelnen)

genannt hat. Ein ähnlicher Schluß ist das

> **Dictum de nullo:** *Quicquid de nullo valet, nec de quibusdam nec de singulis valet* (Was von keinem gilt, das gilt auch weder von einigen noch von einzelnen).

[Die beiden Schlußweisen stehen schon bei Aristoteles im 1. Buch der Analytica priora, I,24b26-30]

Um die Universalität einer Aussage auszudrücken, benutzt man auch das Wörtchen „alle". Man sagt beispielsweise „Alle Menschen sind Lebewesen". Hier wird das Wörtchen „alle" *distributiv* verwendet („alle einzelnen Menschen", d.h. „jeder Mensch"). Der umgangssprachliche Gebrauch des Wörtchens 'alle' ist aber auch häufig *kollektiv* („alle Dinge insgesamt"), etwa in den folgenden Sätzen aus dem Grundgesetz, Artikel 3:

> *„Alle Menschen sind vor dem Gesetz gleich",*

und Artikel 27:

> *„Alle deutschen Kauffahrteischiffe bilden eine einheitliche Handelsflotte".*

Wenn man den Unterschied zwischen dem distributiven und dem kollektiven Gebrauch nicht beachtet, entstehen leicht Fehler im logischen Schließen. Ein hübsches Beispiel findet man in W. Stanley Jevons 'Elementary lessons in Logic' (London, 1870, dort example 46, Seite 318) :

Alle Werke Shakespeares kann man nicht an einem Tag durchlesen. 'Hamlet' ist ein Werk von Shakespeare. Also kann man den 'Hamlet' nicht an einem Tag durchlesen.

Das Wort 'alle' wird hier nicht distributiv, sondern kollektiv verwendet, nicht im Sinne von 'omnes', sondern von 'cuncti'. Man sollte von „Sämtlichen Werken" und nicht von „allen Werken" sprechen. Dann wird deutlicher, daß gar kein universelles Urteil vorliegt (vergl. Bolzano, Wissenschaftslehre Band 2, Sulzbach 1837, §135, pp.39-40).

Verwechslungen sind aber auch bei anderen Quantoren möglich. So drückt das Wörtchen „ein" nicht immer Einzahligkeit aus, sondern oft genug auch Universalität. In dem Satz

„E i n verfolgter Fuchs rettete sich auf eine Mauer ..."

(G.E.Lessing, Fabel 23)

ist von einem einzelnen Fuchs die Rede, aber in

„E i n Fuchs riecht den andern" (Fr. Schiller, Fiesco)

wird etwas über alle Füchse (=Jesuiten) gesagt. Ich möchte noch ein zweites Beispiel geben. In dem Gedicht (von Goethe)

„E i n Veilchen auf der Wiese stand ..."

ist von einem einzelnen Veilchen die Rede, aber in dem Satz

„E i n Veilchen ist blau"

ist gemeint, daß alle Veilchen (in der Regel) blau sind [es handelt sich hier - wie auch in vielen ähnlichen Beispielen - um den »generischen Quantor«, der dem generischen Objekt eine Eigenschaft zuspricht ('Generische Objekte' sind die typischen, durch keine Zusatz-Eigenschaften ausgezeichneten Objekte eines genus.)]. In der Mathematik findet man ähnliche Beispiele, etwa wenn man sagt, daß nur

„e i n e Primzahl gerade ist",

womit die Zahl 2 gemeint ist, und wenn man sagt, daß

„e i n e Primzahl keine echten Teiler hat,"

womit eine universell gültige Aussage gemeint ist. Man spricht hier über „die generische Primzahl" (gibt es die überhaupt?) und meint damit „alle Primzahlen".

<u>Zusammenfassung</u>: In Sätzen, die grammatikalisch gleich gebaut sind, kann das Wörtchen 'ein' sehr verschiedene Bedeutungen haben. Ob Einzahligkeit oder Universalität gemeint ist, kann oft nur aus dem Inhalt der Aussage erschlossen werden.

Damit ist deutlich geworden, daß die Umgangssprache nicht so strukturiert ist, daß sie ohne weiteres in der Formalen Logik verwendet werden kann. Zu dieser

Einschätzung waren wir ja auch schon im Kapitel über die Junktoren-Logik gekommen.

Um Eindeutigkeit im sprachlichen Ausdruck zu erreichen, werden wir Fragmente der Umgangssprache aussondern und für diese Fragmente festlegen, in welchem Sinne wir die logischen Partikel (nicht, und, oder, wenn-dann, für alle, es gibt, ist gleich,...) verstehen wollen. Diese Fragmente werden wir mit Symbolen anreichern, um sie so der mathematischen Betrachtung leichter zugänglich zu machen. Die so entstandenen stark formalisierten Fragmente der Umgangssprache bezeichnen wir im Folgenden als „formale Sprachen". Wir geben jetzt eine genaue Beschreibung solcher formalen Sprachen.

Über die Ausdrucks-Stärke einer formalen Sprache

Wie reich soll eine formale Sprache sein? Sie soll sicherlich hinreichend viele Junktoren enthalten, etwa $\neg$ (nicht), $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\rightarrow$ (impliziert), etc., aber auch einige Zeichen für Quantoren. Für den All-Quantor benutzen wir das suggestive Zeichen $\forall$, und für den Existenz-Quantor das ebenso suggestive Zeichen $\exists$. Das Zeichen $\forall$ hatte Gerhard Gentzen 1934 vorgeschlagen in Analogie zum Zeichen $\exists$, das bereits Guiseppe Peano 1896 eingeführt hatte [siehe dazu: G. Peano: „Studii di Logica Matematica" (1896), Nachdruck in Band II der Opere Scelte (Rom 1958), pp.201-217, und „Formules de Logique Mathématique" (1900), Opere Scelte II, pp.304-361. Dort schreibt er (p. 347): „$\exists$a signifie »il y a des a, les a existent«"].

Da wir die Quantoren-Logik nur im Hinblick auf die Mathematik entwickeln wollen, reicht es aus, Sprachen zu betrachten, in denen mathematische Theorien dargestellt werden können. Was braucht man dazu?

Beispiele.

(1) Wenn man *Mengenlehre* betreiben will, dann braucht man eine Sprache, in der die Elementschafts-Relation, die Inklusions-Relation, aber auch die Bildung der Potenzmenge einer Menge, des Durchschnitts zweier Mengen, etc. ausgedrückt werden können. Man möchte auch Namen für einzelne, spezielle Mengen haben, etwa einen Namen für die 'leere Menge', einen Namen für die 'Menge aller natürlichen Zahlen', etc. Wie üblich baut man eine Sprache der Mengenlehre auf, deren Alphabet die bekannten Symbole $\in$, $\subseteq$, P, $\cap$, $\varnothing$, $\mathbb{N}$ enthält. Dabei sind $\in$ und $\subseteq$ 2-stellige Relations-Zeichen, P ein 1-stelliges Operations-Zeichen, $\cap$ eine 2-stelliges Operations-Zeichen und $\varnothing$, $\mathbb{N}$ Namen für einzelne Objekte.

(2) Wenn man *Gruppentheorie* betreiben will, dann braucht man eine Sprache, in der ein 2-stelliges Verknüpfungs-Zeichen für die Multiplikation (oder Addition) vorhanden ist, das wie üblich durch einen Punkt $\bullet$ (oder ein Kreuz +) wiedergegeben wird. In einer solchen Sprache kann man die Axiome der Theorie der Gruppen T_G bequem aufschreiben:

$$T_G \quad \begin{cases} \forall x \forall y \forall z\big((x\bullet y)\bullet z = x\bullet (y\bullet z)\big) \\ \\ \forall x \forall y \exists v \exists w (x\bullet v = y \ \wedge \ w\bullet x = y) \end{cases}$$

Aus beiden Axiomen leitet man wie üblich die Existenz genau eines neutralen Elementes für die Multiplikation und die Existenz von Inversen ab. Manchmal ist es bequemer, den Gruppenbegriff in einer etwas reicheren Sprache zu formulieren. Hier wählt man eine Sprache, die neben den logischen Zeichen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, =, \ldots$, Variablen $u, v, w, x, y, z, \ldots$ und Klammern auch noch einen Namen e für das Eins-Element (d.h. das neutrale Element der Multiplikation), ein 1-stelliges Operations-Zeichen $^{-1}$ (zur Inversen-Bildung) und das 2-stellige Verknüpfungs-Zeichen $\bullet$ (für die Multiplikation in der Gruppe) hat. In dieser Sprache kann man die Axiome der Theorie der Gruppen wie folgt aufschreiben:

$$T^*_G \quad \begin{cases} \forall x \forall y \forall z\big((x\bullet y)\bullet z=x\bullet(y\bullet z)\big) \\ \forall x\colon x\bullet(x^{-1})=(x^{-1})\bullet x=e, \\ \forall x \forall y (x\bullet e=e\bullet x=x) \end{cases}$$

In anderen mathematischen Theorien - und genauso auch in anderen Wissenschaftssprachen (Physik, Chemie etc.) - wird man neben den logischen Zeichen andere Grundzeichen benötigen. Diese Beispiele legen insgesamt das folgende Vorgehen nahe.

Eine formale Sprache $\mathcal{L}$ sollte neben den logischen Zeichen $\neg, \rightarrow, \forall, \ldots$, dem Gleichheits-Zeichen = und Klammern (,) im allgemeinen noch

- Zeichen für mehrstellige Funktionen (Operationen, Verknüpfungen),
- Zeichen für mehrstellige Relationen, und
- Namen für einzelne ausgezeichnete Objekte

enthalten ($\mathcal{L}$ steht für 'lingua'= Sprache). Den Begriff einer formalen Sprache führen wir daher wie folgt ein.

Definition einer formalen Sprache $\mathcal{L}$

Es seien I, J und K paarweise disjunkte Mengen und

$$\sigma : J \rightarrow \{1,2,3,\ldots\}$$

und

$$\tau : K \rightarrow \{1,2,3,\ldots\}$$

Abbildungen von J, bzw. von K in die Menge der natürlichen Zahlen ≥ 1. Wir definieren $\mathcal{L}$ in Abhängigkeit von I, J, K, σ und τ.

Das **Alphabet** von $\mathcal{L}$ enthält die folgenden Zeichen:

(1) logische Zeichen: $\neg, \rightarrow, \forall, =$,

(2) für jedes $i \in I$ eine Individuen-Konstante $\dot{c}_i$,

(3) für jedes $j \in J$ ein Funktionszeichen $\dot{f}_j$ der Stellenzahl $\sigma(j)$,

(4) für jedes $k \in K$ ein Relations-Zeichen $\dot{R}_k$ der Stellenzahl $\tau(k)$,

(5) für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ eine Individuen-Variable v_n,

(6) Klammern: eine aufgehende '(' und eine zugehende Klammer ')'.

Aus diesem Zeichenvorrat werden die Ausdrücke der Sprache $\mathcal{L}$ gebildet. Wir unterscheiden dabei zwischen Termen und Formeln. Zuerst geben wir einen Kalkül an, mit dessen Hilfe wir Terme bilden können.

Der Term-Kalkül:

Regel 1: Es ist erlaubt, jede einzelne Variable v_n hinzuschreiben.

Regel 2: Es ist erlaubt, jede einzelne Individuenkonstante $\dot{c}_i$ hinzuschreiben.

Regel 3: Wenn $j \in J$, $n = \sigma(j)$ und wenn es erlaubt ist, t_1 und auch t_2 und ... und auch t_n hinzuschreiben, dann darf man auch $\dot{f}_j(t_1\, t_2 \ldots t_n)$ hinschreiben.

Definition. Die und nur die Zeichenreihen, die man nach endlich vielen Schritten aufgrund der Regeln des Term-Kalküls hinschreiben darf, heißen *Terme* von $\mathcal{L}$.

Wir hätten in Regel 3 oben einfacher $\dot{f}_j t_1\, t_2 \ldots t_n$ hinschreiben können. Die eindeutige Lesbarkeit wäre auch so gewahrt geblieben. Die Verwendung von Klammern ist aber alter Brauch in der Mathematik. Wir werden uns oft die Freiheit nehmen und (wie sonst üblich) zwischen die Argumente Kommata setzen. Wir werden also oft $\dot{f}_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ schreiben, wobei aber die Kommata grundsätzlich weggedacht werden sollten.

Der **Formel-Kalkül.**

Regel 1. Wenn t_1 und t_2 Terme sind, dann darf man $t_1 = t_2$ hinschreiben.

Regel 2: Wenn $k \in K$, $m = \tau(k)$ und wenn t_1 und auch t_2 und ... und auch t_m Terme sind, dann darf man auch $\dot{R}_k(t_1\, t_2 \ldots t_m)$ hinschreiben.

Regel 3: Wenn man sowohl Φ als auch Ψ hinschreiben darf, dann darf man auch $(\neg\Phi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ und $\forall v_n \Phi$ hinschreiben.

Definition. Die und nur die Zeichenreihen, die man nach endlich vielen Schritten aufgrund der Regeln des Formel-Kalküls hinschreiben darf, heißen *Formeln* von $\mathcal{L}$.

Wie im Falle von Funktionen werden wir aus Gewohnheit und Bequemlichkeit auch bei Relationen die Argumente durch Kommata trennen. Statt $\dot{R}_k(t_1\, t_2 \ldots t_m)$ werden wir also $\dot{R}_k(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ schreiben, wobei aber die Kommata grundsätzlich weggedacht werden sollten.
Statt $\forall v_n \Phi$ werden wir oft auch $\forall v_n \colon \Phi$ schreiben, wenn damit die Formel insgesamt leichter lesbar wird.

Definition. Die Formeln, die man aufgrund der Regeln 1 und 2 des Formel-Kalküls hinschreiben darf, heißen *atomare Formeln*.

Die Sprache $\mathcal{L}$ wurde in Abhängigkeit der Index-Mengen J, K, I und der beiden Stellenzahl-Funktionen σ und τ definiert. Dabei ist J der Definitionsbereich (auch 'Domäne' genannt) von σ, $J = \mathrm{Dom}(\sigma)$, und K der Definitionsbereich von τ, $K = \mathrm{Dom}(\tau)$. Also hängt $\mathcal{L}$ nur von den drei Parametern I, σ und τ ab. Wir nennen das geordnete Tripel $\langle \sigma, \tau, I \rangle$ die *Signatur* von $\mathcal{L}$.
Wenn die Mengen I, J und K endlich oder abzählbar-unendlich sind, dann ist auch die Menge aller $\mathcal{L}$-Formeln abzählbar. Die Mengen I, J und K dürfen aber auch überabzählbar sein und dann ist auch die Menge aller $\mathcal{L}$-Formeln überabzählbar.
Wir werden in den folgenden Abschnitten nicht nur Sachverhalte <u>in</u> der Sprache $\mathcal{L}$ ausdrücken, sondern auch <u>über</u> die Sprache $\mathcal{L}$ sprechen. Das Sprechen über $\mathcal{L}$ vollzieht sich in der Umgangssprache. Um beide Sprachen auseinander zu haslten, bezeichnen wir $\mathcal{L}$ als *Objekt-Sprache* und die Umgangssprache die *Meta-Sprache*. In der Meta-Sprache benutzen wir die Zeichen & für die Konjunktion, $\Rightarrow$ für die Implikation und $\Leftrightarrow$ für die Biimplikation (Äquivalenz).

Bemerkungen zu den Begriffen 'Term', 'Formel' und 'Quantor':

(1) Term: Ein Symbol oder ein Zeichen (oder eine Folge von Symbolen), das zur Bezeichnung eines Objektes dient, wird *Term* genannt. Die Bezeichnung spielt an das lateinische Wort 'terminus', bzw. an das griechische Wort τέρμα (Grenzstein, Grenzlinie, Endpunkt) an. Im Unterschied zum Wort *'finis'* (= das Ende, die (natürliche) Grenze) ist *'terminus'* im ursprünglichen Wortsinne ein Markierungszeichen für einen Grenzpunkt, eine Grenzlinie, eine Ziel-Linie, einen Zeitpunkt, einen Endpunkt etc., also das Zeichen, für eine festgelegte Grenze, einen festgelegten Zeitpunkt (='Termin') etc. Diese Bedeutung des Wortes führte auch dazu, daß ein sprachlicher Ausdruck, der eine *»festgelegte Bezeichnung«* wiedergibt, als *terminus* (oder auch *terminus technicus* einer Fachsprache) bezeichnet wird. Dieser Sprachgebrauch führte zu dem Begriff 'Term', der hier erläutert werden sollte.

(2) Formel: Ein kurzgefaßter Ausdruck, in dem ein Sachverhalt deutlich wiedergegeben wird, wird *Formel* genannt. Das Wort kommt aus dem Lateinischen. *Forma* ist „die Gestalt, die Figur, das Gebilde" und der Deminuitiv *formula* ist „die Regel, das Verfahren, die Vorschrift". Formāre heißt „einen Stoff gestalten, einrichten, bearbeiten".

(3) Quantor: Aus dem Adjektiv-Pronomen »quantus« (wie groß?, wie viel?) und dem Verb »facere« (machen, nachweisen,...) läßt sich das neulateinische Verb »quantificare« bilden. Bei der Zusammenziehung verliert die erste Silbe des Wortes »facere« die Betonung und die übliche Vokalabschwächung ersetzt das 'a' durch ein 'i'. Das Verb »quantificare« hat die Bedeutung von 'Anzahlen nachweisen', ähnlich wie das Verb »qualificare« 'Eigenschaften nachweisen' bedeutet. „Quantifikation" ist dann der Nachweis einer Anzahl und „Quantifikator" ist derjenige, der die Anzahl nachweist. All diese Wortbildungen gehören nicht zum klassischen Latein. Charles Sanders Peirce (1839-1914) hat sie um 1885 herum gebildet und die englische Übersetzung „quantifier" eingeführt. Im Deutschen sagt man „Quantifikator". Aber es gibt auch die etwas verwegene Abkürzung „Quantor", die 1934 von David Hilbert (1862-1943) und Paul Bernays (1888-1977) vorgeschlagen wurde. Da sich das Wort „Quantor" jedoch sehr gut zum Wort „Junktor" gesellt, ist es überall akzeptiert worden.

— * —

Man kann jetzt die Länge eines Terms und die Länge einer $\mathcal{L}$-Formel als die Anzahl der Stellen, an denen Zeichen des Alphabets stehen, einführen. Wie in §2 folgt dann die e i n d e u t i g e L e s b a r k e i t der Terme und Formeln. Wir übernehmen die Konventionen zur Klammer-Ersparnis aus §2.

Gelegentlich werden wir über die Teilformeln einer $\mathcal{L}$-Formel Φ reden müssen. Darunter verstehen wir all diejenigen $\mathcal{L}$-Formeln, die man der Reihe nach braucht, um Φ gemäß den Regeln 1,2,3 des Formel-Kalküls hinschreiben zu dürfen. So ist beispielsweise $\forall v_2\Psi$ eine Teilformel von $\forall v_1\forall v_2\Psi$, aber $\forall v_1\Psi$ ist keine Teilformel von $\forall v_1\forall v_2\Psi$. Die genaue Definition lautet wie folgt:

Definition. Für ein $\mathcal{L}$-Formel Φ sei Teil(Φ) die Menge aller Teilformeln von Φ. Dieser Begriff ist wie folgt auf rekursive Weise definiert:

(i) Für atomare Formeln Φ ist $\mathrm{Teil}(\Phi) = \{\Phi\}$,

(ii) $\mathrm{Teil}(\neg\Phi) = \{\neg\Phi\} \cup \mathrm{Teil}(\Phi)$,

(iii) $\mathrm{Teil}(\Phi \rightarrow \Psi) = \{\Phi \rightarrow \Psi\} \cup \mathrm{Teil}(\Phi) \cup \mathrm{Teil}(\Psi)$,

(iv) $\mathrm{Teil}(\forall v_n \Phi) = \{\forall v_n \Phi\} \cup \mathrm{Teil}(\Phi)$.

Von zentraler Bedeutung ist die Unterscheidung von *freien* Variablen und *gebundenen* Variablen einer $\mathcal{L}$-Formel (diese Bezeichnungen wurden von Hilbert-Ackermann, 1928, eingeführt). Wenn Q irgendein Quantor, v eine Variable und E irgendeine Eigenschaft ist, dann wird in dem Ausdruck Qv:E über die Anzahl der Objekte v, die die Eigenschaft E haben, eine Festlegung getroffen und die Variable v ist nicht mehr frei (für andere Festlegungen), sondern (an die getroffene Festlegung) „gebunden".
In einer Formel $\forall v_n \Phi$ wird Φ der *Wirkungsbereich* (σκοπή, lat. scopa) des Quantors $\forall v_n$ genannt [σκοπή ist der „Gesichtskreis, der Spielraum, die Umschau"].

Definition. Für einen Term t sei Fr(t) die Menge aller in t vorkommenden Variablen. Man kann diesen Begriff auch wie folgt durch Rekursion definieren:

(i) für $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Fr}(v_n) = \{v_n\}$,

(ii) für $i \in I$: $\mathrm{Fr}(\dot{c}_i) = \varnothing$,

(iii) für $j \in J$: $\mathrm{Fr}(\dot{f}_j(t_1, t_2, \ldots, t_{\sigma(j)})) = \mathrm{Fr}(t_1) \cup \mathrm{Fr}(t_2) \cup \ldots \cup \mathrm{Fr}(t_{\sigma(j)})$.

Definition. Für eine $\mathcal{L}$-Formel Φ sei Fr(Φ) die Menge aller in Φ vorkommenden *freien Variablen*. Dieser Begriff wird wie folgt durch Rekursion definiert:

(i) $\mathrm{Fr}(t_1 = t_2) = \mathrm{Fr}(t_1) \cup \mathrm{Fr}(t_2)$,

(ii) $\mathrm{Fr}(\dot{R}_k(t_1, t_2, \ldots, t_{\tau(k)})) = \mathrm{Fr}(t_1) \cup \mathrm{Fr}(t_2) \cup \ldots \cup \mathrm{Fr}(t_{\tau(k)})$,

(iii) $\mathrm{Fr}((\neg\Phi)) = \mathrm{Fr}(\Phi)$,

(iv) $\mathrm{Fr}((\Phi \rightarrow \Psi)) = \mathrm{Fr}(\Phi) \cup \mathrm{Fr}(\Psi)$,

(v) $\mathrm{Fr}(\forall v_n \Phi) = \mathrm{Fr}(\Phi) - \{v_n\}$.

Konvention. Wenn Φ eine $\mathcal{L}$-Formel ist und $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_k}$ Variable sind, dann soll die Schreibweise $\Phi(v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_k})$ besagen, daß die angegebenen Variablen $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_k}$ alle in Φ *frei* vorkommen! Die angegebenen Variablen müssen nicht die sämtlichen freien Variablen von Φ sein und die angegebene Reihenfolge muß nicht die Reihenfolge sein, in der sie beim Lesen von Φ von links nach rechts als Zeichenreihe der Reihe nach auftreten.

Definition. Ein Term t ist ein *konstanter Term,* falls $\mathrm{Fr}(t) = \emptyset$ ist. Die Terme, die nicht konstant sind, nennen wir *offene Terme*.

Eine $\mathcal{L}$-Formel Φ wird *Aussage* genannt, falls $\mathrm{Fr}(\Phi) = \emptyset$ ist. Formeln, die keine Aussagen sind, nennen wir *offene Formeln* oder auch *Eigenschaften* (oder *Prädikate*).

Beispielsweise sind $\dot{c}_i$ und auch $\dot{f}_1(\dot{c}_i, \dot{f}_2(\dot{c}_j))$ konstante Terme. Dagegen sind v_n und auch $\dot{f}_1(\dot{c}_i, v_n)$ offene Terme. $\forall v_0 \forall v_1 \colon v_0 = v_1$ ist eine Aussage, aber $\forall v_1 \colon v_0 = v_1$ ist eine offene Formel.

In §8 haben wir die Syntax der formalen quantorenlogischen Sprachen $\mathcal{L}$ entwickelt. Über die Semantik von $\mathcal{L}$ sprechen wir im folgenden §9.

Historische Bemerkung. Der hier entwickelte Formalismus scheint so natürlich zu sein, daß man meinen könnte, daß er schon immer so (oder in ähnlicher Form) in der Logik und der Mathematik verwendet worden sei. Aber das ist nicht der Fall. Der Formalismus geht auf Gottlob Frege (1848-1925) zurück. In seiner „Begriffsschrift" (Halle a/S. 1879) betont Frege, daß er nicht die hergebrachte Zergliederung eines Satzes in *Subjekt* und *Prädikat* zugrundelegen will, sondern stattdessen die Zergliederung in Bezug auf *Argument* und *Funktion* verwenden will (cf. Begriffsschrift, Vorwort, Seite XIII). Erst dieser Standpunkt erlaubte die Einführung von Quantoren.

Die Syllogistik von Aristoteles ist historisch gesehen der einzige Vorläufer der Quantorenlogik. Hier handelt es sich um Aussagen, in denen einige oder alle Objekte einer Art (eines genus) in Beziehung zu den Objekten einer anderen Art gesetzt werden. Ein Beispiel mag das erläutern:

DARII: wenn alle B's A's sind und einige C's B's sind, dann sind einige C's auch zugleich A's.

Wenn die Gattung der A's mit $\mathcal{A}$, die Gattung der B's mit $\mathcal{B}$ und die Gattung der C's mit $\mathcal{C}$ bezeichnet wird, dann besagt der obige Syllogismus:

$$\text{wenn } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{C} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset, \text{ dann auch } \mathcal{C} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

In der Scholastik wurde die Notation BaA & CiB $\Rightarrow$ CiA üblich, wobei die Vokale a,e,i,o den Wörtern affirmo und nego entnommen sind. Der erste Vokal bedeutet die universelle Affirmation, bzw. die universelle Negation, und der zweite Vokal die partikulare Affirmation, bzw. die partikulare Negation. Somit steht XaY für *alle X sind Y,* und XeY für *kein X ist ein Y.* Ferner steht XiY für: *einige X sind Y* und XoY für *einige X sind keine Y.* Dieser Notation liegt die klassische Zergliederung eines Satzes in Subjekt und Prädikat zugrunde. Quantoren, die einen eigenen Wirkungsbereich haben, werden nicht gebildet. Diese wurden erst von Gottlob Frege 1879 gebildet. Man darf daher mit Recht sagen, daß Quantoren erst von Frege eingeführt wurden.

Übungsaufgaben zu §8

(1) Sei $\rangle\!| x$ der Quantor „kein x". Läßt sich $\rangle\!| x$ mittels Negation und $\forall x$ (oder $\exists x$) ausdrücken?

(2) Wo liegt der Fehler in der folgenden anscheinend korrekten Argumentation, und warum liegt dieser Fehler nahe:

„Kein Narr eignet sich als Mathematik-Lehrer. Hans ist kein Narr. Also eignet sich Hans als Mathematik-Lehrer".

(3) (Nach Jevons, 1870, p.316) Wo liegt der Fehler in der folgenden anscheinend korrekten Argumentation:

„Nichts ist besser als ein reines Gewissen. Trocknes Brot ist besser als nichts. Also ist trockenes Brot besser als ein reines Gewissen".

(4) Was ist mit $\forall v \Phi \rightarrow \Psi$ gemeint: $\forall v(\Phi \rightarrow \Psi)$ oder $(\forall v \Phi) \rightarrow \Psi$?

§9. *Strukturen und Modelle*

Es geht uns jetzt darum zu erklären, unter welchen Voraussetzungen eine $\mathcal{L}$-Formel „wahr“ ist. In der Junktorenlogik brauchte man dazu lediglich den atomaren Aussagensymbolen A_n irgendwelche Wahrheitswerte zuzuordnen. In der Quantorenlogik muß man dazu zuerst den außerlogischen Zeichen (d.h. den Funktions-Zeichen, den Relations-Zeichen und den Individuen-Konstanten) konkrete Bedeutungen geben (dazu dient der Begriff der $\mathcal{L}$-Struktur). Erst dann kann ausgerechnet werden, ob eine $\mathcal{L}$-Formel in Bezug auf die vorgeschlagene Bedeutung wahr oder falsch ist.

Definition. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$ und $J = \mathrm{Dom}(\sigma)$, $K = \mathrm{Dom}(\tau)$. Wir nennen ein geordnetes Paar $\mathfrak{M} = \langle M, \Omega \rangle$ eine *$\mathcal{L}$-Struktur* (oder auch eine *Realisierung* von $\mathcal{L}$), falls gilt:

(1) M ist eine nicht-leere Menge, und

(2) Ω ist eine auf $J \cup K \cup I$ definierte Funktion mit den Eigenschaften:

- (2a) für alle $j \in J$: $\Omega(j)$ ist eine $\sigma(j)$-stellige totale Funktion von ganz $M^{\sigma(j)} = M \times M \times \ldots \times M$ in M,
- (2b) für alle $k \in K$: $\Omega(k)$ ist eine $\tau(k)$-stellige Relation in M (also $\Omega(k) \subseteq M^{\tau(k)} = M \times \ldots \times M$),
- (2c) für alle $i \in I$: $\Omega(i) \in M$.

Beachte, daß definitionsgemäß die drei Index-Mengen I, J und K paarweise disjunkt sind (§8). Daher ist Ω wohldefiniert.

Wenn $\mathfrak{M} = \langle M, \Omega \rangle$ eine *$\mathcal{L}$-Struktur* ist, dann ist M das *'Universum'* von $\mathfrak{M}$ oder auch der *'Individuenbereich'* von $\mathfrak{M}$ und Ω liefert eine *Interpretation* von $\mathcal{L}$ in $\mathfrak{M}$. Dabei ist

$f_j = \Omega(j)$ die Interpretation des Funktionszeichens $\dot{f}_j$ in $\mathfrak{M}$,

$R_k = \Omega(k)$ die Interpretation des Relationszeichens $\dot{R}_k$ in $\mathfrak{M}$,

$c_i = \Omega(i)$ die Interpretation der Individuen-Konstante $\dot{c}_i$ in $\mathfrak{M}$, Es ist also $\Omega = \langle\langle f_j;\, j\in J\rangle, \langle R_k,\, k\in K\rangle, \langle c_i;\, i\in I\rangle\rangle$ und wir schreiben daher auch

$$\mathfrak{M} = \langle M, \Omega \rangle = \langle M, f_j, R_k, c_i\rangle_{j\in J, k\in K, i\in I} = \langle M, \ldots \rangle.$$

Beispielsweise ist ein *„geordneter Körper"* eine Struktur der Form $\mathfrak{K} = \langle K, +, \bullet, \leq, 0, 1\rangle$. Man kann „geordnete Körper" aber auch mit der Subtraktion und Division ausstatten (wobei die Signatur geändert wird). Dann sind „geordnete Körper" Strukturen der Form $\mathfrak{K} = \langle K, +, -, \bullet, {}^{-1}, \leq, 0, 1\rangle$. Dabei muß allerdings auch die ein-stellige Funktion ${}^{-1}$ total erklärt sein (Forderung (2a)!). Das ist sie normalerweise nicht, aber wir können ja ohneweiteres $0^{-1} = 0$ (oder $0^{-1} = 1$ oder was immer man will) setzen, damit auch diese Funktion ${}^{-1}$ total ist [wir dürfen nur nicht diesen Wert in Rechnungen benutzen!].

Eine historische Bemerkung zum Struktur-Begriff. In der Mathematik kommt es in der Regel nicht auf die spezielle Natur der mathematischen Gegenstände an, sondern nur auf die Beziehungen, die sie untereinander haben. Darauf haben Hermann Günther Grassmann (in seiner „Linealen Ausdehnungslehre", 1844), Arthur Cayley (im Falle der Gruppentheorie, 1854), Ernst Schröder (in seinem „Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra", 1873), Richard Dedekind (im Falle der Arithmetik der natürlichen Zahlen, 1888) und andere bereits im 19. Jahrhundert hingewiesen. Seit Eli Cartan (1894), Bertrand Russell (1919) und vor allem Rudolf Carnap (in seinem Buch „Der logische Aufbau der Welt", Berlin 1928) spricht man von den *„Struktureigenschaften"* eines Bereiches von Gegenständen, wenn man ausdrücken will, daß es auf die spezielle Natur der einzelnen Objekte des Bereiches nicht ankommt, sondern nur auf den Isomorphie-Typ des Bereiches insgesamt. Wenn es also nicht auf die spezielle Natur der einzelnen Objekte des Bereiches ankommt, dann kann man die Objekte am einfachsten als abstrakte Mengen repräsentieren. Das führte in den dreißiger Jahre des 20. Jahrhunderts dazu, derartige Bereiche selbst als „Strukturen" (oder strukturierte Mengen) zu bezeichnen.
1939 prägte N. Bourbaki schließlich den Begriff einer „Struktur" in voller Allgemeinheit und machte ihn zur Grundlage seiner 'Éléments de Mathématique'. Hier werden ganz allgemein Strukturen für Sprachen der ersten Stufe sowie für Sprachen der zweiten Stufe (z.B. topologische Räume) eingeführt.

Es ist bemerkenswert, daß etwa in derselben Zeit der Struktur-Begriff auch in zahlreichen anderen Wissenschaften in den Vordergrund rückte, z.B. in der Sprachwissenschaft (F. de Saussure 1916), in der Psychologie (E. Spranger 1924), in der Philosophie (W. Dilthey 1927, P. Bernays 1930), etc. Die Entstehung des Struktur-Begriffs in der Mathematik kann daher sicherlich nicht isoliert von den Entwicklungen in anderen Wissenschaften gesehen werden.

Wir kehren zur Frage zurück, wie der Begriff der Gültigkeit einer $\mathcal{L}$-Formel definiert werden sollte. Die Antwort können wir jetzt geben, indem wir definieren, wann eine $\mathcal{L}$-Formel Φ in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ gilt.

Definition. Sei $\mathcal{Var} = \{v_0, v_1, v_2, \dots\} = \{v_n ; n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Variablen von $\mathcal{L}$ und sei $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Dann wird jede Abbildung h von $\mathcal{Var}$ in M (also $h \in M^{\mathcal{Var}}$) als *Belegung* (der Variablen mit Elementen von M) bezeichnet.

Definition. Für eine Belegung h ist $h[{}^{v_n}/_a]$ diejenige Funktion, die v_n auf a und v_i (für $i \neq n$) auf $h(v_i)$ abbildet. Eine ausführlichere mengentheoretische Beschreibung lautet wie folgt:

$$h[{}^{v_n}/_a] = (h - \{\langle v_n, h(v_n)\rangle\}) \cup \{\langle v_n, a\rangle\}.$$

und falls $n \neq m$:

$$h[{}^{v_n}/_a, {}^{v_m}/_b] = (h - \{\langle v_n, h(v_n)\rangle, \langle v_m, h(v_m)\rangle\}) \cup \{\langle v_n, a\rangle, \langle v_m, b\rangle\}.$$

Definition. Die *Auswertung* eines beliebigen Termes t in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ unter der Belegung h wird mit $w^h_{\mathfrak{M}}(t)$ bezeichnet (der Buchstabe w steht für „Wert") und ist wie folgt durch Rekursion über den Term-Aufbau definiert:

(1) $w^h_{\mathfrak{M}}(v_n) = h(v_n)$,

(2) $w^h_{\mathfrak{M}}(\dot{c}_i) = c_i$,

(3) $w^h_{\mathfrak{M}}(\dot{f}_j(t_1, t_2, \dots, t_{\sigma(j)})) = f_j(w^h_{\mathfrak{M}}(t_1), w^h_{\mathfrak{M}}(t_2), \dots, w^h_{\mathfrak{M}}(t_{\sigma(j)}))$.

Wenn t ein konstanter Term ist, dann benötigt man zur Auswertung von t nur die beiden Klauseln (2) und (3). Die Auswertung von t in $\mathfrak{M}$ hängt also von keiner Belegung h ab und wir bezeichnen sie einfach mit $w_{\mathfrak{M}}(t)$.

Damit können wir auch erklären, wann eine $\mathcal{L}$-Formel Φ in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ unter einer Belegung h gilt. Wie in der Junktoren-Logik bezeichnen wir diesen Wahrheitswert, der von $\mathfrak{M}$ und h abhängt, mit $val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi)$, wobei *val* für das lateinische 'valentia' (der Wert) steht.

Definition. Die Auswertung einer $\mathcal{L}$-Formel Φ in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ unter der Belegung $h: \mathcal{Var} \to M$ wird mit $val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi)$ bezeichnet und ist wie folgt (durch Rekursion über den Formel-Aufbau) definiert:

$$\text{(A1):} \qquad \mathrm{val}^{h}_{\mathfrak{M}}(t_1 = t_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_1) = w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_2), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{(A2):} \qquad \mathrm{val}^{h}_{\mathfrak{M}}(\dot{R}_k(t_1, t_2, \ldots, t_{\tau(k)})) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \langle w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_{\tau(k)})\rangle \in R_k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{(A3):} \qquad \mathrm{val}^{h}_{\mathfrak{M}}(\neg\Phi) = 1 - \mathrm{val}^{h}_{\mathfrak{M}}(\Phi),$$

$$\text{(A4):} \qquad \mathrm{val}^{h}_{\mathfrak{M}}(\Phi \to \Psi) = \mathrm{Sup}\{1 - \mathrm{val}^{h}_{\mathfrak{M}}(\Phi), \mathrm{val}^{h}_{\mathfrak{M}}(\Psi)\},$$

$$\text{(A5):} \qquad \mathrm{val}^{h}_{\mathfrak{M}}(\forall v_n : \Phi) = \begin{cases} 1 & \text{falls für jedes } a \in M\text{: } \mathrm{val}^{h\left[{v_n}/{a}\right]}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1 \text{ gilt}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung. Die beiden Klauseln (A5) und (1) des Begriffes der „Auswertung eines Termes" legen fest, daß Variable nur die Elemente eines Objektbereiches M durchlaufen können. Wir können in $\mathcal{L}$ also über Individuen, d.h. Elemente eines Objektbereiches M quantifizieren, aber nicht über Teilmengen von M. Aus diesem Grunde wird $\mathcal{L}$ als Sprache „der ersten Stufe" bezeichnet.

<u>**9.1**</u> <u>**Koinzidenz-Theorem**</u>: *Für alle Terme* t, *alle* $\mathcal{L}$*-Formeln* Φ, *alle* $\mathcal{L}$*-Strukturen* $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ *und alle Belegungen* $h_1, h_2 \in M^{\mathcal{V}ar}$ *gilt:*

(1) *Wenn* $h_1 \upharpoonright \mathrm{Fr}(t) = h_2 \upharpoonright \mathrm{Fr}(t)$, *dann* $w^{h_1}_{\mathfrak{M}}(t) = w^{h_2}_{\mathfrak{M}}(t)$,.

(2) *Wenn* $h_1 \upharpoonright \mathrm{Fr}(\Phi) = h_2 \upharpoonright \mathrm{Fr}(\Phi)$, *dann* $\mathrm{val}^{h_1}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = \mathrm{val}^{h_2}_{\mathfrak{M}}(\Phi)$.

<u>Beweis</u>. durch Induktion über den Term-, bzw. Formelaufbau. ❑

Das Koinzidenz-Theorem erlaubt auch die folgende elegante Notation (dabei verwenden wir eckige Klammern, um keine Verwechslungen mit anderen Notationen zu provozieren):

Definition: Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und Φ eine $\mathcal{L}$-Formel mit $\mathrm{Fr}(\Phi) \subseteq \{v_0, v_1 \dots, v_n\}$ und seien $a_0, a_1 \dots, a_n \in M$. Wir setzen:

$$\mathfrak{M} \models \Phi[a_0, a_1 \dots, a_n] \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{für alle Belegungen } h \in M^{\mathcal{V}ar} \textit{ gilt:} \\ \textit{wenn } h(v_0) = a_0 \;\&\; h(v_1) = a_1 \;\&\dots\&\; h(v_n) = a_n, \\ \textit{dann } \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1. \end{cases}$$

Definition. Statt $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$ schreiben wir auch

$$\mathfrak{M} \models_h \Phi,$$

gelesen: Φ *gilt in* $\mathfrak{M}$ *unter der Belegung* h.

<u>9.2</u> <u>**Proposition**</u>. *Sei* $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ *eine* $\mathcal{L}$*-Struktur,* $h: \mathcal{V}ar \to M$ *eine Belegung und seien* Φ *und* Ψ $\mathcal{L}$*-Formeln. Dann gilt:*

(1) $\mathfrak{M} \models_h \neg\Phi \quad \Leftrightarrow \quad$ *non*$(\mathfrak{M} \models_h \Phi)$

(2) $\mathfrak{M} \models_h \Phi \to \Psi \quad \Leftrightarrow \quad$ (*wenn* $\mathfrak{M} \models_h \Phi$ *dann* $\mathfrak{M} \models_h \Psi$)

(3) $\mathfrak{M} \models_h \forall v_n{:}\Phi \quad \Leftrightarrow \quad$ *für alle* $a \in M$ *gilt:* $\mathfrak{M} \models_{h\left[{}^{v_n}\!/_{a}\right]} \Phi[a]$

Die Funktion $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}$ *ist demnach eine Wahrheitswert-Zuordnung (im Sinne der Junktoren-Logik, §2), die auf der Menge aller* $\mathcal{L}$*-Formeln definiert ist.*

<u>Beweis</u>. Alle drei Behauptungen sind aufgrund der Definitionen unmittelbar klar. ❑

Definition. Sei Φ eine $\mathcal{L}$-Formel und $\mathfrak{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Wir sagen, daß Φ <u>*in*</u> $\mathfrak{M}$ <u>*gilt*</u> (in Zeichen: $\mathfrak{M} \models \Phi$), wenn für jede Belegung $h \in M^{\mathcal{V}ar}$:

$$\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1 \quad \text{ist.}$$

Definition. Statt „Φ gilt in $\mathfrak{M}$" sagen wir auch: „$\mathfrak{M}$ *ist ein Modell von* Φ".
Wenn $\mathfrak{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln ist, dann nennen wir $\mathfrak{M}$ ein *Modell* von Σ (in Zeichen: $\mathfrak{M} \models \Sigma$), wenn $\mathfrak{M}$ ein Modell einer jeden Formel Φ aus Σ ist.

Eine historische Bemerkung. In dieser Definition haben wir erklärt, wann eine $\mathcal{L}$-Formel in einer $\mathcal{L}$-Struktur *„wahr"* ist. Dieser Begriff der „Wahrheit" (oder „Gültigkeit") einer Aussage in einem Universum (einer $\mathcal{L}$-Struktur) war zwar schon immer mehr oder weniger klar, wurde aber erst von Alfred Tarski in seiner systematischen Abhandlung

> A. Tarski: *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen,* Studia Philosophica, Band 1 (1936), pp.261-405;

explizit und sorgfältig definiert (dort §3, Definitionen 22 und 23). In den fünfziger und sechziger Jahren des 20. Jahrhunderts wurden diese Tarskischen Definitionen noch einmal von einigen anderen Logikern gründlich überarbeitet (insbesondere von Andrzej Ehrenfeucht und Andrzej Mostowski (*„Models of axiomatic theories admitting automorphisms"*, Fund. Math. 43 (1956), pp.50-68)) und in dieser überarbeiteten Form haben wir sie oben dargelegt.

<u>9.3</u> <u>Proposition</u>. *Sei* Φ *eine* $\mathcal{L}$*-Formel und* $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ *eine* $\mathcal{L}$*-Struktur. Sei* $\mathrm{Fr}(\Phi) \subseteq \{v_0, v_1 \dots, v_n\}$. *Dann gilt:*

$$\mathfrak{M} \models \Phi \quad \textit{genau dann wenn} \quad \mathfrak{M} \models \forall v_0 \forall v_1 \dots \forall v_n \Phi.$$

<u>Beweis</u>.

$\mathfrak{M} \models \Phi \iff$ Für alle Belegungen $h: \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$ [definitionsgemäß]

$\iff$ Für alle Belegungen $h \in M^{\mathcal{V}ar}$ und alle $a_0, a_1 \dots, a_n \in M$ gilt:

wenn $h(v_i) = a_i$ (für $0 \le i \le n$), dann $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$.

$\iff$ Für alle Belegungen $h \in M^{\mathcal{V}ar}$ gilt $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_0 \forall v_1 \dots \forall v_n \Phi) = 1$,

nach Klausel (A5). ❑

<u>9.4</u> <u>Satz:</u> *Für beliebige* $\mathcal{L}$*-Formeln* Φ *und* Ψ *und jede beliebige* $\mathcal{L}$*-Struktur* $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ *gilt:*

(1) $\mathfrak{M} \models \neg\Phi \quad \Rightarrow \quad$ *non* $(\mathfrak{M} \models \Phi)$

(2) $\mathfrak{M} \models \Phi \to \Psi \quad \Rightarrow \quad$ *wenn* $\mathfrak{M} \models \Phi$ *dann* $\mathfrak{M} \models \Psi$.

(3) $\mathfrak{M} \models \forall v_n \Phi(v_n) \;\Leftrightarrow\;$ *für alle* $a \in M$: $\mathfrak{M} \models \Phi[a]$.

Wenn Φ *eine* $\mathcal{L}$-*Aussage ist, dann gilt sogar:*

(4) $\mathfrak{M} \models \neg\Phi \;\Leftrightarrow\;$ *non* $(\mathfrak{M} \models \Phi)$

(5) $\mathfrak{M} \models \Phi \to \Psi \;\Leftrightarrow\;$ *wenn* $\mathfrak{M} \models \Phi$ *dann* $\mathfrak{M} \models \Psi$.

Beweis. Zu (1) und (4):

$\mathfrak{M} \models \neg\Phi \;\Leftrightarrow\;$ für alle $h \in M^{\mathcal{Var}}$: $val^h_{\mathfrak{M}}(\neg\Phi) = 1$ [nach Definition von $\models$]

$\Rightarrow$ es gibt ein $h \in M^{\mathcal{Var}}$: $val^h_{\mathfrak{M}}(\neg\Phi) = 1$

[wenn $Fr(\neg\Phi) \neq \varnothing$, dann hat man hier nur „$\Rightarrow$"; wenn jedoch $Fr(\neg\Phi) = \varnothing$, dann gilt nach dem Koinzidenztheorem auch die Umkehrung „$\Leftarrow$", und daher insgesamt „$\Leftrightarrow$"]

$\Leftrightarrow$ es gibt ein $h \in M^{\mathcal{Var}}$: $val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 0$ [nach Klausel (A3)]

$\Leftrightarrow$ non($\mathfrak{M} \models \Phi$) [denn $\mathfrak{M} \models \Phi$ hieße, daß für jede Belegung g, $val^g_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$ gelten müßte]

Zu (2) und (5):

$\mathfrak{M} \models \Phi \to \Psi \Leftrightarrow$ für alle $h \in M^{\mathcal{Var}}$: $(val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1 \;\Rightarrow\; val^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1)$

[nach Definition von $\models$ und nach Klausel (A4)]

$\Rightarrow$ (für alle $h \in M^{\mathcal{Var}}$: $val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$) $\Rightarrow$ (für alle $h \in M^{\mathcal{Var}}$: $val^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$)

Beweis: „$\Downarrow$": Wir nehmen an, daß „für alle $h \in M^{\mathcal{Var}}$: $val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$" gilt. Sei h eine beliebige Belegung. Die Annahme liefert $val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$ und nach der vorausgesetzten oberen Zeile ergibt sich daraus $val^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$. Da h beliebig war, gilt also „für alle $h \in M^{\mathcal{Var}}$: $val^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$".

Wenn $Fr(\Phi) = \varnothing$ ist, dann können wir sogar $\Leftrightarrow$ beweisen, denn:

„$\Uparrow$": Sei h eine Belegung. Wir müssen $val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi)=1 \Rightarrow val^h_{\mathfrak{M}}(\Psi)=1$ zeigen. Wir nehmen dazu an, daß $val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi)=1$ ist. Wegen $Fr(\Phi)=\varnothing$ ist dann nach dem Koinzidenz-Theorem auch $val^g_{\mathfrak{M}}(\Phi)=1$ für jede andere

Belegung g. Aus der unteren Zeile ergibt sich daher „für alle $g \in M^{\mathcal{Var}}: \mathrm{val}^g_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$“. Es gilt daher insbesondere auch für h: $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$.

$\Leftrightarrow$ ($\mathfrak{M} \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \Psi$).

Zu (3): $\mathfrak{M} \models \forall v_n \Theta(v_n) \Leftrightarrow$ für alle $h \in M^{\mathcal{Var}}$: $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_n \Theta(v_n)) = 1$

$\Leftrightarrow$ für alle $h \in M^{\mathcal{Var}}$ und alle $a \in M: (h(v_n) = a \Rightarrow \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Theta(v_n)) = 1)$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in M$ und alle $h \in M^{\mathcal{Var}}: (h(v_n) = a \Rightarrow \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Theta(v_n)) = 1)$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in M$: $\mathfrak{M} \models \Theta[a]$.

Damit ist alles bewiesen. ❑

Da mit $\neg$ und $\rightarrow$ alle übrigen Junktoren ausdrückbar sind, erhalten wir aus Satz 9.4 noch für $\mathcal{L}$-Aussagen Φ und Ψ und beliebige $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$:

(6) $\mathfrak{M} \models \Phi \wedge \Psi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{M} \models \Phi$ und $\mathfrak{M} \models \Psi)$.

(7) $\mathfrak{M} \models \Phi \vee \Psi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{M} \models \Phi$ oder $\mathfrak{M} \models \Psi)$.

(8) $\mathfrak{M} \models \Phi \leftrightarrow \Psi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{M} \models \Phi$ genau dann wenn $\mathfrak{M} \models \Psi)$.

Satz 9.4(4),(5) gilt nur für Aussagen! Für $\mathcal{L}$-Formeln, in denen freie Variable vorkommen, ist er falsch.

Ein Gegenbeispiel: Sei $\Phi(y)$ die Formel $\neg\forall x(x+1 \neq y)$. Diese Formel ist in den natürlichen Zahlen ungültig: *non* ($\langle \mathbb{N},+,0,1\rangle \models \neg\forall x(x+1\neq y)$), denn sonst müßte nach Proposition 9.3 auch $\langle \mathbb{N},+,0,1\rangle \models \forall y \neg\forall x(x+1\neq y)$ gelten, was aber für $y = 0$ offenbar falsch ist. Aber es gilt auch

$$non\,(\langle \mathbb{N},+,0,1\rangle \models \forall x\,(x+1 \neq y)),$$

denn sonst müßte nach Proposition 9.3 auch $\langle \mathbb{N},+,0,1\rangle \models \forall y \forall x(x+1\neq y)$ gelten, was aber für $y=1$ und $x=0$ offenbar falsch ist. Das Beispiel zeigt, daß man aus *non* ($\mathfrak{M} \models \Phi$) im allgemeinen nicht auf $\mathfrak{M} \models \neg\Phi$ schließen kann. Satz 9.4(4) ist also für beliebige $\mathcal{L}$-Formeln im allgemeinen falsch.

Einführung des Existenz-Quantors '$\exists v\Phi(v)$'

Die Sprache $\mathcal{L}$, die wir in §8 eingeführt hatten, besitzt nur vier logische Zeichen: '$\neg$', '$\rightarrow$', '$\forall$' und das Gleichheits-Zeichen '='. Aus §3 wissen wir, daß $\mathcal{L}$ genügend viele Junktoren hat, denn mit $\neg$ und $\rightarrow$ allein kann man jeden anderen n-stelligen Junktor ausdrücken (Satz 3.1). Aber es stellt sich jetzt die Frage, ob $\mathcal{L}$ auch genügend viele Quantoren hat? Ist beispielsweise der Existenz-Quantor

„einige v haben die Eigenschaft Φ“ (in Zeichen: $\exists v{:}\Phi$)

in $\mathcal{L}$ ausdrückbar, oder müssen wir $\mathcal{L}$ erweitern und den Existenz-Quantor gesondert in das Alphabet aufnehmnen? Die Antwort auf diese Frage hängt davon ab, was wir unter „Existenz“ verstehen wollen[1]).

Wann kann man in der Mathematik vom Vorhandensein (also der „Existenz“) eines Objektes, das eine bestimmte Eigenschaft Φ hat, sprechen? -

- indem man ein solches Objekt explizit angibt (eines beim Namen nennt), und konstruiert,
- oder etwas schwächer: indem man zeigt, daß ein solches Objekt in endlich vielen Schritten gefunden werden kann,
- oder noch viel schwächer: indem man zeigt, daß es nicht sein kann, daß alle Objekte die gegenteilige Eigenschaft $\neg\Phi$ hätten.

Wir entscheiden uns hier für die dritte (und schwächste) Interpretation des Begriffes der Existenz insbesondere deshalb, weil sonst in die Logik andere Aspekte (etwa: der Endlichkeitsbegriff, die Begriffe der Konstruierbarkeit, Rekursivität etc.) einbezogen werden müßten, die der reinen Logik fremd sind. Hinzukommt, daß die Ausdrucksmittel in formalen Sprachen in der Regel viel zu eingeschränkt sind, als daß man für jedes „existierende“ Objekt einen Namen (oder eine Beschreibung) hätte.
Da wir den „Existenz-Quantor“ nur in der Bedeutung eines reinen „Seins-Quantors“ (genauer: in der Bedeutung eines *Nonnullifikators*) benutzen wollen, werden wir uns wie folgt festlegen.

Dabei wollen wir mit $\mathcal{L}(\neg,\rightarrow,\forall,\exists,=)$ die Sprache bezeichnen, die wie $\mathcal{L}$ aufgebaut ist (und dieselbe Signatur hat), die aber neben den logischen Zeichen von $\mathcal{L}$ auch noch das Zeichen $\exists$ für den Existenz-Quantor enthält.

Definition. Sei Φ eine $\mathcal{L}(\neg,\rightarrow,\forall,\exists,=)$-Formel, $\mathfrak{M}=\langle M,\ldots\rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $h: \mathcal{V}ar \rightarrow M$ eine Belegung. Wir erweitern die rekursive Definition des Begriffes der Auswertung einer Formel um die folgende Klausel:

---

1) Das lateinische Wort exsistĕre bedeutet „zum Vorschein kommen, ins Leben treten, hervortreten, herausstellen, sich erheben“ und ist aus der Präposition *ex* (=aus) und dem Verb *sistĕre* (=hinstellen, aufstellen, errichten) zusammengesetzt. In der deutschen Sprache sind die Lehnwörter „Existenz“ und „existieren“ seit 1685 belegt. Man verwendet das Wort „Existenz“ im Sinne von „Dasein“, oder „Vorhandensein“.

$$\text{(A6)} \qquad \mathrm{val}_{\mathfrak{M}}(\exists v_n \Phi) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } \{a \in M;\ \mathrm{val}^{h\left[{v_n}/{a}\right]}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1\} \neq \emptyset, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

9.5 **Satz:** *Sei* $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ *eine* $\mathcal{L}$*-Struktur und* Θ *eine beliebige* $\mathcal{L}(\neg, \to, \forall, \exists, =)$*-Formel. Dann gilt:*

(1) $\qquad \mathfrak{M} \models (\exists v_n \Theta(v_n) \leftrightarrow \neg \forall v_n \neg \Theta(v_n))$.

(2) *Wenn* $\exists v_n \Theta(v_n)$ *eine Aussage ist, dann gilt :*

$$\mathfrak{M} \models \exists v_n \Theta(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \{a \in M;\ \mathfrak{M} \models \Theta[a]\} \neq \emptyset.$$

Beweis. Zu (1): Sei h eine beliebige Belegung. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\exists v_n \Theta(v_n)) = 1 \ &\Leftrightarrow \{a \in M;\ \mathrm{val}^{h\left[{v_n}/{a}\right]}_{\mathfrak{M}}(\Theta) = 1\} \neq \emptyset \qquad \text{nach (A6)} \\
&\Leftrightarrow \{a \in M;\ \mathrm{val}^{h\left[{v_n}/{a}\right]}_{\mathfrak{M}}(\Theta) = 0\} \neq M \\
&\Leftrightarrow \{a \in M;\ \mathrm{val}^{h\left[{v_n}/{a}\right]}_{\mathfrak{M}}(\neg\Theta) = 1\} \neq M \\
&\Leftrightarrow \mathrm{non}\left(\{a \in M;\ \mathrm{val}^{h\left[{v_n}/{a}\right]}_{\mathfrak{M}}(\neg\Theta) = 1\} = M\right) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{non}\colon\ \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_n \neg\Theta) = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\neg\forall v_n \neg\Theta) = 1,
\end{aligned}$$

Es gilt also $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\exists v_n \Theta(v_n)) = \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\neg\forall v_n \neg\Theta)$ für jede Belegung h, und daraus folgt nach Proposition 9.2(2) sofort die Behauptung.

Zu (2): Die Behauptung folgt sofort aus Klausel (A6) unter Verwendung des Koinzidenz-Theorems. ❑

Satz 9.5(1) zeigt, daß es nicht nötig ist, den Existenz-Quantor gesondert in die formalen Sprachen der Quantoren-Logik aufzunehmen, da er mittels Negation und All-Quantor definierbar ist. Wir werden also weiterhin mit den Sprachen $\mathcal{L}$, deren einzige logische Zeichen $\neg, \to, \forall$ und $=$ sind, so wie wir sie in §8 eingeführt haben, arbeiten. Wir werden $\exists v_n \Theta(v_n)$ als Abkürzung für $\neg\forall v_n \neg\Theta(v_n)$ benutzen.

Übungsaufgaben zu §9

(1) Zeigen Sie, daß für jeden fest-vorgegebenen Körper K der Begriff des K-Vektorraumes als $\mathcal{L}$-Struktur für eine geeignete Sprache $\mathcal{L}$ definiert werden kann. *Tip:* Lassen Sie sich einen kleinen Kunstgriff einfallen!

(2) Zeigen Sie, daß Satz 9.4(5) für beliebige Formeln im allgemeinen falsch ist. Geben Sie dazu zwei Formeln Φ und Ψ in einer geeigneten Sprache $\mathcal{L}$ an, und eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$, so daß zwar (*wenn* $\mathfrak{M} \models \Phi$ *dann* $\mathfrak{M} \models \Psi$), nicht aber $\mathfrak{M} \models \Phi \to \Psi$ gilt.

(3) Zeigen Sie, daß die folgenden Quantoren mittels $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \forall, \exists$ ausgedrückt werden können:
(i) Es gibt mindestens zwei Objekte, welche die Eigenschaft Φ haben;
(ii) Es gibt höchstens zwei Objekte, welche die Eigenschaft Φ haben;
(iii) Es gibt genau zwei Objekte, welche die Eigenschaft Φ haben.

(4) *Zeigen Sie, daß für beliebige $\mathcal{L}$-Formeln Φ und Ψ und beliebige $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ gilt:*

(i) $\mathfrak{M} \models \Phi \wedge \Psi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{M} \models \Phi$ und $\mathfrak{M} \models \Psi)$.

(ii) $\mathfrak{M} \models \Phi \leftrightarrow \Psi \quad \Rightarrow \quad (\mathfrak{M} \models \Phi$ genau dann wenn $\mathfrak{M} \models \Psi)$.

(iii) $(\mathfrak{M} \models \Phi$ oder $\mathfrak{M} \models \Psi) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{M} \models \Phi \vee \Psi$.

Geben Sie Beispiele an, die zeigen, daß weder in (ii) noch in (iii) die Implikations-Pfeile „$\Rightarrow$" umgedreht werden können.

§10. *Quantorenlogische Tautologien*

Den Begriff der Tautologie übertragen wir aus der Junktoren-Logik in die Quantoren-Logik wie folgt (nach Paul Bernays-Moses Schönfinkel, Math. Annalen 99 (1928), pp.342-372).

Definition (Bernays-Schönfinkel, 1928). Eine $\mathcal{L}$-Formel Φ ist *logisch-allgemeingültig,* wenn sie in jeder $\mathcal{L}$-Struktur gilt (d.h. wenn sie in jeder $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ unter jeder Belegung h den Wahrheitswert 1 bekommt). Logisch-allgemeingültige Formeln werden auch *'Tautologien'* genannt.

Es stellt sich zunächst die Frage, ob denn die $\mathcal{L}$-Formeln, die im Sinne der Junktoren-Logik Tautologien sind, auch im Sinne der Quantoren-Logik Tautologien sind. Die Antwort ist positiv, wie die folgende Proposition zeigt.

10.1 Proposition. *Sei Ψ ein Ausdruck der Junktoren-logischen Sprache $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$ aus §2 mit $\mathrm{At}(\Psi) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ und seien $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ beliebige Formeln der Quantoren-logischen Sprache $\mathcal{L}$. Sei Ψ^* die $\mathcal{L}$-Formel, die aus Ψ entsteht, wenn man jedes in Ψ vorkommende Aussagen-Symbol A_j durch Φ_j ersetzt. Wenn Ψ eine Tautologie im Sinne der Junktoren-Logik ist, dann ist Ψ^* eine Tautologie im Sinne der Quantoren-Logik.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ irgendeine $\mathcal{L}$-Struktur. Wir müssen $\mathfrak{M} \models \Psi^*$ zeigen. Sei dazu $h \in M^{\mathcal{V}ar}$ irgend eine Belegung. Definiere damit eine Funktion F wie folgt: $F(A_j) := \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi_j)$ für $1 \leq j \leq n$, $F(A_j) \in \{0,1\}$ beliebig für $j > n$ und setze F gemäß Proposition 2.4 zu einer Wahrheitswertzuordnung fort. Da Ψ eine junktoren-logische Tautologie ist, gilt $F(\Psi) = 1$. Nach Proposition 9.2 ist auch $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}$ eine Wahrheitswert-Zuordnung und aus $F(\Psi) = 1$ folgt $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Psi^*) = 1$

(denn Ψ und Ψ^* sind gleich gebaut). Da dies für alle h und alle $\mathfrak{M}$ gilt, ist Ψ^* auch im Sinne der obigen Definition logisch-allgemeingültig. ❑

Wir wollen im folgenden einige der wichtigsten Tautologien der Quantorenlogik zusammenstellen. Dabei sei $\mathcal{L}$ stets eine quantorenlogische Sprache, deren logische Zeichen $\neg, \rightarrow, \forall, =$ sind. Die anderen logischen Zeichen $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \exists, \neq$ dürfen in $\mathcal{L}$ verwendet werden, da wir sie als Zeichen verstehen, die mit $\neg, \rightarrow, \forall, =$ definiert werden können.

10.2 Lemma. *Für jede beliebige $\mathcal{L}$-Formel Φ sind die folgenden Ausdrücke logisch-allgemeingültig:*

(1) $(\forall v_0 \forall v_1 : \Phi) \leftrightarrow (\forall v_1 \forall v_0 : \Phi)$;

(2) $(\exists v_0 \exists v_1 : \Phi) \leftrightarrow (\exists v_1 \exists v_0 : \Phi)$;

(3) $(\exists v_0 \forall v_1 : \Phi) \rightarrow (\forall v_1 \exists v_0 : \Phi)$.

Beweis. Zu (1): Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ eine beliebige $\mathcal{L}$-Struktur und $h \in M^{Var}$ eine beliebige Belegung. Wir rechnen:

$$\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_0(\forall v_1 : \Phi)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle } a \in M\text{: } \mathrm{val}^{h\left[\frac{v_0}{a}\right]}_{\mathfrak{M}}(\forall v_1 : \Phi) = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{für alle } a \in M \text{ und für alle } b \in M\text{: } \mathrm{val}^{h\left[\frac{v_0}{a}, \frac{v_1}{b}\right]}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{für alle } b \in M \text{ und für alle } a \in M\text{: } \mathrm{val}^{h\left[\frac{v_1}{b}, \frac{v_0}{a}\right]}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{für alle } b \in M\text{: } \mathrm{val}^{h\left[\frac{v_1}{b}\right]}_{\mathfrak{M}}(\forall v_0 : \Phi) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_1(\forall v_0 : \Phi)) = 1,$$

also: $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_0(\forall v_1 : \Phi)) = \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_1(\forall v_0 : \Phi))$, woraus nach Proposition 9.2(2) sofort die Behauptung (1) folgt.

Zu (2): Das folgt wegen $\exists v_n \Theta \leftrightarrow \neg \forall v_n \neg \Theta$ (Satz 9.5(1)) sofort aus (1), wenn man (1) auf $\neg\Phi$ anwendet.

Zu (3): Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ eine beliebige $\mathcal{L}$-Struktur und $h \in M^{Va}$ eine Belegung.

$\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\exists v_0 \forall v_1 : \Phi) = 1 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ es gibt $a \in M$ so daß für alle $b \in M$: $\mathrm{val}^{h\left[{}^{v_0}/_a, {}^{v_1}/_b\right]}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$

$\Rightarrow$ für alle $b \in M$ gibt es ein $c \in M$ so daß $\mathrm{val}^{h\left[{}^{v_1}/_b, {}^{v_0}/_c\right]}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$

[denn man kann ja zunächst a nach der darüber stehenden Zeile fest wählen und dann für c immer dieses a nehmen].

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_1 \exists v_0 : \Phi) = 1$

Es gilt also $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\exists v_0 \forall v_1 : \Phi) = 1 \Rightarrow \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_1 \exists v_0 : \Phi) = 1$. Damit ist nach Proposition 9.2(2) auch die Behauptung von (3) bewiesen. ❑

In Lemma 10.2(3) gilt die Umkehrung nicht, denn im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist beispielsweise $\forall x \exists y: \ x = y^2$ gültig. Aber $\exists y \forall x: \ x = y^2$ ist in $\mathbb{C}$ offenbar ungültig.

Diskussion. Im Beweis von Satz 10.2(1) haben wir die Vertauschbarkeit der beiden gleichartigen Quantoren $\forall v_0$ und $\forall v_1$ dadurch bewiesen, daß wir auf die Vertauschbarkeit der beiden Quantoren in der Formel

„für alle $a \in M$ und für alle $b \in M$: $\mathrm{val}^{h\left[{}^{v_0}/_a, {}^{v_1}/_b\right]}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$"

zurückgegriffen haben. Manche Leser fragen sich vielleicht, ob man hier nicht genau das hineinsteckt, was man herausholen will? - Nein! - das ist nicht der Fall, denn bewiesen wird ein *allgemeines Gesetz* (mit unbeschränkten Quantoren) und zum Beweis greift man nur auf einen einfachen Spezialfall zurück, von dessen Gültigkeit man sich unmittelbar überzeugen kann. Dieser Spezialfall besagt, daß es nicht auf die Reihenfolge ankommt, in der man die Funktion h an den Argumenten v_0 und v_1 abändert: es ist

$$h\left[{}^{v_0}/_a, {}^{v_1}/_b\right] = h\left[{}^{v_1}/_b, {}^{v_0}/_a\right].$$

Diese Tatsache ergibt sich sofort aus dem Inhalt des Begriffs einer Abbildung.

Diese Art des Argumentierens (in der Metasprache) mit konkreten Objekten (etwa mit Abbildungen oder Elementen einer konkreten Menge), ohne dabei selbst schon (abstrakte) logische Gesetze zu benutzen, nennt man *„inhaltliches Schließen"*. Das inhaltliche Schließen wurde bereits im Beweis von Satz 9.4(3) zugrunde gelegt (dort wurden die beiden Quantoren für

„alle $h \in M^{\mathcal{V}ar}$ und alle $a \in M$" der Meta-Sprache vertauscht) und wird auch in den Beweisen der übrigen Tautologien dieses §10 die einzige Grundlage sein.

10.3 Lemma. *Seien* Φ *und* Ψ $\mathcal{L}$*-Formeln mit* $v \in Fr(\Phi)$ *und* $v \notin Fr(\Psi)$. *Dann sind die folgenden Formeln logisch allgemeingültig:*

(1) $(\forall v(\Psi \to \Phi)) \leftrightarrow (\Psi \to \forall v{:}\ \Phi)$;

(2) $(\exists v(\Psi \to \Phi)) \leftrightarrow (\Psi \to \exists v{:}\ \Phi)$;

(3) $(\forall v(\Phi \to \Psi)) \leftrightarrow ((\exists v{:}\ \Phi) \to \Psi)$,

(4) $(\exists v(\Phi \to \Psi)) \leftrightarrow ((\forall v{:}\ \Phi) \to \Psi)$.

Beweis. O.B.d.A. sei v die Variable v_0.

Zu (1): Wir zeigen vom mittleren Doppelpfeil „$\leftrightarrow$" zunächst nur die eine Richtung „$\to$". Sei dazu $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ irgendeine $\mathcal{L}$-Struktur und $h \in M^{\mathcal{V}ar}$ irgendeine Belegung. Wir müssen zeigen:

(†) *wenn* $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_0(\Psi \to \Phi)) = 1$ *und* $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$

(‡) *dann:* $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v_0{:}\ \Phi)) = 1$

Wir setzen dazu die Gültigkeit von (†) voraus. Das heißt (unter Verwendung von Proposition 9.2(2)), daß

(#) *für alle* $b \in M$: *wenn* $\mathrm{val}^{h\left[{v_0}/{b}\right]}_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$ *dann* $\mathrm{val}^{h\left[{v_0}/{b}\right]}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$

gilt. Nach (†) gilt aber auch $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$, und nach dem Koinzidenz-Theorem (weil $v_0 \notin Fr(\Psi)$) gilt dann auch $\mathrm{val}^{h\left[{v_0}/{b}\right]}_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$ für jedes beliebige $b \in M$.

Aus (#) folgt daher: *für alle* $b \in M$: $\mathrm{val}^{h\left[{v_0}/{b}\right]}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$ und das beweist (‡).

Die Umkehrung „$\leftarrow$" wird auf ganz ähnliche Weise bewiesen und muß deshalb hier nicht vorgeführt werden.

Zu (2), (3), (4): Dies wird analog wie (1) bewiesen. ❑

10.4 **Lemma.** *Für das Gleichheits-Zeichen gelten die folgenden Tautologien:*

(1) $\exists v_n(v_n = v_n)$;

(2) $\forall v_n \forall v_m (v_n = v_m \rightarrow v_m = v_n)$;

(3) $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 (v_0 = v_1 \rightarrow (v_1 = v_2 \rightarrow v_0 = v_2))$.

Beweis. Zu (1): Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ irgendeine $\mathcal{L}$-Struktur. Wir müssen $\mathfrak{M} \models \exists v_n(v_n = v_n)$ zeigen. Sei dazu $h \in M^{\mathcal{V}ar}$ irgendeine Belegung. Dann ist:

$$\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\exists v_n(v_n = v_n)) = 1 \iff \text{es gibt } a \in M: \mathrm{val}^{h\left[{}^{v_n}/_{a}\right]}_{\mathfrak{M}}(v_n = v_n) = 1$$

$$\iff \text{es gibt } a \in M: a = a$$

[gemäß der Auswertung von Termgleichungen]

Weil in jeder $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ definitionsgemäß M nicht-leer ist, ist die Zeile „es gibt $a \in M$: $a = a$" offenbar richtig. Damit ist (1) bewiesen.
Zu (2) und (3): dies kann auf direktem Wege leicht verifiziert werden. ❑

Der Beweis von 10.4 zeigt wieder, daß man zum Beweis eines allgemeinen (abstrakten) Gesetzes auf einen analogen (konkreten) Sachverhalt zurückgreifen muß. Zum Beweis der logischen Allgemeingültigkeit von $\exists v(v = v)$ muß man beispielsweise auf den analogen Sachverhalt „es gibt $a \in M$: $a = a$" zurückgreifen. Das Bestehen dieses Sachverhaltes ist jedoch unmittelbar einsichtig, weil $M \neq \emptyset$ vorausgesetzt wurde. - Daß demgegenüber die Aussage $\exists v(v = v)$ logisch-allgemeingültig ist, ist jedoch überhaupt nicht trivial. $\exists v(v = v)$ besagt doch, daß es überhaupt etwas gibt! Der Grund dafür ist unsere Verabredung, daß jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ einen nicht-leeren Individuen-Bereich M hat.

Über Substitution

Wenn Φ eine $\mathcal{L}$-Formel ist und $v \in \mathrm{Fr}(\Phi)$, dann möchte man gerne in manchen Situationen die Variable v durch einen Term t ersetzen. Gelegentlich möchte man auch mehrere Variablen $v_1, v_2, \dots$ durch Terme $t_1, t_2, \dots$ ersetzen, und zwar v_1 durch t_1, v_2 durch t_2, etc.. Dabei ist zu unterscheiden, ob die Ersetzung (Substitution) simultan, oder der Reihe nach, ausgeführt werden soll.

Konvention. Wenn Φ eine $\mathcal{L}$-Formel ist und $v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_k}$ Variable sind, dann soll die Schreibweise $\Phi(v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_k})$ besagen, daß die angegebenen Variablen

$v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_k}$ alle in Φ *frei* vorkommen! Die angegebenen Variablen müssen nicht die sämtlichen freien Variablen von Φ sein und die angegebene Reihenfolge muß nicht die Reihenfolge sein, in der sie beim Lesen von Φ von links nach rechts als Zeichenreihe der Reihe nach auftreten.

Notation. Sei Φ eine $\mathcal{L}$-Formel und $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_k} \in Fr(\Phi)$. Seien $t_{n_1}, t_{n_2}, \ldots, t_{n_k}$ Terme von $\mathcal{L}$. Dann ist $\Phi\left({}^{v_{n1}}/t_{n_1}, {}^{v_{n2}}/t_{n_2}, \ldots, {}^{v_{nk}}/t_{n_k}\right)$ diejenige $\mathcal{L}$-Formel, die aus $\Phi(v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_k})$ entsteht, indem man *simultan* die v_{n_j} (für $1 \le j \le k$) überall, wo sie in Φ frei auftreten, *durch* t_{n_j} *ersetzt.*

Eine analoge Schreibweise verwenden wir für die Substitution von Variablen in Termen.

Wir haben ${}^{v}/t$ geschrieben, um an die übliche Lesart „v *durch* t" zu erinnern, denn hier wird v *durch* t ersetzt. In der Literatur trifft man auch die duale Schreibweise ${}^{t}/v$ an.

Notation. Ersetzungen, die <u>nicht simultan, sondern hintereinander</u> (schrittweise) ausgeführt werden sollen, muß man durch Verwendung von Klammern mitteilen, etwa so:

$\Phi\left({}^{v_0}/t_0, {}^{v_1}/t_1\right)$ ist diejenige Formel, die aus Φ entsteht, indem man *simultan* v_0 und v_1 überall, wo sie in Φ frei auftreten, durch t_0, bzw. t_1 ersetzt.

$\left(\Phi({}^{v_0}/t_0)\right)({}^{v_1}/t_1)$ ist diejenige Formel, die aus Φ entsteht, indem man *zuerst* v_0 überall, wo es in Φ frei auftritt, durch t_0 ersetzt *und anschließend* v_1 überall, wo es in der neuen Formel $\Phi({}^{v_0}/t_0)$ frei auftritt, durch t_1 ersetzt.

Beispiel: Sei $\Phi(v_0, v_1) \triangleq \exists v_2(v_2 \cdot v_0 = v_1 \wedge \exists v_0(v_0 + v_0 = v_2))$.

Dann ist $\Phi\left({}^{v_0}/v_1, {}^{v_1}/v_2\right) \triangleq \exists v_2(v_2 \cdot v_1 = v_2 \wedge \exists v_0(v_0 + v_0 = v_2))$.

und $\left(\Phi({}^{v_0}/v_1)\right)({}^{v_1}/v_2) \triangleq \left(\exists v_2(v_2 \cdot v_1 = v_1 \wedge \exists v_0(v_0 + v_0 = v_2))\right)({}^{v_1}/v_2)$

$$\triangleq \exists v_2(v_2 \cdot v_2 = v_2 \wedge \exists v_0(v_0 + v_0 = v_2)).$$

Offenbar führen die simultane Ersetzung und die schrittweise Ersetzung gelegentlich zu verschiedenen Formeln.

Wenn man in einer Formel eine Substitution durchführt, dann kann sich der Sinn der Formel ändern!

Ein Beispiel: Wenn wir in $\exists x\,(x \neq y)$ die freie Variable y durch eine andere, aber von x verschiedene Variable, etwa z, ersetzen, dann sagt die ursprüngliche Formel $\exists x\,(x \neq y)$ über y dasselbe aus wie die neue Formel: $\exists x\,(x \neq z)$ über z. Wenn wir aber y durch $x+y$ ersetzen, dann erhalten wir die Formel $\exists x\,(x \neq x+y)$ und diese hat einen ganz anderen Inhalt. Im Ring **Z** der ganzen Zahlen trifft die Eigenschaft $\exists x\,(x \neq y)$ beispielsweise auf jede Zahl zu, aber $\exists x\,(x \neq x+y)$ trifft nicht auf die 0 zu. Hier wird y durch den Term $t(x,y)=x+y$ ersetzt, der eine Variable enthält, die in den Wirkungsbereich eines Quantors gerät.
Derartige Beispiele führen uns zu der folgenden Definition:

Definition. Sei Φ eine $\mathcal{L}$-Formel und t ein Term von $\mathcal{L}$. Wir sagen daß

t *frei-einsetzbar für* v *in* Φ

ist, wenn an jeder Stelle von Φ, wo v als freie Variable von Φ vorkommt, gilt, daß v nicht einer Teilformel (von Φ) der Form $\forall w{:}\Psi$ oder der Form $\exists w{:}\Psi$ angehört mit $w \in Fr(t)$.

Wir betonen, daß in dieser Definition nicht verlangt wurde, daß die Variable v überhaupt in Φ frei vorkommt.

__10.5__ __Lemma.__ *Sei Φ eine $\mathcal{L}$-Formel,* $Fr(\Phi)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ *und seien* $t_1,t_2,\ldots,t_n$ *Terme von $\mathcal{L}$ derart, daß für jedes* j *mit* $1 \leq j \leq n$ *gilt, daß* t_j *frei-einsetzbar für* v_j *in Φ ist. Dann gilt für jede $\mathcal{L}$-Struktur* $\mathfrak{M}=\langle M,\ldots\rangle$ *und für jede Belegung* $h \in M^{Var}$:

$$val^{h}_{\mathfrak{M}}(\Phi(^{v_1}/_{t_1},{}^{v_2}/_{t_2},\ldots,{}^{v_n}/_{t_n})) = val^{h^*}_{\mathfrak{M}}(\Phi(v_1,v_2,\ldots,v_n)),$$

wobei h^* *als Abkürzung für* $h\left[{}^{v_1}/w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_1),{}^{v_2}/w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_2),\ldots,{}^{v_n}/w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_n)\right]$ *steht.*

__Beweis__ (durch Induktion über den Formelaufbau):

Induktionsverankerung: Wir zeigen, daß die Behauptung für atomare Formeln Φ stimmt. Es gibt zwei Typen von atomaren Formeln, Termgleichungen $s_1 = s_2$, und Relational-Ausdrücke $\dot{R}_k(t_1, t_2, \ldots, t_{\tau(k)})$.

1. Fall: Φ ist die Termgleichung $s_1 = s_2$.

Wegen $Fr(\Phi) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ haben wir $Fr(s_1), Fr(s_2) \subseteq \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Daher:

$$\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(s_1({}^{v_{i_1}}/_{t_{i_1}}, \ldots) = s_2({}^{v_{j_1}}/_{t_{j_1}}, \ldots)) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad w^h_{\mathfrak{M}}(s_1({}^{v_{i_1}}/_{t_{i_1}}, \ldots\ldots)) = w^h_{\mathfrak{M}}(s_2({}^{v_{j_1}}/_{t_{j_1}}, \ldots\ldots))$$

$$\Leftrightarrow \quad s_1(w^h_{\mathfrak{M}}(t_{i_1}), \ldots\ldots) = s_2(w^h_{\mathfrak{M}}(t_{j_1}), \ldots))$$

$$\Leftrightarrow \quad s_1(w^{h^*}_{\mathfrak{M}}(v_{i_1}), \ldots\ldots) = s_2(w^{h^*}_{\mathfrak{M}}(v_{j_1}), \ldots))$$

$$\Leftrightarrow \quad w^{h^*}_{\mathfrak{M}}(s_1(v_{i_1}, \ldots\ldots)) = w^{h^*}_{\mathfrak{M}}(s_2(v_{j_1}, \ldots))$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{val}^{h^*}_{\mathfrak{M}}(s_1(v_{i_1}, \ldots\ldots) = s_2(v_{j_1}, \ldots)) = 1$$

2. Fall: Φ ist $\dot{R}_k(t_1, t_2, \ldots, t_{\tau(k)})$. Dies folgt ganz genauso wie im 1. Fall.

Induktions-Schritt: Die Behandlung der beiden Fälle

$$\Phi \triangleq \neg\Psi \quad \text{und} \quad \Phi \triangleq (\Psi \rightarrow \Theta)$$

ist banal und muß hier nicht vorgeführt werden. Nicht banal ist nur

der Fall $\Phi \triangleq \forall v_d\, \Psi$. Wir behandeln diesen Fall. Aufgrund von 9.3 dürfen wir O.B.d.A. voraussetzen, daß $v_d \in Fr(\Psi)$ ist.

Nach Voraussetzung ist t_j (für $1 \leq j \leq n$) frei-einsetzbar für v_j in Φ, wobei $Fr(\Phi) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Für v_d gilt daher insbesondere:

(†) $\quad v_d \notin Fr(t_1) \cup Fr(t_2) \cup \ldots \cup Fr(t_n)$ und $v_d \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Daher gilt in Bezug auf die Substitution:

(‡) $\quad (\forall v_d\, \Psi)({}^{v_1}/_{t_1}, \ldots, {}^{v_n}/_{t_n}) \triangleq \forall v_d\, (\Psi({}^{v_1}/_{t_1}, \ldots, {}^{v_n}/_{t_n}))$.

Zur Induktion nehmen wir an, daß:

$$(\Diamond)\qquad \begin{cases} \text{für alle Belegungen } g \text{ gilt:} \\ \mathrm{val}^{g}_{\mathfrak{M}}(\Psi({}^{v_1}/_{t_1}, {}^{v_2}/_{t_2}, \ldots, {}^{v_n}/_{t_n})) = \mathrm{val}^{g^*}_{\mathfrak{M}}(\Psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)), \\ \text{wobei } g^* = g\left[{}^{v_1}/w^{g}_{\mathfrak{M}}(t_1), {}^{v_2}/w^{g}_{\mathfrak{M}}(t_2), \ldots, {}^{v_n}/w^{g}_{\mathfrak{M}}(t_n)\right]. \end{cases}$$

Wir vollziehen den Induktions-Schluß und berechnen für eine beliebig vorgegebene Belegung h:

$$\mathrm{val}^{h}_{\mathfrak{M}}(\Phi({}^{v_1}/_{t_1}, \ldots, {}^{v_n}/_{t_n})) = \mathrm{val}^{h}_{\mathfrak{M}}((\forall v_d\, \Psi)({}^{v_1}/_{t_1}, \ldots, {}^{v_n}/_{t_n})) = 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in M$: $\mathrm{val}^{h^o}_{\mathfrak{M}}(\Psi(v_d, {}^{v_1}/_{t_1}, \ldots, {}^{v_n}/_{t_n})) = 1$, wobei $h^o = h\left[{}^{v_d}/_a\right]$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in M$: $\mathrm{val}^{h^\#}_{\mathfrak{M}}(\Psi(v_d, v_1, v_2, \ldots, v_n))) = 1$, nach $(\Diamond)$,

$$\text{wobei } h^\# = h\left[{}^{v_d}/_a, {}^{v_1}/w^{h^o}_{\mathfrak{M}}(t_1), {}^{v_2}/w^{h^o}_{\mathfrak{M}}(t_2), \ldots, {}^{v_n}/w^{h^o}_{\mathfrak{M}}(t_n)\right] =$$

$$= h\left[{}^{v_d}/_a, {}^{v_1}/w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_1), {}^{v_2}/w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_2), \ldots, {}^{v_n}/w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_n)\right],$$

denn $w^{h^o}_{\mathfrak{M}}(t_1) = w^{h}_{\mathfrak{M}}(t_1)$ nach (†) und dem Koinzidenztheorem;

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{val}^{h^*}_{\mathfrak{M}}((\forall v_d\, \Psi)(v_1, v_2, \ldots, v_n))) = 1$, wenn h^* wie oben definiert ist.

Damit ist auch der Induktions-Schluß durchgeführt. ❑

<u>10.6</u> <u>Lemma</u> (dictum de omni). *Sei* Φ *eine* $\mathcal{L}$*-Formel,* $v \in \mathrm{Fr}(\Phi)$ *und sei* t *ein Term von* $\mathcal{L}$ *derart, daß* t *frei-einsetzbar für* v *in* Φ *ist. Dann sind die folgenden Formeln logisch allgemeingültig:*

(1) $(\forall v{:}\Phi(v)) \rightarrow \Phi({}^{v}/_{t})$;

(2) $\Phi({}^{v}/_{t}) \rightarrow \exists v{:}\Phi(v)$;

(3) $(\forall v{:}\Phi(v)) \rightarrow \exists v{:}\Phi(v)$.

<u>Beweis</u>. Zu (1): Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ irgendeine $\mathcal{L}$-Struktur. Wir müssen $\mathfrak{M} \models (\forall v{:}\Phi(v)) \rightarrow \Phi({}^{v}/_{t})$ zeigen. Wir müssen also zeigen, daß

(#) *für jede Belegung* $h \in M^{Var} (\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v{:}\Phi(v)) = 1 \Rightarrow \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi(^v/_t)) = 1)$
gilt. Sei dazu irgendeine Belegung h gegeben und angenommen, daß $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v{:}\Phi(v)) = 1$ gilt, das heißt:

(*) *für alle* $a \in M$: $\mathrm{val}^{h[^v/_a]}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$

Setze $d = w^h_{\mathfrak{M}}(t)$ und sei $h^o = h[^v/d] = h[^v/w^h_{\mathfrak{M}}(t)]$. Nach (*) gilt dann insbesondere für das Element d: $\mathrm{val}^{h^o}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$ und das heißt nach Lemma 10.5, daß $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi(^v/_t)) = 1$. Damit ist (#) bewiesen.

Zu (2): Nach (1) ist $(\forall v{:}\neg\Phi(v)) \rightarrow \neg\Phi(^v/_t)$ logisch allgemeingültig. Daraus folgt durch Kontraposition (Satz 4.1(iii),(vii)), daß auch $\Phi(^v/_t) \rightarrow \neg\forall v{:}\neg\Phi(v)$ logisch allgemeingültig ist. Aus Satz 9.5(1) folgt die Behauptung.

Zu (3): dies folgt sofort aus (1) und (2). ❑

Satz 10.6(1),(3) ist das klassische „dictum de omni": *Was von jedem gilt* $(\forall v{:}\Phi(v))$, *das gilt auch von einigen* $(\exists v{:}\Phi(v))$ *und von einzelnen* $(\Phi(^v/_t))$", - siehe §8, Seite 67.

Das logische Quadrat

In diesem Quadrat werden die vier Urteile

$$\forall x{:}\Phi(x), \qquad \forall x{:}\neg\Phi(x), \qquad \exists x{:}\Phi(x), \qquad \exists x{:}\neg\Phi(x)$$

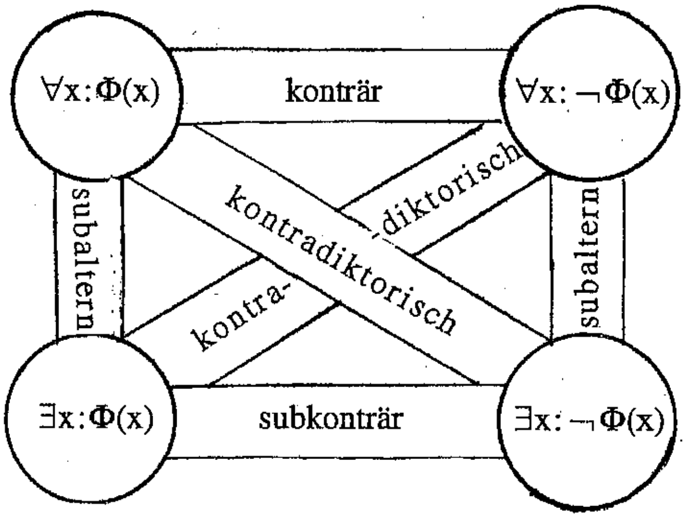
so angeordnet, daß sie die Eckpunkte eines Quadrates bilden. Auf den Verbindungs-Linien wird die Relation notiert, in der die beiden verbundenen Aussagen zueinander stehen. Diese übersichtliche Anordnung geht auf Apuleius von Madaura (*125, † ca. 175) zurück (Abschnitt 5 seines Buches *Peri Hermeneias*). Er schreibt dort:

> „Nunc dicendum est, quemadmodum quattuor illae propositiones inter se affectae sint, quas non ab re est in quadrata formula spectare. Sint igitur in superiore linea, ut infra scriptum est, universalis dedicativa et abdicativa, ut: *Omnis voluptas bonum est, omnis voluptas bonum non est,* dicanturque hae inter se incongruae. Item in inferiore linea sub utraque particulares subnotentur: *Quaedam voluptas bonum est, quaedam non est bonum,* dicanturque inter se hae subpares. Deinde obliquae ducantur lineae angulares, altera pertingens ab universali dedicativa ad particularem

abdicativam, altera a particulari dedicativa ad universalem abdicativam; quae inter se et quantitate et qualitate contrariae alterutrae nominentur, quod iam necesse est alterutram veram esse, quae dicitur perfecta pugna et integra".

„Nun ist zu sagen, in welchen gegenseitigen Beziehungen diese vier Aussagen stehen, und es steht der Sache nicht entgegen, sie in einer quadratischen Figur anzuordnen. In der oberen Linie befinden sich die universell zusprechende Aussage und die universell absprechende Aussage, beispielsweise: *Alle Lust ist gut, alle Lust ist schlecht,* und diese werden miteinander inkongruent genannt. Ferner werden in der unteren Linie unter jede der beiden universellen Aussagen die zugehörigen partikulären Aussagen geschrieben, etwa *Manche Lust ist gut, manche Lust ist schlecht.* Diese beiden könnte man als subpares bezeichnen. Sodann werden die beiden schrägen (obliquae) Diagonal-Linien gezeichnet, wobei die eine von der universell zusprechenden zur partikulär absprechenden Aussage und die andere von der universell-absprechenden zur partikulär zusprechenden Aussage verläuft. Diese Paare von Aussagen stehen sich sowohl der Quantität als auch der Qualität nach gegenüber und können als Alternativen bezeichnet werden. Es ist in der Tat notwendig, daß die eine oder die andere wahr ist, was einen vollständigen und gänzlichen Gegensatz (Widerstreit, pugna) besagt."

Dem Inhalt nach findet sich das logische Quadrat schon bei Aristoteles in der Analytica priora, 2.Buch, XV, 63b25-30, dort allerdings noch nicht in der überzeugenden Anordnung als Quadrat.



Nach Satz 10.4 gilt

$$\models \forall x{:}\Phi(x) \rightarrow \exists x{:}\Phi(x) \qquad \text{und ebenso} \qquad \models \forall x{:}\neg\Phi(x) \rightarrow \exists x{:}\neg\Phi(x).$$

Daher ist $\exists x{:}\Phi(x)$ der Aussage $\forall x{:}\Phi(x)$ *untergeordnet* und ebenso ist $\exists x{:}\neg\Phi(x)$ der Aussage $\forall x{:}\neg\Phi(x)$ *untergeordnet.* Apuleius hat für diese Beziehung keinen Namen vorgeschlagen. Boethius (ca. 480-524) hat dafür das Wort *subalternus* (=untergeordnet) verwendet.

Die Aussagen $\forall x{:}\Phi(x)$ und $\forall x{:}\neg\Phi(x)$ stehen sich unversöhnlich gegenüber. Aristoteles nannte sie ἐναντίας, Apuleius nannte sie 'inkongruent' (unpassend, ungereimt) und Boethius *konträr* (*contrarius* = gegenüberliegend).

Die Aussagen $\forall x{:}\Phi(x)$ und $\exists x{:}\neg\Phi(x)$ widersprechen sich gegenseitig. Aristoteles nannte sie ἀντικειμένας und Apuleius bezeichnete sie als 'Alterutrae' (Alternativen) und Boethius als 'Kontradiktionen'.

Die Aussagen $\exists x{:}\Phi(x)$ und $\exists x{:}\neg\Phi(x)$ sind in der Terminologie von Apuleius *subpares* und in der Terminologie von Boethius *subkonträr.*

10.7 Satz (Leges oppositarium).

(1) **Lex contrariarum** (Aristoteles: *Peri Hermeneias* VII, 17b20-25): *Konträre Urteile können nicht beide zugleich wahr sein.*

(2) **Lex subcontrariarum** (Apuleius: *Peri Hermeneias,* §5): *Subkonträre Urteile können nicht beide zugleich falsch sein.*

(3) **Lex contradictoriarum** (Aristoteles: *Metaphysik,* IV(Γ), VI, 1011b14-15): *Kontradiktorische Urteile können nicht beide denselben Wahrheitswert haben.*

Beweis. Zu (1): Nach Satz 10.6(3) gilt $\models \forall x{:}\Phi(x) \to \exists x{:}\Phi(x)$. Zusammen mit Satz 9.5 heißt das $\models \forall x{:}\Phi(x) \to \neg\forall x{:}\neg\Phi(x)$. Nach Satz 9.4(1) können $\neg\forall x{:}\neg\Phi(x)$ und $\forall x{:}\neg\Phi(x)$ nicht zugleich bestehen. Also können auch $\forall x{:}\Phi(x)$ und $\forall x{:}\neg\Phi(x)$ nicht zugleich bestehen.

Zu (2): Wenn $\exists x{:}\Phi(x)$ und $\exists x{:}\neg\Phi(x)$ zugleich falsch wären, dann wären $\neg\exists x{:}\neg\neg\Phi(x)$ und $\neg\exists x{:}\neg\Phi(x)$ zugleich wahr. Nach Satz 9.5 wären dann also $\forall x{:}\neg\Phi(x)$ und $\forall x{:}\Phi(x)$ zugleich wahr, war aber nach (1) unmöglich ist.

Zu (3): Das ist nach Satz 9.4(1) und 9.5(1) klar. ❑

Übungsaufgaben zu §10

(1) Geben Sie eine $\mathcal{L}$-Formel Φ an mit $\mathrm{Fr}(\Phi) = \{ v_0, v_1 \}$, für die Sie beweisen können, daß $(\exists v_0 \forall v_1 \colon \Phi) \leftrightarrow (\forall v_1 \exists v_0 \colon \Phi)$ logisch-allgemeingültig ist. .

(2) Es seien Φ und Ψ beliebige $\mathcal{L}$-Formeln. Zeigen Sie, daß die folgenden Distributiv-Gesetze logisch-allgemeingültig sind:

für die Implikation „$\rightarrow$“:

(a) $\exists v(\Phi \rightarrow \Psi) \leftrightarrow (\forall v\Phi \rightarrow \exists v\Psi)$.

(b) $\forall v(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\forall v\Phi \rightarrow \forall v\Psi)$.

(c) $\forall v(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\exists v\Phi \rightarrow \exists v\Psi)$.

für die Bi-Implikation „$\leftrightarrow$“:

(d) $\forall v(\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow (\forall v\Phi \leftrightarrow \forall v\Psi)$.

(e) $\forall v(\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow (\exists v\Phi \leftrightarrow \exists v\Psi)$.

für die Konjunktion „$\wedge$“:

(f) $\forall v(\Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow (\forall v{:}\Phi \wedge \forall v{:}\Psi)$

(g) $(\forall v{:}\Phi \wedge \exists v{:}\Psi) \rightarrow \exists v(\Phi \wedge \Psi)$

(h) $\exists v(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow (\exists v{:}\Phi \wedge \exists v{:}\Psi)$

für die Disjunktion „$\vee$“:

(i) $\exists v(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\exists v{:}\Phi \vee \exists v{:}\Psi)$

(j) $\forall v(\Phi \vee \Psi) \rightarrow (\forall v{:}\Phi \vee \exists v{:}\Psi)$

(k) $(\forall v{:}\Phi \vee \forall v{:}\Psi) \rightarrow \forall v(\Phi \vee \Psi)$

§11. *Der Begriff der Folgerung*

Wenn Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und Φ eine einzelne $\mathcal{L}$-Aussage ist, dann definieren wir ähnlich wie in §5:

Φ *folgt aus* Σ (in Zeichen: $\Sigma \models \Phi$),

wenn für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ gilt:

wenn $\mathfrak{M} \models \Sigma$, dann auch $\mathfrak{M} \models \Phi$.

Wir benutzen das Zeichen $\models$ also nicht nur für die Gültigkeit von Formeln in Strukturen, sondern - wie schon in Kapitel I - auch zur Bezeichnung der Folgerungs-Beziehung. Verwechslungen sind nicht zu befürchten, weil immer klar sein wird, ob links neben dem Zeichen $\models$ eine Formelmenge oder eine Struktur steht.

Dieser Folgerungs-Begriff ist in der Mathematik durchaus üblich. Wenn man beispielsweise zeigen will, daß das Kommutativ-Gesetz $\forall x \forall y: x \bullet y = y \bullet x$ *nicht* aus den Axiomen der Gruppen-Theorie T_G (oder T^*_G, siehe §8) *folgt,* dann gibt man irgendein Beispiel für eine nicht-kommutative Gruppe an, etwa die Symmetrische Gruppe Sym(3) mit 6 Elementen. Wenn man zeigen will, daß das Parallelen-Axiom *nicht* aus den übrigen Axiomen der Euklidischen Geometrie *folgt,* dann konstruiert man (nach Gauß, Bolyai, Lobatschefskij) ein Modell der Geometrie, in dem das Parallelen-Axiom verletzt ist.

In der obigen Definition wurde vorausgesetzt, daß Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und Φ eine einzelne $\mathcal{L}$-Aussage ist. Man möchte aber manchmal auch aus Mengen von $\mathcal{L}$-Formeln Folgerungen ziehen.

Dies ist ja auch in der Mathematik üblich, etwa wenn man einen Satz der Form $\forall x{:}\Phi(x)$ beweisen will und zu Beginn des Beweises sagt: „wähle x beliebig und halte es fest". Dann werden Zwischenbehauptungen $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots$ aufgestellt, aus denen schließlich $\Phi(x)$ gefolgert wird. Da x beliebig war, schließt man am Ende auf $\forall x{:}\Phi(x)$.

Ganz wesentlich in derartigen Beweisen ist, daß „x festgehalten wird" und daß x stets dieselbe Interpretation haben soll. Dies führt uns zu der folgenden allgemeineren Fassung des Folgerungs-Begriffes, die auf Bolzano zurückgeht (cf. „Wissenschaftslehre", Sulzbach 1837, Band 2, p.110 und p.114).

Definition (Bernard Bolzano, 1837). Sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln und Φ eine einzelne $\mathcal{L}$-Formel. Dann sagen wir:

Φ *folgt aus* Σ (in Zeichen: $\Sigma \models \Phi$),

wenn für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ und jede Belegung h: $\mathcal{V}ar \to M$ gilt:

wenn $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$ für alle $\Psi \in \Sigma$ gilt, dann gilt auch $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$.

Diskussion. Wir schreiben $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Sigma) = 1$ als Abkürzung für „$\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$ für alle $\Psi \in \Sigma$". Dann können wir die obige Definition wie folgt wiedergeben:

$$\Sigma \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathfrak{M}\, \forall h \big(\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Sigma) = 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1\big).$$

Es wäre falsch, stattdessen $\forall \mathfrak{M}\, \big((\forall h\colon\ \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Sigma) = 1) \Rightarrow (\forall h\colon\ \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1)\big)$ zu schreiben, denn sonst könnte man beispielsweise aus der erfüllbaren Formel $v \neq \dot{c}$ die unerfüllbare Formel $\forall v\colon v \neq \dot{c}$, also auch $\dot{c} \neq \dot{c}$ folgern [beachte, daß $\forall h\colon\ \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(v \neq \dot{c}) = 1$ immer falsch ist, denn es gibt ja auch Belegungen h mit $h(v) = \dot{c}$. Aus einer falschen Voraussetzung folgt bekanntlich alles, also auch $\forall h\colon\ \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\forall v\colon v \neq \dot{c}) = 1$].

Wenn Σ die leere Menge ist, dann schreiben wir einfach $\models \Phi$ statt $\varnothing \models \Phi$.
Wenn Σ eine endliche Menge von $\mathcal{L}$-Formeln ist, $\Sigma = \{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k\}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k\} \models \Phi \quad &\Leftrightarrow \quad \models (\Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge \ldots \wedge \Psi_k) \rightarrow \Phi \\ &\Leftrightarrow \quad \models \Psi_1 \rightarrow (\Psi_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (\Psi_k \rightarrow \Phi)\ldots)). \end{aligned}$$

Statt $\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k\} \models \Phi$ schreiben wir auch $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k \models \Phi$.

Der Folgerungs-Begriff der Quantoren-Logik erweitert den Folgerungs-Begriff der Junktorenlogik, denn für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ und jede Belegung h ist $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}$ nach Proposition 9.2 eine Wahrheitswert-Zuordnung, die auf der Menge aller $\mathcal{L}$-Formeln definiert ist (vergleiche Proposition 10.1). Das Export-Import-Theorem 5.1 ist auch in der Quantoren-Logik gültig.

11.1 Proposition. *Sei Φ eine $\mathcal{L}$-Formel und Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln. Sei v_n eine Variable so, daß für jedes $\Psi \in \Sigma$: $v_n \notin Fr(\Phi) \cap Fr(\Psi)$ ist. Dann gilt:*

$$\Sigma \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \models \forall v_n \, \Phi .$$

Beweis. Wir beweisen zunächst „$\Rightarrow$“: Wir nehmen $\Sigma \models \Phi$ an und das heißt ausführlich ausgeschrieben:

$$(\dagger) \quad \begin{cases} \text{für alle } \mathcal{L}\text{-Strukturen } \mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle \text{ und alle Belegungen } g\colon \mathcal{V}ar \to M \text{ gilt:} \\ \text{wenn } val^g_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1 \text{ für jedes } \Psi \in \Sigma \text{ gilt, dann gilt auch } val^g_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1. \end{cases}$$

Wir müssen $\Sigma \models \forall v_n \, \Phi$ zeigen! Wir müssen also die folgende Aussage (‡) beweisen:

$$(\ddagger) \quad \begin{cases} \text{für alle } \mathcal{L}\text{-Strukturen } \mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle \text{ und alle Belegungen } h\colon \mathcal{V}ar \to M \text{ gilt:} \\ \text{wenn } val^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1 \text{ für jedes } \Psi \in \Sigma \text{ gilt, dann gilt auch für alle } a \in M\text{:} \\ val^{h^*}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1, \text{ wobei } h^* = h\left[{}^{v_n}/a\right]. \end{cases}$$

Seien $\mathfrak{M}$ und h gegeben so, daß

$$(\#) \qquad \text{für jedes } \Psi \in \Sigma: \quad val^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$$

gilt. Sei ferner $a \in M$ beliebig und definiere h^* wie in (‡).

1. Fall: Für jedes $\Psi \in \Sigma$ gilt $v_n \notin Fr(\Psi)$.

Dann sind die Einschränkungen von h und von h^* auf $Fr(\Psi)$ gleich, und nach dem Koinzidenz-Theorem und nach (#) gilt

$$1 = val^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = val^{h^*}_{\mathfrak{M}}(\Psi) .$$

Nach (†), aber mit h^* anstelle von g, folgt daraus $val^{h^*}_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$, und das war zu zeigen gewesen.

2. Fall: Es gilt $v_n \notin Fr(\Phi)$:

Aus (#) folgt nach (†) (mit h anstelle von g): $val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$. Aus $v_n \notin Fr(\Phi)$ folgt aber, daß die Einschränkungen von h und von h^* auf $Fr(\Phi)$ gleich sind, und nach dem Koinzidenz-Theorem gilt daher $1 = val^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = val^{h^*}_{\mathfrak{M}}(\Phi)$ und das war zu zeigen gewesen.

Umkehrung „$\Leftarrow$“: Wir nehmen jetzt $\Sigma \models \forall v_n \, \Phi$ an und das ist (‡). Wir müssen $\Sigma \models \Phi$ zeigen, und das ist (†). Seien dazu $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ und g: $\mathcal{V}ar \to M$ gegeben mit $val^g_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$ für jedes $\Psi \in \Sigma$. Mit $a = g(v_n)$ folgt nach (‡) daraus $val^g_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$, denn $g = g^* := g\left[{}^{v_n}/a\right]$. ❑

Das folgende Korollar ist ein Seitenstück zu Proposition 9.3:

11. 2 Korollar. *Sei* Φ *eine* $\mathcal{L}$*-Formel,* $Fr(\Phi) = \{v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_k}\}$ *und sei* $\forall v_{n_1} \forall v_{n_2} \ldots \forall v_{n_k} \Phi$ *der universelle Abschluß von* Φ*. Wenn* Σ *eine Menge von* $\mathcal{L}$*-Formeln ist mit* $Fr(\Phi) \cap Fr(\Psi) = \emptyset$ *für jedes* $\Psi \in \Sigma$*, dann gilt:*

$$\Sigma \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \models \forall v_{n_1} \forall v_{n_2} \ldots \forall v_{n_k} \Phi.$$

Beweis. Das folgt sofort aus 11.1. ❑

Definition. Zwei $\mathcal{L}$-Formeln Φ und Ψ heißen *logisch-äquivalent* (in Zeichen: $\Phi \mathrel{=\!\mid\models} \Psi$), wenn $\Phi \leftrightarrow \Psi$ eine Tautologie ist, mit anderen „Worten", wenn sowohl $\Phi \models \Psi$ als auch $\Psi \models \Phi$ gilt.

Definition. Eine $\mathcal{L}$-Formel der Gestalt $Q_1 v_{n_1} Q_2 v_{n_2} \ldots Q_k v_{n_k} \Phi$ wird *pränexe Normalform* genannt, wenn Φ quantorenfrei ist und die Q_i Quantoren sind (also entweder die Form $\forall$ oder $\exists$ haben). Dabei ist $Q_1 v_{n_1} Q_2 v_{n_2} \ldots Q_k v_{n_k}$ das *Präfix* und Φ der *Kern* der Formel.

Das Wort „pränex" ist ein neulateinisches Kunstwort. Es ist aus *nexus* (=die Umschlingung) und der Vorsilbe *prae* (=voran, voraus) gebildet. nexĕre heißt *knüpfen, zusammenbinden, umschlingen.* In einer pränexen Normalform „umschlingt" ein Block von Quantoren eine Formel, in der kein einziger Quantor mehr auftritt. Ein *Praefix* (lat. praefixum) ist ein „vorn angefügter" Gegenstand. Figĕre heißt „befestigen, anfügen, anheften" und praefigĕre heißt „vorn anheften, mit einem Praefix versehen".

11.3 Theorem von der *pränexen Normalform* (Leopold Löwenheim, 1915). *Jede* $\mathcal{L}$*-Formel* Φ *ist logisch-äquivalent mit einer* $\mathcal{L}$*-Formel* Ψ *in praenexer Normalform, wobei* $Fr(\Phi) = Fr(\Psi)$ *gilt.*

Beweis (durch Induktion über den Formelaufbau).

(1) Wenn Φ quantorenfrei ist, dann ist setzen wir $\Psi \triangleq \Phi$ und es ist nichts zu beweisen.

(2) Sei $\Phi \triangleq \neg\Theta$ und zur Induktion sei angenommen, daß Θ mit einer Formel in pränexer Normalform $Q_1 v_{n_1} Q_2 v_{n_2} \ldots Q_k v_{n_k} \Delta$ (wobei Δ quantorenfrei ist) logisch-äquivalent sei, welche dieselben freien Variablen hat.. Wir schreiben

$$\forall^{-1} \triangleq \exists \quad und \quad \exists^{-1} \triangleq \forall.$$

Nach Satz 9.5(1) ist dann $\neg\Theta$ mit $Q_1^{-1} v_{n_1} Q_2^{-1} v_{n_2} \ldots Q_k^{-1} v_{n_k} \neg\Delta$ logisch äquivalent und beide Formeln haben weiterhin dieselben freien Variablen.

(3) Sei $\Phi \triangleq \forall v_i \Theta$ und zur Induktion sei angenommen, daß Θ mit einer pränexen Formel $Q_1 v_{n_1} Q_2 v_{n_2} \ldots Q_k v_{n_k} \Delta$ (wobei Δ quantorenfrei ist) logisch-äquivalent sei, wobei $Fr(\Theta) = Fr(Q_1 v_{n_1} Q_2 v_{n_2} \ldots Q_k v_{n_k} \Delta)$. Dann ist $\forall v_i \Theta$ offenbar mit der pränexen Formel $\forall v_i Q_1 v_{n_1} Q_2 v_{n_2} \ldots Q_k v_{n_k} \Delta$ logisch-äquivalent und beide Formeln haben dieselben freien Variablen.

(4) Sei $\Phi \triangleq (A \to B)$ und zur Induktion sei angenommen, daß

$$A \dashv\models Q_1 v_{n_1} Q_2 v_{n_2} \ldots Q_k v_{n_k} \Delta \quad \text{mit} \quad Fr(A) = Fr(Q_1 v_{n_1} \ldots Q_k v_{n_k} \Delta), \text{ und}$$

$$B \dashv\models R_1 v_{i_1} R_2 v_{i_2} \ldots R_m v_{i_m} \Gamma \quad \text{mit} \quad Fr(B) = Fr(R_1 v_{i_1} \ldots R_m v_{i_m} \Gamma)$$

für geeignete quantorenfreie $\mathcal{L}$-Formeln Δ und Γ und gewissen Quantoren Q_j und R_j. Sei d die kleinste natürliche Zahl, so daß für jede in

$$(Q_1 v_{n_1} Q_2 v_{n_2} \ldots Q_k v_{n_k} \Delta) \wedge (R_1 v_{i_1} R_2 v_{i_2} \ldots R_m v_{i_m} \Gamma)$$

vorkommende (gebundene oder freie) Variable v_j stets $j < d$ gilt. Sei Δ^* diejenige Formel, die aus Δ entsteht, indem man simultan jede Variable v_{n_j} überall dort, wo sie in Δ frei vorkommt, durch v_{d+n_j} ersetzt. Sei Γ^{**} diejenige Formel, die aus Γ entsteht, indem man simultan jede Variable v_{i_j} überall dort, wo sie in Γ frei vorkommt, durch v_{2d+i_j} ersetzt.

Es werden also nur die Variablen, die in den jeweiligen Quantoren-Praefixen gebunden werden, durch andere ersetzt. Das heißt insbesondere, daß $Q_1 v_{n_1} \ldots Q_k v_{n_k} \Delta$ und $Q_1 v_{d+n_1} \ldots Q_k v_{d+n_k} \Delta^*$ die selben freien Variablen haben. Auch $R_1 v_{i_1} \ldots R_m v_{i_m} \Gamma$ und $R_1 v_{2d+i_1} \ldots R_m v_{2d+i_m} \Gamma^{**}$ haben dieselben freien Variablen. - Offenbar gilt jetzt:

(*) $\quad Q_1 v_{n_1} \ldots Q_k v_{n_k} \Delta \dashv\models Q_1 v_{d+n_1} Q_2 v_{d+n_2} \ldots Q_k v_{d+n_k} \Delta^*$

(**) $\quad R_1 v_{i_1} \ldots R_m v_{i_m} \Gamma \dashv\models R_1 v_{2d+i_1} R_2 v_{2d+i_2} \ldots R_m v_{2d+i_m} \Gamma^{**}$

Aus (*) und (**) folgt jetzt offenbar:

$A \to B \ \dashv\models$

$(Q_1 v_{d+n_1} Q_2 v_{d+n_2} \ldots Q_k v_{d+n_k} \Delta^*) \to (R_1 v_{2d+i_1} R_2 v_{2d+i_2} \ldots R_m v_{2d+i_m} \Gamma^{**})$

Da nach Wahl von d die Quantoren-Praefixe disjunkte Blöcke von Variablen regieren, können wir Lemma 10.3 anwenden und dabei die Quantoren Q_j und R_j der Reihe nach in $k+m$ Schritten herausziehen. Damit folgt:

$$(Q_1 v_{d+n_1} Q_2 v_{d+n_2} \ldots Q_k v_{d+n_k} \Delta^*) \to (R_1 v_{2d+i_1} R_2 v_{2d+i_2} \ldots R_m v_{2d+i_m} \Gamma^{**})$$

$$\dashv\models Q_1^{-1} v_{d+n_1} Q_2^{-1} v_{d+n_2} \ldots Q_k^{-1} v_{d+n_k} R_1 v_{2d+i_1} \ldots R_m v_{2d+i_m} (\Delta^* \to \Gamma^{**}).$$

Damit ist ein Ausdruck in pränexer Normalform gefunden worden, der mit $A \to B$ logisch-äquivalent ist. Damit ist die Induktion durchgeführt. ❑

Im Beweis oben [im Fall (4): $\Phi \triangleq (A \to B)$] ist auch

$$R_1 v_{2d+i_1} \ldots R_m v_{2d+i_m} Q_1^{-1} v_{d+n_1} Q_2^{-1} v_{d+n_2} \ldots Q_k^{-1} v_{d+n_k} (\Delta^* \to \Gamma^{**})..$$

ein Ausdruck in pränexer Normalform, der mit $A \to B$ logisch-äquivalent ist. Ob man zuerst den Quantoren-Praefix $Q_1 v_{d+n_1} Q_2 v_{d+n_2} \ldots Q_k v_{d+n_k}$ und dann $R_1 v_{2d+i_1} R_2 v_{2d+i_2} \ldots R_m v_{2d+i_m}$ aus der Klammer herauszieht, oder in umgekehrter Reihenfolge vorgeht, ist gleichgültig. Das macht deutlich, daß die pränexe Normalform einer beliebigen $\mathcal{L}$-Formel nicht eindeutig bestimmt ist.

Übungsaufgaben zu §11

(1) Für eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Formeln sei $Fg(\Sigma) = \{\Phi \in \mathcal{L}; \Sigma \models \Phi\}$ die Menge aller Folgerungen (Konsequenzen) aus Σ. Offenbar gilt: $\Sigma \subseteq Fg(\Sigma)$. Zeigen Sie:

(i) $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \Rightarrow Fg(\Sigma_1) \subseteq Fg(\Sigma_2)$,

(ii) $Fg(\Sigma) = Fg(Fg(\Sigma))$.

(2) Geben Sie für die folgenden Formeln logisch-äquivalente Formeln in praenexer Normalform an:

(i) $\forall v_0 (\forall v_1 : v_1 = v_0 + v_2 \to \exists v_1 : v_1 + v_2 = v_0)$,

(ii) $\forall v_0 (\forall v_1 \exists v_2 : v_1 + v_3 = v_0 + v_2 \to \exists v_2 \forall v_0 : v_1 + v_2 = v_0 + v_2)$.

§12. *Ein Prädikaten-Kalkül*

Wir möchten jetzt, ähnlich wie in der Junktoren-Logik, dem semantischen Folgerungs-Begriff einen syntaktischen Deduktions-Begriff zur Seite stellen. Ein solcher Deduktions-Begriff soll natürlich genauso stark sein wie der Folgerungs-Begriff. Wir werden jetzt einen Deduktions-Begriff mit Hilfe eines Kalküls entwickeln und zunächst auch seine Korrektheit zeigen: jede Formel, die in unserem Kalkül aus einer Menge Σ von Prämissen herleitbar ist, ist auch eine Folgerung aus Σ. Daß unser Kalkül vollständig ist, werden wir erst in §14 zeigen können.

Im Folgenden sei $\mathcal{L}$ immer die Sprache (erster Stufe), deren einzige logische Zeichen $\neg, \rightarrow, \forall, =$ sind.

Unserem Kalkül legen wir sechs Tautologien zugrunde. Sie spielen die Rolle von Axiomen.

Die Quantorenlogischen Axiome. Für beliebige $\mathcal{L}$-Formeln Φ und Ψ und beliebige Terme t von $\mathcal{L}$ werden die folgenden Formeln als 'Quantorenlogische Axiome' bezeichnet:

(Q1) $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$,

(Q2) $(\neg\Psi) \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$,

(Q3) Falls $v_n \notin Fr(\Psi)$, dann ist auch die folgende Formel ein Axiom:

$$(\forall v_n(\Psi \rightarrow \Phi)) \rightarrow (\Psi \rightarrow \forall v_n \Phi),$$

(Q4) Falls der Term t frei-einsetztbar für v_n in Φ ist, dann ist die folgende Formel ein Axiom (das sogenannte 'dictum de omni'):

$$(\forall v_n \Phi) \rightarrow \Phi({}^{v_n}/_t),$$

(Q5) Reflexivität der Gleichheit: $t = t$.

(Q6) Falls $v_n \in Fr(\Phi)$ und v_m frei-einsetzbar für v_n in Φ ist, und wenn Φ^* aus Φ dadurch hervorgeht, daß man an einigen (nicht notwendig an allen) Stellen, an denen v_n frei vorkommt, v_n durch v_m ersetzt, dann ist auch die folgende Formel ein Axiom:

$$v_n = v_m \rightarrow (\Phi \rightarrow \Phi^*).$$

Beachte, daß in (Q4) nicht verlangt wird, daß v_n überhaupt in Φ frei vorkommt! Also erlaubt (Q4), überflüssige Quantoren wegzuschaffen.
Wir hatten schon in der Junktoren-Logik bemerkt (§6), daß die Axiome (Q1) und (Q2) zusammen mit dem **modus ponens** eine implizite Definition der Negation und der Implikation liefern. Wir bemerken jetzt, daß mit den Axiomen (Q3) und (Q4) und der Generalisierungs-Regel eine implizite Definition des All-Quantors und mit den Axiomen (Q5) und (Q6) eine implizite Definition der Gleichheit erreicht werden soll. - Wir können jetzt den Kalkül angeben. Wie üblich wird ein derartiger Kalkül als *Prädikaten-Kalkül* bezeichnet. Wir orientieren uns am Aussagen-Kalkül aus §6. Die Regeln des Kalküls gestatten, gewisse 'Beweis-Figuren' hinzuschreiben. Solche Beweis-Figuren sind wie in §6 endliche Folgen (Sequenzen) von $\mathcal{L}$-Formeln.

Ein Prädikaten-Kalkül für $\mathcal{L}$

Regel (P1): Wenn Δ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Formeln ist und Φ eines der in (Q1),...,(Q6) angegebenen quantorenlogischen Axiome ist, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash \Phi$ hinschreiben.

Regel (P2): Wenn Δ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Formeln ist und Φ in dieser Liste vorkommt, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash \Phi$ hinschreiben.

Regel (P3), genannt: *Verdünnungs-Regel* Wenn man $\Delta \vdash \Psi$ hinschreiben darf und wenn Σ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Formeln ist, in der mindestens alle Formeln aus Δ vorkommen, dann darf man auch $\Sigma \vdash \Psi$ hinschreiben.

Regel (P4), genannt ***modus ponens:*** Wenn Δ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Formeln ist, Φ und Ψ $\mathcal{L}$-Formeln sind, und wenn man $\Delta \vdash \Phi$ und $\Delta \vdash \Phi \rightarrow \Psi$ hinschreiben darf, dann darf man auch $\Delta \vdash \Psi$ hinschreiben.

Regel (P5), genannt *Fallunterscheidung*: Wenn Δ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Formeln ist und Φ und Ψ beliebige $\mathcal{L}$-Formeln sind, und wenn man $\Delta, \Phi \vdash \Psi$ und auch $\Delta, \neg\Phi \vdash \Psi$ hinschreiben darf, dann darf man auch $\Delta \vdash \Psi$ hinschreiben.

Regel (P6), genannt *Generalisierungs-Regel:* Wenn man $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k \vdash \Phi$ hinschreiben darf und $v_n \notin Fr(\Phi) \cap (Fr(\Psi_1) \cup \ldots \cup Fr(\Psi_k))$ gilt, dann darf man auch $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k \vdash \forall v_n \Phi$ hinschreiben.

In der Verdünnungs-Regel (P3) wird nicht verlangt, daß Σ eine Fortsetzung (Verlängerung) der Liste Δ sei. Die Reihenfolge, in der die Ausdrücke aus Δ in der Liste Σ wiederkehren, ist beliebig. Daher fällt die folgende Vertauschungs-Regel unter die Verdünnungs-Regel (P3):

Vertauschungs-Regel (P7):	Wenn man $\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_n \vdash \Phi$ hinschreiben darf und wenn π eine Permutation der Ziffern 1,2,...,n ist, dann darf man auch $\Psi_{\pi(1)},\Psi_{\pi(2)},\ldots,\Psi_{\pi(n)} \vdash \Phi$ hinschreiben.

<u>12.1</u> <u>Definition.</u> Sei $\Phi \in \mathcal{L}$ und $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$. Wir sagen, daß Φ *aus* Σ *herleitbar ist* [in Zeichen: $\Sigma \vdash \Phi$, oder auch $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \Phi$, wenn der Bezug auf die Sprache $\mathcal{L}$ betont werden soll], wenn es endlich viele $\mathcal{L}$-Formeln $\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_m \in \Sigma$ gibt, so daß die Sequenz $\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_m \vdash \Phi$ aufgrund der Regeln (P1) bis (P6) des Prädikaten-Kalküls hingeschrieben werden darf [Auf die Reihenfolge der Prämissen kommt es dabei nach (P7) nicht an!].

Alle Regel (R1),..,(R6) des Aussagen-Kalküls aus §6 stehen auch als Regeln des Prädikaten-Kalküls zur Verfügung. Wir können daher auf die Lemmata und Propositionen von §6 zurückgreifen. Insbesondere stehen uns der Ketten-Schluß (Übungs-Aufgabe §6, Nr.1) und das Deduktions-Theorem 6.4 auch hier zur Verfügung.

<u>12.2</u> <u>Satz</u> (Korrektheit des Prädikaten-Kalküls) *Sei $\Phi \in \mathcal{L}$ und $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$. Wenn Φ aus Σ hergeleitet werden kann, dann ist Φ auch eine Folgerung aus Σ, mit anderen 'Worten':*

$$\textit{wenn}\quad \Sigma \vdash \Phi,\ \textit{dann}\quad \Sigma \models \Phi\,.$$

<u>Beweis</u>. <u>1. Teil</u>: Wir zeigen zuerst (durch Induktion über die Anzahl der Beweis-Schritte), daß für jede Sequenz $\Delta \vdash \Phi$, die aufgrund der Regeln (P1) bis (P6) hingeschrieben werden darf, immer $\Delta \models \Phi$ gilt.

Für (P1), (P2), (P3), (P4) und (P5) ist dies trivial, denn die quantorenlogischen Axiome sind nach 10.3 und 10.6 Tautologien und (P3), (P4) und (P5) wurden schon im Beweis der Korrektheit des Aussagen-Kalküls (Satz 6.3) abgehandelt.

Zu (P6): Wir nehmen an, daß wir $\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_k \vdash \Phi$ hinschreiben dürfen und daß $v_n \notin \mathrm{Fr}(\Phi) \cap (\mathrm{Fr}(\Psi_1) \cup \mathrm{Fr}(\Psi_2) \cup \ldots \cup \mathrm{Fr}(\Psi_k))$ gilt. Zur Induktion nehmen wir $\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_k \models \Phi$ an. Die Generalisierungs-Regel (P6) erlaubt uns,

$\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_k \vdash \forall v_n \Phi$ hinzuschreiben. Aber aus $\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_k \models \Phi$ folgt mit Proposition 11.1 sofort $\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_k \models \forall v_n \Phi$ und das war zu zeigen gewesen.

2. Teil: Wenn jetzt Σ eine beliebige Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist für die $\Sigma \vdash \Phi$ gilt, dann gibt es definitionsgemäß (Def. 11.1) eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Sigma$ so, daß $\Delta \vdash \Phi$ aufgrund der Regeln (P1) bis (P6) hingeschrieben werden darf. Nach dem Ergebnis des ersten Teiles gilt dann auch $\Delta \models \Phi$. Wegen $\Delta \subseteq \Sigma$ gilt dann aber erst recht $\Sigma \models \Phi$. ❑

Daß von Satz 12.2 auch die Umkehrung gilt, werden wir in §14 zeigen. Als Vorbereitungen dazu dienen die folgenden Lemmata.

12.3 Lemma: *Sei* t *ein Term von* $\mathcal{L}$, $v_n \in \mathrm{Fr}(t)$, *und sei* t^* *ein Term, der aus* t *hervorgeht, indem man an einigen Stellen (aber nicht notwendig an allen Stellen)* v_n *durch* v_m *ersetzt. Dann gilt*

$$\vdash (v_n = v_m) \rightarrow t = t^*.$$

Beweis. Sei $\Phi \triangleq (t = t)$ und $\Phi^* \triangleq (t = t^*)$. Dann gilt mit Axiom (Q6) nach Regel (P1):

(i) $$\vdash (v_n = v_m) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Phi^*).$$

Mit dem Deduktions-Theorem erhalten wir daraus nach zweifacher Anwendung:

(ii) $$(v_n = v_m), \Phi \vdash \Phi^*.$$

Mit der Vertauschungs-Regel (P7) erhalten wir $\Phi, (v_n = v_m) \vdash \Phi^*$ und daraus nach zweifacher Anwendung des Deduktionstheorems:

(iii) $$\vdash \Phi \rightarrow (v_n = v_m \rightarrow \Phi^*).$$

Dabei ist Φ eine Abkürzung für $t = t$. Nach Regel (P1) und (Q5) gilt $\vdash t = t$. Daraus und aus (iii) folgt mit modus ponens $\vdash v_n = v_m \rightarrow \Phi^*$ und das war zu zeigen gewesen. ❑

12.4 Lemma: *Sei* Φ *eine* $\mathcal{L}$-*Formel,* $v_i \in \mathrm{Fr}(\Phi)$, $v_n \notin \mathrm{Fr}(\Phi)$ *und* v_n *frei-einsetzbar für* v_i *in* Φ. *Dann gilt:*

$$\vdash (\forall v_i \Phi(v_i)) \rightarrow \forall v_n \Phi({}^{v_i}/_{v_n}).$$

Beweis. (i) $\vdash (\forall v_i\, \Phi(v_i)) \rightarrow \Phi({}^{v_i}/{}_{v_n})$ nach (P1) mit (Q4),

(ii) $\vdash \forall v_n((\forall v_i\, \Phi(v_i)) \rightarrow \Phi({}^{v_i}/{}_{v_n}))$ aus (i) mit (P6),

(iii) $\vdash (\forall v_i\, \Phi(v_i)) \rightarrow \forall v_n\, \Phi({}^{v_i}/{}_{v_n})$ aus (ii) und (Q3) (denn $v_n \notin \mathrm{Fr}(\Phi)$, $i \neq n$) mit modus ponens. ❑

12.5 Lemma: *Für Terme* t_1, t_2, t_3 *von* $\mathcal{L}$ *gilt:*

(1) $\vdash t_1 = t_1$;

(2) $\vdash t_1 = t_2 \rightarrow t_2 = t_1$;

(3) $\vdash t_1 = t_2 \rightarrow (t_2 = t_3 \rightarrow t_1 = t_3)$.

Beweis. Zu (1): Dies gilt nach (P1) in Verbindung mit (Q5).

Zu (2): Wähle zwei Variable, die nicht in $\mathrm{Fr}(t_1) \cup \mathrm{Fr}(t_2)$ liegen, etwa (o.B.d.A.) v_1 und v_2. Sei $\Phi \triangleq (v_1 = v_1)$. Dann haben wir:

(i) $\vdash v_1 = v_2 \rightarrow (\underbrace{v_1 = v_1}_{\Phi} \rightarrow \underbrace{v_2 = v_1}_{\Phi^*})$ nach (Q6),(P1).

(ii) $v_1 = v_2, v_1 = v_1 \vdash v_2 = v_1$ aus (i) mit dem Deduktions-Theorem,

(iii) $v_1 = v_1, v_1 = v_2 \vdash v_2 = v_1$ aus (ii) mit der Vertauschungsregel (P7)

(iv) $\vdash v_1 = v_1 \rightarrow (v_1 = v_2 \rightarrow v_2 = v_1)$ aus (iii) mit Deduktions-Theorem,

(v) $\vdash v_1 = v_1$ nach (Q5) zusammen mit (P1),

(vi) $\vdash v_1 = v_2 \rightarrow v_2 = v_1$ aus (iv) und (v) mit modus ponens,

(vii) $\vdash \forall v_1(v_1 = v_2 \rightarrow v_2 = v_1)$ aus (vi) mit (P6),

(viii) $\vdash \forall v_1(v_1 = v_2 \rightarrow v_2 = v_1) \rightarrow (t_1 = v_2 \rightarrow v_2 = t_1)$ aus (Q4),

(ix) $\vdash t_1 = v_2 \rightarrow v_2 = t_1$ aus (vii), (viii) mit modus ponens,

(x) $\vdash \forall v_2(t_1 = v_2 \rightarrow v_2 = t_1)$ aus (ix) mit (P6),

(xi) $\vdash t_1 = t_2 \rightarrow t_2 = t_1$ aus (x) mit (Q4) und modus ponens.

Zu (3): Wähle drei Variable, die nicht in $\mathrm{Fr}(t_1) \cup \mathrm{Fr}(t_2) \cup \mathrm{Fr}(t_3)$ liegen, etwa (o.B.d.A.) v_1, v_2 und v_3. Sei $\Phi \triangleq (v_2 = v_3)$. Dann haben wir:

(j) $\vdash v_2 = v_1 \to (\underbrace{v_2 = v_3}_{\Phi} \to \underbrace{v_1 = v_3}_{\Phi^*})$ nach (Q6),(P1).

(jj) $\vdash v_1 = v_2 \to v_2 = v_1$ nach (2),

(jjj) $\vdash v_1 = v_2 \to (v_2 = v_3 \to v_1 = v_3)$ nach (j) und (jj) mit der Kettenregel (§6, Aufgabe 1),

(jv) $\vdash \forall v_1(v_1 = v_2 \to (v_2 = v_3 \to v_1 = v_3))$ aus (jjj) mit (P6),

(v) $\vdash t_1 = v_2 \to (v_2 = v_3 \to t_1 = v_3)$ aus (jv) mit (Q4) und modus ponens. Genauso verfährt man, um v_2 durch t_2 und v_3 durch t_3 zu ersetzen. ❑

Die Symmetrie-Aussage von Lemma 12.5(2) hat ihre Wurzeln in Axiom (Q6), denn hier wird erlaubt, daß man nur einige Variable, aber nicht notwendig alle, in Φ ersetzt! Dadurch kommt die Vertauschbarkeit der beiden Terme t_1 und t_2 in der Gleichheits-Relation zustande!

12.6 Lemma: *Sei Φ eine $\mathcal{L}$-Formel,* $v_n \in \mathrm{Fr}(\Phi)$ *und sei* t *ein Term, der frei-einsetzbar für* v_n *in Φ ist. Dann gilt:*

$$\vdash \Phi(^{v_n}/_t) \to \exists v_n \Phi(v_n).$$

Beweis. (i) $\vdash \forall \neg v_n \Phi(v_n) \to \neg\Phi(^{v_n}/_t)$ nach (Q4);

(ii) $\vdash (\forall \neg v_n \Phi(v_n) \to \neg\Phi(^{v_n}/_t)) \to (\neg\neg\Phi(^{v_n}/_t) \to \neg\forall\neg v_n \Phi(v_n))$ nach Proposition 6.6 der Junktorenlogik;

(iii) $\vdash \neg\neg\Phi(^{v_n}/_t) \to \neg\forall\neg v_n \Phi(v_n)$ aus (i) und (ii) mit modus ponens;

(iv) $\vdash \Phi(^{v_n}/_t) \to \neg\neg\Phi(^{v_n}/_t)$ nach Proposition 6.5(b);

(v) $\vdash \Phi(^{v_n}/_t) \to \neg\forall\neg v_n \Phi(v_n)$ aus (iii) und (iv) mit der Kettenregel (§6, Aufgabe 1). $\exists v_n \Phi(v_n)$ ist eine Abkürzung für $\neg\forall\neg v_n \Phi(v_n)$ und daher ist alles bewiesen. ❑

12.7 Lemma: *Sei* t *ein Term und* $v_n \notin \mathrm{Fr}(t)$. Dann gilt:

$$\vdash \exists v_n : v_n = t.$$

Beweis. Sei $\Phi(v_n)$ die Formel $v_n = t$. Nach Lemma 12.6 gilt:
$\vdash \Phi({}^{v_n}/_t) \rightarrow \exists v_n \Phi(v_n)$, also $\vdash\ t = t \rightarrow \exists v_n : v_n = t$. Nach (Q5) und (P1) ist aber $\vdash t = t$, woraus mit modus ponens $\vdash \exists v_n : v_n = t$ folgt. ❑

Lemma 12.7 gilt insbesondere für Terme der Form $\dot{f}_j(v_1, v_2, ..., v_n)$ und besagt dann: $\vdash\ \exists v_0 : v_0 = \dot{f}_j(v_1, v_2, ..., v_n)$. Mit der Generalisierungs-Regel (P6) folgt daraus:

$$\vdash\ \forall v_1 \forall v_2 ... \forall v_n \exists v_0 :\ v_0 = \dot{f}_j(v_1, v_2, ..., v_n).$$

und das heißt, daß $\dot{f}_j$ eine *totale* Funktion ist! Das entspricht unserer Konvention, daß in $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M} = \langle M, f_j, R_k, c_i \rangle_{j \in J, k \in K, i \in I}$ alle ausgezeichneten Funktionen f_j *total* sind, d.h. für alle n-tupel von Elementen aus M definiert sind.

12.8 Lemma: Sei $\dot{f}$ ein n-stelliges Funktions-Zeichen von $\mathcal{L}$ und seien $t_1, t_2, ..., t_n$ und $s_1, s_2, ..., s_n$ Terme von $\mathcal{L}$. Dann gilt:

$$\vdash \Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} t_i = s_i \Big) \rightarrow \dot{f}(t_1, t_2, ..., t_n) = \dot{f}(s_1, s_2, ..., s_n)$$

Beweis. Es seien $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ paarweise verschiedene Variable, die in keinem der Terme $t_1, t_2, ..., t_n, s_1, s_2, ..., s_n$ vorkommen. Es gilt:

(i) $\vdash x_1 = y_1 \rightarrow \dot{f}(x_1, x_2, ..., x_n) = \dot{f}(y_1, x_2, ..., x_n)$

nach Lemma 12.3. Aus (i) folgt mit der Generalisierungs-Regel (P6):

(ii) $\vdash \forall x_1 (x_1 = y_1 \rightarrow \dot{f}(x_1, x_2, ..., x_n) = \dot{f}(y_1, x_2, ..., x_n))$.

Daraus folgt mit (Q4),(P1) und dem modus ponens sofort:

(iii) $\vdash t_1 = y_1 \rightarrow \dot{f}(t_1, x_2, ..., x_n) = \dot{f}(y_1, x_2, ..., x_n)$.

Mit der Generalisierungs-Regel (P6) können wir y_1 universell abquantifizieren. Mit (Q4), (P1) und dem modus ponens erhalten wir dann wie oben:

(iii) $\vdash t_1 = s_1 \rightarrow \dot{f}(t_1, x_2, \ldots, x_n) = \dot{f}(s_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Jetzt kommen t_2 und s_2 an die Reihe. Setze dazu

$$\Phi \triangleq (t_1 = s_1 \rightarrow \dot{f}(t_1, x_2, \ldots, x_n) = \dot{f}(s_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)), \text{ und}$$

$$\Phi^* \triangleq (t_1 = s_1 \rightarrow \dot{f}(t_1, x_2, \ldots, x_n) = \dot{f}(s_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)).$$

Dann gilt nach (Q6) und (P1):

(iv) $\vdash x_2 = y_2 \rightarrow (\Phi \rightarrow \Phi^*)$.

Mit dem Deduktions-Theorem und der Vertauschgungsregel (P7) können wir in (iv) die beiden Prämissen $x_2 = y_2$ und Φ vertauschen und erhalten:

(v) $\vdash \Phi \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow \Phi^*)$.

Da wir nach (iii) bereits $\vdash \Phi$ haben, erhalten wir aus (v) mit dem modus ponens

(vi) $\vdash x_2 = y_2 \rightarrow \Phi^*$, und das heißt unter Verwendung der Definition von Φ^*:

(vii) $\vdash x_2 = y_2 \rightarrow (t_1 = s_1 \rightarrow \dot{f}(t_1, x_2, \ldots, x_n) = \dot{f}(s_1, y_2, x_3, \ldots, x_n))$.

Diese Zeile hat eine gewisse Ähnlichkeit mit (i). Wir können daher wie oben die Generalisierungs-Regel (P6), das Axiom (Q4) und den modus ponens anwenden, und erhalten:

(viii) $\vdash t_2 = s_2 \rightarrow (t_1 = s_1 \rightarrow \dot{f}(t_1, t_2, x_3, \ldots, x_n) = \dot{f}(s_1, s_2, x_3, \ldots, x_n))$.

Wir iterieren das Verfahren und erhalten am Ende:

$\vdash t_n = s_n \rightarrow (t_{n-1} = s_{n-1} \rightarrow (\ldots \rightarrow$

$\rightarrow (t_2 = s_2 \rightarrow (t_1 = s_1 \rightarrow \dot{f}(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n) = \dot{f}(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)))\ldots))$

und das war zu zeigen gewesen. ❑

<u>**12.9 Satz:**</u> *Sei Φ eine $\mathcal{L}$-Formel und seien $t_1, t_2, \ldots, t_n$ und $s_1, s_2, \ldots, s_n$ Terme von $\mathcal{L}$. Wir nehmen an, daß sowohl t_i als auch s_i frei-einsetzbar für v_i in Φ sind $(1 \leq i \leq n)$. Dann gilt:*

$$\vdash \Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} t_i = s_i \Big) \rightarrow \big(\Phi(^{v_1}/t_1, \ldots, {}^{v_n}/t_n) \rightarrow \Phi(^{v_1}/s_1, \ldots, {}^{v_n}/s_n) \big)$$

Beweis. Dies folgt ganz genauso wie in Lemma 12.8. Statt Lemma 12.3 wird man hier jedoch (Q6) verwenden. ❑

Übungsaufgaben zu §12

(1) Es seien Φ und Ψ $\mathcal{L}$-Formeln. Zeigen Sie:

(i) $\vdash \forall v(\Phi \to \Psi) \to (\forall v\Phi \to \forall v\Psi)$;

(ii) $\vdash \forall v(\Phi \to \Psi) \to (\exists v\Phi \to \exists v\Psi)$.

(2) Sei Φ eine $\mathcal{L}$-Formel. Zeigen Sie:

$\vdash \forall v_0 \forall v_1 \Phi \to \forall v_1 \forall v_0 \Phi$.

(3) Ist $\forall v(\Phi \to \Phi) \to (\Phi \to \forall v\Phi)$ im Prädikatenkalkül herleitbar?

(4) Es seien Φ und Ψ $\mathcal{L}$-Formeln mit $v \notin \mathrm{Fr}(\Psi)$. Zeigen Sie:

(a) $\vdash \exists v(\Psi \to \Phi) \to (\Psi \to \exists v\Phi)$;

(b) $\vdash \forall v(\Phi \to \Psi) \to (\exists v\Phi \to \Psi)$.

§13. *Henkin-Theorien*

Wir beschäftigen uns mit der Frage, *ob jede widerspruchsfreie Menge Σ von $\mathcal{L}$-Aussagen ein Modell besitzt?* Der Begriff der Widerspruchsfreiheit ist dabei wie in §7 definiert: Σ ist widerspruchsfrei, wenn es mindestens eine $\mathcal{L}$-Formel gibt, die nicht aus Σ herleitbar ist.

Kurt Gödel hatte 1929 in seiner Dissertation an der Universität Wien gezeigt, daß jede widerspruchsfreie, höchstens abzählbare Menge Σ von $\mathcal{L}$-Aussagen ein Modell besitzt. Diese Modelle hatte er unter Verwendung des König'schen Satzes (aus der Kombinatorik) auf der Menge aller natürlichen Zahlen oder einer endlichen Teilmenge davon konstruiert.

Daß der Satz von Gödel auch für überabzählbare widerspruchsfreie Mengen von $\mathcal{L}$-Aussagen gilt, hat Leon Henkin[1]) gezeigt. Dabei hat er zugleich eine starke Beweisvereinfachung gegeben. Seine Idee war, die in Frage stehenden Modelle aus dem syntaktischen Material der jeweiligen Theorien zu konstruieren. Henkin konnte sich auf analoge Modell-Konstruktionen von Ernst Steinitz (in der Körpertheorie, 1910), Thoralf Skolem (1922) und Jaques Herbrand (1930) stützen. Aber im Unterschied zu Steinitz, Skolem und Herbrand hat Henkin die in Frage stehenden Modelle aus den Mengen von Individuen-Konstanten der jeweiligen Theorien gewonnen. Er mußte jedoch dafür sorgen, daß die jeweiligen Theorien „genügend viele" Individuen-Konstante besitzen. Das ist der Fall, wenn die Theorie eine sogenannte „Henkin-Theorie" ist.

Definition. Eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Aussagen wird *Theorie* genannt, wenn sie widerspruchsfrei ist und deduktiv-abgeschlossen ist (d.h. für alle $\mathcal{L}$-Aussagen Φ gilt: $\Phi \in \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vdash \Phi$).

Definition. Eine Theorie T in der Sprache $\mathcal{L}$ heißt *Henkin-Theorie,* falls es für jede $\mathcal{L}$-Aussage der Form $\exists v_0 \Phi(v_0)$ mit $v_0 \in \mathrm{Fr}(\Phi)$ eine Individuen-Konstante $\dot{c}$ von $\mathcal{L}$ gibt, so daß gilt:

(H) $$T \vdash \exists v_0 \Phi(v_0) \rightarrow \Phi({}^{v_0}/\dot{c}).$$

Dabei ist es gleichgültig, ob $\exists v_0 \Phi(v_0)$ in T beweisbar ist, oder nicht!

---

[1]) Leon A. Henkin: „*The completeness of the first-order functional calculus*", Journal of Symbolic Logic, Band 14 (1949), pp.159-166)

Beispiele: (1) Die Theorie der Gruppen T_G in der Sprache $\mathcal{L}$ mit der Multiplikation „•" als einzigem außerlogischen Zeichen ist *keine* Henkin-Theorie, denn in dieser Theorie ist die Existenz eines neutralen Elementes für die Multiplikation beweisbar, aber dafür hat die Theorie keine einzige bezeugende Konstante.

(2) Auch die Theorie der Gruppen T^*_G in der reicheren Sprache $\mathcal{L}(\bullet, ^{-1}, \dot{e})$ ist *keine* Henkin-Theorie, obwohl die Konstante $\dot{e}$ die Existenz eines neutralen Elementes für die Multiplikation bezeugt. Aber es gibt ja auch noch andere Existenz-Aussagen, für die es in $\mathcal{L}(\bullet, ^{-1}, \dot{e})$ keine Zeugen gibt. Beispielsweise gibt es für $\exists v_0 \colon v_0 \neq \dot{e}$ keinen Zeugen (Dieser Satz ist nicht in T^*_G beweisbar; aber (H) fordert, daß einer Henkin-Theorie $(\exists v_0 \colon v_0 \neq \dot{e}) \rightarrow \dot{c} \neq \dot{e}$ für eine geeignete Individuen-Konstante $\dot{c}$ in beweisbar sein muß!). Auch für den Satz $\exists v_0 \exists v_1 \colon v_0 \bullet v_1 \neq v_1 \bullet v_0$ gibt es keine Zeugen, etc.

Diskussion. In einer Henkin-Theorie T gibt es für jede Existenz-Aussage, die in T beweisbar ist, eine Konstante $\dot{c}$, die ein Zeuge für die Existenz-Behauptung ist. Dies ergibt sich sofort aus (H) mit dem modus ponens. Jede Henkin-Theorie erfüllt also auch die folgende Bedingung:

(H*) Für jede $\mathcal{L}$-Aussage der Form $\exists v_0 \Phi(v_0)$ mit $v_0 \in Fr(\Phi)$ und $T \vdash \exists v_0 \Phi(v_0)$ gibt es eine Individuen-Konstante $\dot{c}$ von $\mathcal{L}$, so daß $T \vdash \Phi(^{v_0}/_{\dot{c}})$

Wenn jedoch T und Σ zwei Theorien in derselben Sprache $\mathcal{L}$ sind, wenn T die Bedingung (H*) erfüllt und $T \subseteq \Sigma$, dann muß Σ die Bedingng (H*) nicht mehr erfüllen. Die Bedingung (H*) vererbt sich nicht auf Erweiterungen von T. Demgegenüber gilt offenbar:

Jede Erweiterung einer Henkin-Theorie in derselben Sprache $\mathcal{L}$ ist ebenfalls eine Henkin-Theorie.

Es gilt also (H) $\Rightarrow$ (H*), aber die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.

13.1 **Hilfssatz**: *Sei* T *eine Henkin-Theorie in der Sprache* $\mathcal{L}$ *und seien* t_1 *und* t_2 *zwei konstante Terme von* $\mathcal{L}$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $T \vdash t_1 = t_2$;

(ii) $T \vdash \exists v (v = t_1 \wedge v = t_2)$;

(iii) *Es gibt eine Individuenkonstante* $\dot{d}$ *in* $\mathcal{L}$ *mit:* $T \vdash \dot{d} = t_1 \wedge \dot{d} = t_2$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\Psi(v)$ die Formel $v = t_1 \wedge v = t_2$. Nach Lemma 12.6 gilt: $\vdash \Psi(^v/_{t_1}) \rightarrow \exists v{:}\Psi(v))$, das heißt $\vdash (t_1 = t_1 \wedge t_1 = t_2) \rightarrow \exists v\,(v = t_1 \wedge v = t_2)$, oder aussagenlogisch umgeformt: $\vdash t_1 = t_1 \rightarrow (t_1 = t_2 \rightarrow \exists v\,(v = t_1 \wedge v = t_2))$.

Nach Regel (P1) und Axiom (Q5) gilt aber $\vdash t_1 = t_1$, und mit modus ponens erhalten wir: $\vdash t_1 = t_2 \rightarrow \exists v\,(v = t_1 \wedge v = t_2)$. Da wir in (i) aber $T \vdash t_1 = t_2$ vorausgesetzt haben, erhalten wir wieder mit dem modus ponens
$T \vdash \exists v\,(v = t_1 \wedge v = t_2)$ und das war zu zeigen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): dies folgt sofort, weil T eine Henkin-Theorie ist.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wir nehmen jetzt $T \vdash \dot{d} = t_1 \wedge \dot{d} = t_2$ an. Nach Lemma 12.5(2) gilt dann auch $T \vdash t_1 = \dot{d} \wedge \dot{d} = t_2$ und mit Lemma 12.5(3) und modus ponens erhalten wir $T \vdash t_1 = t_2$. ❑

13.2 Hilfssatz: *Sei* T *eine Henkin-Theorie in der Sprache* $\mathcal{L}$ *und sei* $\dot{R}$ *ein* n-*stelliges Relations-Zeichen von* $\mathcal{L}$. *Seien* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *konstante Terme von* $\mathcal{L}$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $T \vdash \dot{R}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$;

(ii) $T \vdash \exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_n\,(v_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge v_n = t_n \wedge \dot{R}(v_1, v_2, \ldots, v_n))$

(iii) *Es gibt Individuenkonstanten* $\dot{d}_1, \ldots, \dot{d}_n$ *in* $\mathcal{L}$ *mit:*

$$T \vdash (\dot{d}_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge \dot{d}_n = t_n \wedge \dot{R}(\dot{d}_1, \ldots, \dot{d}_n)).$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Regel (P1) und Axiom (Q5) des Prädikaten-Kalküls gilt $\vdash t_1 = t_1$ und $\vdash t_2 = t_2$ etc. Aus (i) folgt damit

$$T \vdash t_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge t_n = t_n \wedge \dot{R}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

und mit Lemma 12.6 (angewandt auf $v_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge v_n = t_n \wedge \dot{R}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$) und modus ponens folgt daraus (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Da T eine Henkin-Theorie ist, gibt es Individuen-Konstanten $\dot{d}_1,..,\dot{d}_n$ mit

$$T \vdash \exists v_1 ... \exists v_n (v_1 = t_1 \wedge ... \wedge v_n = t_n \wedge \dot{R}(v_1, v_2, ..., v_n)) \to$$
$$\to (\dot{d}_1 = t_1 \wedge ... \wedge \dot{d}_n = t_n \wedge \dot{R}(\dot{d}_1, \dot{d}_2, ..., \dot{d}_n)).$$

Daraus und aus (ii) folgt mit modus ponens sofort (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Dies folgt sofort aus Satz 12.9. ❑

Definition. Eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Aussagen ist *vollständig*, wenn für jede beliebige $\mathcal{L}$-Aussage Φ entweder $\Sigma \vdash \Phi$ oder $\Sigma \vdash \neg\Phi$ gilt, aber nicht beides zugleich.

13.3 Satz (Leon Henkin, 1949) *Jede vollständige Henkin-Theorie hat ein Modell.*

Beweis. Sei T eine vollständige Henkin-Theorie in der Sprache $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}$ habe die Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$.

1. Schritt: Definition einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, ... \rangle$.

Wir definieren auf der Menge $\mathfrak{I} = \{\dot{c}_i;\ i \in I\}$ aller Individuenkonstanten von $\mathcal{L}$ eine 2-stellige Relation $\approx$ wie folgt: für zwei Individuen-Konstanten $\dot{c}$ und $\dot{d}$ von $\mathcal{L}$ setze:

$$\dot{c} \approx \dot{d} \Leftrightarrow T \vdash \dot{c} = \dot{d}.$$

Nach Lemma 12.5 ist $\approx$ eine reflexive, symmetrische und transitive Relation, also eine Äquivalenz-Relation. Für eine Individuenkonstante $\dot{c}$ sei

$$[\dot{c}] = \{\dot{d} \in \mathfrak{I};\ T \vdash \dot{c} = \dot{d}\}$$

die Äquivalenz-Klasse, in der $\dot{c}$ liegt. Setze schließlich:

$$M = \{[\dot{c}];\ \dot{c} \in \mathfrak{I}\}.$$

Damit ist bereits die Grundmenge M der gesuchten Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, ... \rangle$ gefunden. Wir müssen jetzt noch die Funktionszeichen $\dot{f}_j$, die Relations-Zeichen $\dot{R}_k$ und die Individuenkonstanten $\dot{c}_i$ von $\mathcal{L}$ in M interpretieren.

(1) Die Interpretation der Individuen-Konstante $\dot{c}_i$ sei wie folgt festgelegt:

$$c_i := [\,\dot{c}_i\,].$$

(2) Die Interpretation des Relationszeichens $\dot{R}_k$ sei wie folgt festgelegt:

$$R_k := \left\{ \langle [\,\dot{c}_{i_1}], [\,\dot{c}_{i_2}], \ldots, [\,\dot{c}_{i_{\tau(k)}}\,] \rangle \in M^{\tau(k)};\ T \vdash \dot{R}_k(\dot{c}_{i_1},\ \dot{c}_{i_2}, \ldots, \dot{c}_{i_{\tau(k)}}) \right\}.$$

Wohldefiniertheit: wir müssen zeigen, daß die Definition von R_k nicht von der Wahl des Repräsentanten $\dot{c}_{i_s}$ der Äquivalenz-Klasse $[\,\dot{c}_{i_s}\,]$ abhängt. Das ergibt sich aber unmittelbar aus Satz 12.9.

(3) Die Interpretation des Funktionszeichens $\dot{f}_j$ sei wie folgt festgelegt:

$$f_j := \Big\{ \langle [\,\dot{c}_{i_1}], [\,\dot{c}_{i_2}], \ldots, [\,\dot{c}_{i_{\sigma(j)}}\,]\,, [\,\dot{c}_{i_0}\,] \rangle \in M^{\sigma(j)+1};$$
$$T \vdash \dot{f}_j(\dot{c}_{i_1},\ \dot{c}_{i_2}, \ldots, \dot{c}_{i_{\sigma(j)}}) = \dot{c}_{i_0} \Big\}.$$

Wohldefiniertheit: wir müssen zeigen, daß die Definition von f_j nicht von der Wahl des Repräsentanten $\dot{c}_{i_s}$ der Äquivalenz-Klasse $[\,\dot{c}_{i_s}\,]$ abhängt. Das ergibt sich aber unmittelbar aus Lemma 12.8. Nach 12.8 ist auch klar, daß f_j überhaupt eine Funktion ist.

Behauptung: f_j *ist eine totale Funktion:* sei $n = \sigma(j)$ die Stellenzahl von f_j. Es seien jetzt $m_1,\ldots,m_n \in M$ beliebig. Nach Definition von M gibt es Individuen-Konstanten $\dot{c}_{i_1},\ldots,\dot{c}_{i_n}$ so, daß $m_1 = [\,\dot{c}_{i_1}],\ldots, m_n = [\,\dot{c}_{i_n}]$. Nach Lemma 12.7 gilt

(†) $\quad T \vdash \exists v:\ v = \dot{f}_j(\dot{c}_{i_1},\ \dot{c}_{i_2}, \ldots, \dot{c}_{i_n}).$

Da T eine Henkin-Theorie ist, gibt es eine Individuen-Konstante $\dot{d}$ mit:

(‡) $\quad T \vdash \exists v: v = \dot{f}_j(\dot{c}_{i_1},\ \dot{c}_{i_2}, \ldots, \dot{c}_{i_n}) \rightarrow \dot{d} = \dot{f}_j(\dot{c}_{i_1},\ \dot{c}_{i_2}, \ldots, \dot{c}_{i_n}).$

Daraus folgt mit modus ponens $T \vdash \dot{d} = \dot{f}_j(\dot{c}_{i_1},\ \dot{c}_{i_2}, \ldots, \dot{c}_{i_n})$ und daraus nach Definition von f_j:

$$[\dot{d}] = f_j([\dot{c}_{i_1}],\ [\dot{c}_{i_2}],\ \ldots,\ [\dot{c}_{i_n}]) = f_j(m_1,\ldots,m_n).$$

Also ist f_j für alle n-tupel von Elementen aus M definiert. Insgesamt ist damit eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ definiert,

$$\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle = \langle M, f_j, R_k, c_i \rangle_{j \in J, k \in K, i \in I}.$$

<u>2. Schritt</u>: Wir behaupten: für jeden konstanten Term t und jede Individuen-Konstante $\dot{d}$ von $\mathcal{L}$ gilt: $(T \vdash \dot{d} = t) \Leftrightarrow [\dot{d}] = w_{\mathfrak{M}}(t)$.

Beweis (durch Induktion über den Termaufbau - beachte, daß die Auswertung von konstanten Termen von keiner Belegung h abhängt, vergl. §9):

Wenn t eine Individuen-Konstante $\dot{c}$ ist, dann ist nach Definition von $\mathfrak{M}$:

$$T \vdash \dot{d} = \dot{c} \Leftrightarrow \dot{d} \approx \dot{c} \Leftrightarrow [\dot{d}] = [\dot{c}] := w_{\mathfrak{M}}(\dot{c}).$$

Wenn t die Gestalt $\dot{f}_j(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ hat, wobei die $s_1, \ldots, s_n$ konstante Terme sind, dann gibt es aufgrund der Henkin-Eigenschaft von T Individuen-Konstanten $\dot{c}_{i_1}, \dot{c}_{i_2}, \ldots, \dot{c}_{i_n}$ mit

$$T \vdash (\exists y\colon y = s_1) \rightarrow \dot{c}_{i_1} = s_1,$$

und analog für $s_2, \ldots, s_n$. Nach Lemma 12.7 gilt aber $T \vdash \exists y\colon y = s_1$, so daß mit modus ponens $T \vdash \dot{c}_{i_1} = s_1$ folgt. Zur Induktion nehmen wir an:

(#) $[\dot{c}_{i_1}] = w_{\mathfrak{M}}(s_1)$, $[\dot{c}_{i_2}] = w_{\mathfrak{M}}(s_2)$, etc.

Nach Lemma 12.8 gilt:

$$T \vdash \dot{d} = \dot{f}_j(s_1, s_2, \ldots, s_n) \rightarrow (\dot{c}_{i_1} = s_1 \wedge \ldots \wedge \dot{c}_{i_n} = s_n \rightarrow \dot{d} = \dot{f}_j(\dot{c}_{i_1}, \dot{c}_{i_2}, \ldots, \dot{c}_{i_n})).$$

Wenn wir jetzt $T \vdash \dot{d} = \dot{f}_j(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ annehmen, dann folgt mit modus ponens $T \vdash \dot{d} = \dot{f}_j(\dot{c}_{i_1}, \dot{c}_{i_2}, \ldots, \dot{c}_{i_n})$ und daher laut Definition von $\mathfrak{M}$:

$$[\dot{d}] = f_j([\dot{c}_{i_1}], [\dot{c}_{i_2}], \ldots, [\dot{c}_{i_n}]).$$

Aber unter Verwendung von (#) und der rekursiven Definition der Term-Auswertung erhalten wir:

$$f_j([\dot{c}_{i_1}], [\dot{c}_{i_2}], \ldots, [\dot{c}_{i_n}]) = f_j(w_{\mathfrak{M}}(s_1), \ldots, w_{\mathfrak{M}}(s_n)) = w_{\mathfrak{M}}(\dot{f}_j(s_1, s_2, \ldots, s_n)).$$

Damit haben wir gezeigt:

$$T \vdash \dot{d} = \dot{f}_j(s_1, s_2, \ldots, s_n) \Rightarrow [\dot{d}] = w_{\mathfrak{M}}(\dot{f}_j(s_1, s_2, \ldots, s_n)).$$

Dabei gilt offenbar auch die Umkehrung „$\Leftarrow$": denn

$$[\dot{d}] = w_{\mathfrak{M}}(\dot{f}_j(s_1, s_2, ..., s_n)) = f_j(w_{\mathfrak{M}}(s_1), ..., w_{\mathfrak{M}}(s_n)) = f_j([\dot{c}_{i_1}], [\dot{c}_{i_2}], \dots, [\dot{c}_{i_n}])$$

heißt nach Definition von $\mathfrak{M}$: $T \vdash \dot{d} = \dot{f}_j(\dot{c}_{i_1}, \dot{c}_{i_2}, \dots, \dot{c}_{i_n})$ und zusammen mit $T \vdash \dot{c}_{i_1} = s_1$ etc. folgt daraus nach Lemma 12.8: $T \vdash \dot{d} = \dot{f}_j(s_1, s_2, ..., s_n)$.

<u>3. Schritt</u>: Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{M}$ ein Modell von T ist. Dazu behaupten wir:

(♠) *Für alle $\mathcal{L}$-Aussagen Φ gilt:* $\mathfrak{M} \models \Phi \Leftrightarrow T \vdash \Phi$.

Beweis von (♠) durch Induktion über den Formelaufbau.

(1) Φ ist eine atomare Aussage. In diesem Fall hat Φ entweder die Form $t_1 = t_2$ oder $\dot{R}_k(t_1, t_2, ..., t_{\tau(k)})$, wobei die t_i konstante Terme von $\mathcal{L}$ sind.

<u>Fall 1a</u>: $\Phi \triangleq t_1 = t_2$. Nach Hilfssatz 13.1 gilt dann:

$T \vdash t_1 = t_2 \Leftrightarrow$ Es gibt eine Individuenkonstante $\dot{d}$ mit: $T \vdash \dot{d} = t_1 \wedge \dot{d} = t_2$.

$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Individuenkonstante $\dot{d}$ mit: $[\dot{d}] = w_{\mathfrak{M}}(t_1)$ & $[\dot{d}] = w_{\mathfrak{M}}(t_2)$, nach dem Resultat des 2. Schrittes,

$\Leftrightarrow$ $w_{\mathfrak{M}}(t_1) = w_{\mathfrak{M}}(t_2)$ — nach der Definition von $\mathfrak{M}$,

$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2$ — nach der Definition von $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}$.

<u>Fall 1b</u>: $\Phi \triangleq \dot{R}_k(t_1, t_2, ..., t_{\tau(k)})$.

Die Behauptung folgt unter Verwendung von Hilfssatz 13.2 wie in Fall 1a.

(2) Φ sei eine $\mathcal{L}$-Aussage der Form $\neg\Psi$.

Zur Induktion nehmen wir $\mathfrak{M} \models \Psi \Leftrightarrow T \vdash \Psi$ an. Wir vollziehen den Induktions-Schluß:

$\mathfrak{M} \models \Phi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \neg\Psi$

$\Leftrightarrow$ nicht($\mathfrak{M} \models \Psi$)	da Ψ eine Aussage ist
$\Leftrightarrow$ nicht($T \vdash \Psi$)	nach Induktions-Annahme
$\Leftrightarrow$ $T \vdash \neg\Psi$	weil T vollständig ist
$\Leftrightarrow$ $T \vdash \Phi$	weil $\Phi \triangleq \neg\Psi$.

(3) Φ sei eine $\mathcal{L}$-Aussage der Form $\Psi_1 \to \Psi_2$.

Da Φ eine Aussage ist, sind auch Ψ_1 und Ψ_2 Aussagen. Zur Induktion nehmen wir $\mathfrak{M} \models \Psi_1 \Leftrightarrow T \vdash \Psi_1$ und $\mathfrak{M} \models \Psi_2 \Leftrightarrow T \vdash \Psi_2$ an. Der Induktions-Schluß:

$\mathfrak{M} \models \Phi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\Psi_1 \to \Psi_2)$

$\Leftrightarrow (\mathfrak{M} \models \Psi_1 \Rightarrow \mathfrak{M} \models \Psi_2)$	da Ψ_1 und Ψ_2 Aussagen sind
$\Leftrightarrow (T \vdash \Psi_1 \Rightarrow T \vdash \Psi_2)$	laut Induktions-Annahme
$\Leftrightarrow ((\text{nicht } T \vdash \Psi_1) \text{ oder } T \vdash \Psi_2)$	Bedeutung der Implikation
$\Leftrightarrow (T \vdash \neg\Psi_1 \text{ oder } T \vdash \Psi_2)$	da T vollständig ist
$\Leftrightarrow (T \vdash \Psi_1 \to \Psi_2)$	mit Axiom (Q1) des Prädikaten-

Kalküls im Falle $T \vdash \Psi_2$ und mit Axiom (Q2) im Falle $T \vdash \neg\Psi_1$, und modus ponens in jedem Falle.

(4) Φ sei eine $\mathcal{L}$-Aussage der Form $\forall v{:}\Psi$.

Da Φ eine Aussage ist, muß hier $\mathrm{Fr}(\Psi) \subseteq \{v\}$ gelten.

<u>Fall 4a</u>: $\mathrm{Fr}(\Psi) = \varnothing$.

$\mathfrak{M} \models \Phi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \Psi$	nach Proposition 9.3,
$\Leftrightarrow T \vdash \Psi$	nach Induktions-Annahme, da Ψ eine Aussage ist,
$\Leftrightarrow T \vdash \forall v{:}\Psi$	wobei „$\Rightarrow$" nach der Generalisierungs-Regel (P6) und „$\Leftarrow$" nach Axiom (Q4) gilt (mit v selbst als Term t).

<u>Fall 4b</u>: $\mathrm{Fr}(\Psi) = \{v\}$.

Zur Induktion nehmen wir an, daß für jeden konstanten Term t stets gilt:

(♣) $\qquad \mathfrak{M} \models \Psi(^v/_t) \;\Leftrightarrow\; T \vdash \Psi(^v/_t)$.

<u>1. Behauptung</u>: es gilt $\mathfrak{M} \models \forall v{:}\Psi \Rightarrow T \vdash \forall v{:}\Psi$.

Da T eine Henkin-Theorie ist, gibt es zur Formel $\exists v{:}\neg\Psi(v)$ eine Individuen-Konstante $\dot{d}$ mit der Eigenschaft: $T \vdash \exists v{:}\neg\Psi(v) \to \neg\Psi(^v/\dot{d})$, also aussagenlogisch umgeformt: $T \vdash \Psi(^v/\dot{d}) \to \neg\exists v{:}\neg\Psi(v)$, und das heißt nach der Definition des Existenz-Quantors

(†) $\qquad T \vdash \Psi(^v/\dot{d}) \to \forall v{:}\Psi(v)$.

Da wir $\mathfrak{M} \models \forall v{:}\Psi$ voraussetzen, gilt insbesondere $\mathfrak{M} \models \Psi(^{v}/\dot{d})$, also nach (♣) auch $T \vdash \Psi(^{v}/\dot{d})$. Aus (†) erhalten wir daher mit modus ponens sofort $T \vdash \forall v{:}\Psi(v)$ wie gewünscht.

2. Behauptung: es gilt die Umkehrung: $T \vdash \forall v{:}\Psi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall v{:}\Psi$.

Wir müssen $\mathfrak{M} \models \forall v{:}\Psi$ zeigen. Sei dazu $m \in M$ beliebig, also $m = [\dot{c}]$ für eine Individuen-Konstante. Nach Axiom (Q4) des Prädikaten-Kalküls gilt

$$T \vdash \forall v{:}\Psi(v) \to \Psi(^{v}/\dot{c}) .$$

Da wir $T \vdash \forall v{:}\Psi$ voraussetzen, folgt daraus mit modus ponens $T \vdash \Psi(^{v}/\dot{c})$. Nach (♣) folgt daraus $\mathfrak{M} \models \Psi(^{v}/\dot{c})$, das heißt $\mathfrak{M} \models \Psi[[\dot{c}]]$, also $\mathfrak{M} \models \Psi[m]$. Da m beliebig war, haben wir nach Satz 9.4(3) $\mathfrak{M} \models \forall v{:}\Psi$.

Damit ist insgesamt (♠) bewiesen und es gilt $\mathfrak{M} \models T$ und alles ist bewiesen. ❑

Gibt es vollständige Henkin-Theorien? Es ist nicht leicht, Beispiele explizit anzugeben. Aber wir können zeigen, daß es zu jeder $\mathcal{L}$-Theorie T eine erweiterte Sprache $\mathcal{L}_H$ und eine $\mathcal{L}_H$-Theorie T_H gibt, mit $T \subseteq T_H$, so daß T_H eine Henkin-Theorie ist. Man nennt T_H die *„Henkinisierung"* von T.

Definition. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der Signatur $\langle\sigma, \tau, I\rangle$ und sei $\mathcal{L}^*$ eine Sprache der Signatur $\langle\sigma^*, \tau^*, I^*\rangle$. Wir nennen $\mathcal{L}^*$ eine *Expansion* von $\mathcal{L}$, wenn jede $\mathcal{L}$-Formel auch eine $\mathcal{L}^*$-Formel ist, d.h. wenn $\sigma \subseteq \sigma^*$, $\tau \subseteq \tau^*$ und $I \subseteq I^*$.

$\sigma \subseteq \sigma^*$ besagt einerseits, daß auch $J = \mathrm{Dom}(\sigma) \subseteq J^* = \mathrm{Dom}(\sigma^*)$ und andererseits, daß $\sigma(j) = \sigma^*(j)$ für jedes $j \in J$. Eine analog Aussage betrifft $\tau \subseteq \tau^*$.

Definition. Wenn $\mathcal{L}$ eine Sprache der Signatur $\langle\sigma, \tau, I\rangle$ ist, dann sei

$$\mathcal{L} \sqcup \{\dot{d}_i \,;\, i \in D\}$$

die Expansion von $\mathcal{L}$, die durch Hinzunahme der neuen Individuenkonstanten $\dot{d}_i$ (für $i \in D$) entsteht. Wenn $\langle\sigma^*, \tau^*, I^*\rangle$ die Signatur von $\mathcal{L} \sqcup \{\dot{d}_i \,;\, i \in D\}$ ist, dann ist also $\sigma = \sigma^*$, $\tau = \tau^*$ und $I^* = I \cup D$, wobei $I \cap D = \varnothing$ stillschweigend angenommen wird.

Die Henkinisierung einer formalen Sprache $\mathcal{L}$:

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$. Wir expandieren $\mathcal{L}$ durch Hinzunahme von neuen Individuen-Konstanten wie folgt. Als Indexmenge (zum Indizieren der neuen Konstanten) benutzen wir nicht irgendeine (abstrakte) Menge, sondern die Menge aller Formeln, deren einzige freie Variable v_0 ist. Sei zunächst:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}.$$

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 \sqcup \{\dot{c}_\Phi \ ; \ \Phi \in \mathcal{L}_0 \ \& \ \mathrm{Fr}(\Phi) = \{v_0\}\}.$$

Wenn für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Sprache $\mathcal{L}_n$ definiert ist, dann sei $\mathcal{L}_{n+1}$ die folgende Expansion von $\mathcal{L}_n$,

$$\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n \sqcup \{\dot{c}_\Phi \ ; \ \Phi \in \mathcal{L}_n - \mathcal{L}_{n-1} \ \& \ \mathrm{Fr}(\Phi) = \{v_0\}\}$$

und damit

$$\mathcal{L}_H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_n$$

Wir nennen $\mathcal{L}_H$ die *Henkin-Expansion* von $\mathcal{L}$.

Wenn jetzt T eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen ist, dann können wir T wie folgt „Henkinisieren“:

Definition. Wenn Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen ist, dann sei

$$\Sigma_{(H)} = \Sigma \cup \{\exists v_0 \Phi(v_0) \to \Phi({}^{v_0}/\, \dot{c}_\Phi) \, ; \ \Phi \in \mathcal{L}_H \ \& \ \mathrm{Fr}(\Phi) = \{v_0\}\}.$$

Definitionsgemäß erfüllt $\Sigma_{(H)}$ die Henkin-Bedingung (H). Es ist jedoch gar nicht klar, ob $\Sigma_{(H)}$ überhaupt widerspruchsfrei ist. Wenn man die Widerspruchsfreiheit von $\Sigma_{(H)}$ beweisen will, dann wird man auf die vorausgesetzte Widerspruchsfreiheit von Σ zurückgreifen. Man muß also Herleitungen aus $\Sigma_{(H)}$ und Herleitungen aus Σ vergleichen. Die beiden Satzmengen, Σ und $\Sigma_{(H)}$, sind aber in verschiedenen Sprachen formuliert. In Herleitungen aus $\Sigma_{(H)}$ hat man nicht nur eine größere Menge von Prämissen, sondern kann auch alle Tautologien, die in der reicheren Sprache $\mathcal{L}_H$ formuliert sind, verwenden. In Herleitungen aus Σ hat man nur Σ als Menge von Prämissen und kann auch nur solche Tautologien verwenden, die in der Sprache $\mathcal{L}$ formuliert sind.

Der Begriff der Herleitung hängt also von der zugrundeliegenden Sprache ab, und wir wollen daher die folgende Notation verwenden.

Notation. Sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln und Φ eine einzelne $\mathcal{L}$-Formel. Dann schreiben wir:

(1) $\Sigma \models_{\mathcal{L}} \Phi$ (gelesen: Φ *ist bezüglich* $\mathcal{L}$ *eine Folgerung aus* Σ), wenn für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ und jede Belegung h: $Var \to M$ gilt:

wenn $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$ *für alle* $\Psi \in \Sigma$ *ist, dann ist auch* $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$.

(2) $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \Phi$ (gelesen: Φ *ist bezüglich* $\mathcal{L}$ *aus* Σ *herleitbar*), wenn es endlich viele $\mathcal{L}$-Formeln $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m \in \Sigma$ gibt, so daß die Sequenz

$\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m \vdash \Phi$ aufgrund der Regeln (P1) bis (P6) des Prädikaten-Kalküls für $\mathcal{L}$ hingeschrieben werden darf [d.h. unter ausschließlicher Verwendung von $\mathcal{L}$-Formeln in den Axiomen (Q1),...,(Q6) und den Regeln (P1),..,(P6)].

__13.4__ __Satz__ (Konstanten-Theorem) *Sei* $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \sqcup \{\dot{c}_i;\ i \in D\}$ *eine Expansion der Sprache* $\mathcal{L}$ *und sei* Σ *eine Menge von* $\mathcal{L}$*-Aussagen und* Φ *eine* $\mathcal{L}^*$*-Aussage. Es seien* y_i *(für* $i \in D$*) Individuen-Variable (von* $\mathcal{L}$*), die in keiner Formel aus* $\Sigma \cup \{\Phi\}$ *vorkommen (weder frei noch gebunden). Sei* $\Phi^{\#}$ *die* $\mathcal{L}$*-Formel, die aus* Φ *entsteht, indem man jede Konstante* $\dot{c}_i$ *durch* y_i *ersetzt. Dann gilt:*

(1) $\Sigma \models_{\mathcal{L}^*} \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \models_{\mathcal{L}} \Phi^{\#}$.

(2) $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}^*} \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \Phi^{\#}$.

__Beweis__. __Zu__ (1): „$\Rightarrow$": Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ eine beliebige $\mathcal{L}$-Struktur und $h: Var \to M$ eine Belegung so, daß für alle $\Psi \in \Sigma$: $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$ gilt. Wir expandieren die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ zu einer $\mathcal{L}^*$-Struktur $\mathfrak{M}^*$, indem wir die Individuen-Konstanten $\dot{c}_i$ (für $i \in D$) durch $h(y_i)$ interpretieren, $\mathfrak{M}^* = \langle \mathfrak{M}, h(y_i) \rangle_{i \in D} = \langle M, \dots, h(y_i) \rangle_{i \in D}$. Da sonst nichts geändert wurde, gilt weiterhin für alle $\Psi \in \Sigma$: $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}^*}(\Psi) = 1$. Nach Voraussetzung folgt daraus $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}^*}(\Phi) = 1$. Das heißt nach Definition von $\Phi^{\#}$ wegen $h(y_i) = w^h_{\mathfrak{M}^*}(\dot{c}_i)$ aber nichts anderes als $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi^{\#}) = 1$ und das war zu zeigen gewesen.

Umkehrung „$\Leftarrow$“: Sei $\mathfrak{M}^* = \langle M, \ldots, c_i \rangle_{i \in D}$ eine $\mathcal{L}^*$-Struktur mit $\mathfrak{M}^* \models \Sigma$. Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ die Restriktion von $\mathfrak{M}^*$ auf die Signatur der Sprache $\mathcal{L}$ (d.h. die Elemente c_i (für $i \in D$) werden nicht mehr namentlich ausgezeichnet, aber als Elemente von M bleiben sie natürlich in M). Wir definieren eine Belegung $h: \mathcal{Var} \to M$ durch $h(y_i) = c_i$ für $i \in D$ und $h(v_n) \in M$ beliebig, für die restlichen Variablen v_n. Aus $\mathfrak{M}^* \models \Sigma$ ergibt sich insbesondere $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Psi) = 1$ für alle $\Psi \in \Sigma$. Nach Voraussetzung folgt daraus $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi^\#) = 1$. Wegen $h(y_i) = c_i$ für $i \in D$ heißt das aber gerade $\mathfrak{M}^* \models \Phi$. Das mußten wir zeigen.

Zu (2) „$\Rightarrow$“: Wir nehmen $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}^*} \Phi$ an. Dann gibt es endlich viele $\mathcal{L}$-Formeln $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m \in \Sigma \subseteq \mathcal{L}$, so daß die Sequenz $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m \vdash_{\mathcal{L}^*} \Phi$ aufgrund der Regeln (P1) bis (P6) des Prädikaten-Kalküls für $\mathcal{L}^*$ nach endlich vielen Schritten hingeschrieben werden darf. Wir wählen eine solche Herleitung von $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m \vdash_{\mathcal{L}^*} \Phi$. Seien z_i (für $i \in D$) Variable von $\mathcal{L}$, die nirgendwo in den $\mathcal{L}^*$-Formeln der gewählten Herleitung von $\Psi_1, \ldots, \Psi_m \vdash_{\mathcal{L}^*} \Phi$ auftreten. Wir ersetzen jetzt in allen Formeln der Herleitung jede Individuenkonstante $\dot{c}_i$ durch eine Variable z_i mit gleichem Index i. Man bestätigt, daß durch diese Ersetzung jedes prädikatenlogische Axiom (Q1),..,(Q6) ein Axiom bleibt, und daß jede Anwendung einer Regel (P1),....,(P6) eine Anwendung derselben Regel bleibt. Durch die Ersetzung geht also die Herleitung in eine Herleitung über. Die $\mathcal{L}$-Formeln $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ sind von der Ersetzung nicht betroffen, wohl aber Φ.

Daher haben wir $\Psi_1, \ldots, \Psi_m \vdash_{\mathcal{L}} \Phi(\dot{c}_1/z_1, \ldots, \dot{c}_m/z_m)$. In dieser Sequenz können wir die Variablen z_i durch die Variablen y_i ersetzen (mit (P6) und dann (Q4)) und erhalten $\Psi_1, \ldots, \Psi_m \vdash_{\mathcal{L}} \Phi^\#$, also auch $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \Phi^\#$ wie gewünscht.

Umkehrung „$\Leftarrow$“: Wir nehmen $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \Phi^\#$ an. Da Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen ist, können wir die Generalisierungs-Regel (P6) anwenden und auf $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y_1 \ldots \forall y_m : \Phi^\#$ schließen (wenn etwa $\mathrm{Fr}(\Phi^\#) = \{y_1, \ldots, y_m\}$). Da $\mathcal{L}^*$ eine Expansion von $\mathcal{L}$ ist, gilt erst recht $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}^*} \forall y_1 \ldots \forall y_m : \Phi^\#$ und mit dem prädikaten-logischen Axiom (Q4) erhalten wir

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}^*} \Phi^\# ({}^{y_1}/\dot{c}_1, \ldots, {}^{y_m}/\dot{c}_m).$$

Dabei ist $\Phi \stackrel{\frown}{=} \Phi^\# ({}^{y_1}/\dot{c}_1, \ldots, {}^{y_m}/\dot{c}_m)$ und alles ist bewiesen. ❑

Bemerkung. Sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und seien $\dot{c}_i$ (für $i \in D$) Individuen-Konstanten von $\mathcal{L}$, die aber in keiner Aussage aus Σ vorkommen.

Dann besagt das Konstanten-Theorem, daß die $\dot{c}_i$ „so gut wie Variable" sind.

Diese Situation kennt man bereits aus der elementaren Algebra, etwa in der Theorie der quadratischen Gleichungen $x^2 + ax + b = 0$, wo x syntaktisch als Variable und a und b syntaktisch als Konstante (und nicht auch als Variable!) behandelt werden. Dabei sind a und b aber völlig beliebige Koeffizienten (Beiwerte), über die keine Voraussetzungen gemacht werden. Das Konstanten-Theorem besagt hier, daß sie „so gut wie Variable" sind. Sie werden daher auch 'Formvariable' genannt, sind jedoch konstante Terme.

13.5 Satz (Leon Henkin, 1949) *Wenn* T *eine widerspruchsfreie Menge von* $\mathcal{L}$-*Aussagen ist, dann ist* $T_H = \{\Phi \in \mathcal{L}_H \,;\, Fr(\Phi) = \varnothing \;\&\; T_{(H)} \vdash \Phi\}$ *eine Henkin-Theorie (in der Sprache* $\mathcal{L}_H$*). Wir nennen* T_H *die Henkinisierung von* T.

Beweis. Zur Erinnerung:

$$T_{(H)} = T \cup \{\exists v_0 \Phi(v_0) \rightarrow \Phi({}^{v_0}/\dot{c}_\Phi)\,;\; \Phi \in \mathcal{L}_H \;\&\; Fr(\Phi) = \{v_0\}\}.$$

T_H ist offenbar deduktiv abgeschlossen und erfüllt die Henkin-Bedingung (H). Wir müssen also nur noch zeigen, daß T_H widerspruchsfrei ist.

Wenn T_H widerspruchsvoll wäre, gäbe es eine $\mathcal{L}$-Aussage Γ mit $T_{(H)} \vdash \Gamma \wedge \neg\Gamma$. Definitionsgemäß (Def. 12.1) ist dann $\Gamma \wedge \neg\Gamma$ bereits aus endlich vielen Aussagen aus $T_{(H)}$ herleitbar. Insbesondere gibt es dann endlich viele $\mathcal{L}_H$-Formeln $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ mit $Fr(\Phi_1) = Fr(\Phi_2) = \ldots = Fr(\Phi_n) = \{v_0\}$, so daß

(†) $\quad T \cup \{\exists v_0 \Phi_i(v_0) \rightarrow \Phi_i({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_i})\,;\; 1 \le i \le n\} \vdash \Gamma \wedge \neg\Gamma.$

Für eine Individuenkonstante $\dot{c}_\Phi$ sei $St(\dot{c}_\Phi)$ die eindeutig bestimmte natürliche Zahl m derart, daß $\dot{c}_\Phi$ zum Alphabet von $\mathcal{L}_m$, aber noch nicht zum Alphabet von $\mathcal{L}_{m-1}$ gehört. Wir nennen $St(\dot{c}_\Phi)$ die *Stufe* von $\dot{c}_\Phi$. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß in (†) die Formeln Φ_i so aufgezählt sind, daß für $1 \le i < j \le n$ gilt: $St(\dot{c}_{\Phi_i}) \le St(\dot{c}_{\Phi_j})$. Setze $T_0 = T$, und für $1 \le k \le n$:

$$T_k = T \cup \{\exists v_0 \Phi_i(v_0) \rightarrow \Phi_i({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_i})\,;\; 1 \le i \le k\}.$$

Da $T_n = T \cup \{ \exists v_0 \Phi_i(v_0) \to \Phi_i({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_i}); \; 1 \leq i \leq n \}$ nach (†) widerspruchsvoll ist, ist insbesondere:

(‡) $\qquad T_n \vdash \neg(\exists v_0 \Phi_n(v_0) \to \Phi_n({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_n}))$, also

$$T_{n-1} \cup \{ \exists v_0 \Phi_n(v_0) \to \Phi_n({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_n}) \} \vdash \neg(\exists v_0 \Phi_n(v_0) \to \Phi_n({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_n})).$$

Offenbar gilt auch

$$T_{n-1} \cup \{ \neg(\exists v_0 \Phi_n(v_0) \to \Phi_n({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_n})) \} \vdash \neg(\exists v_0 \Phi_n(v_0) \to \Phi_n({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_n}))$$

und mit der Fallunterscheidungs-Regel (P5) erhalten wir:

(*) $\qquad T_{n-1} \vdash \neg(\exists v_0 \Phi_n(v_0) \to \Phi_n({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_n}))$,

Sei $\alpha \triangleq \exists v_0 \Phi_n(v_0)$ und $\beta \triangleq \Phi_n({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_n})$. Dann besagt (*)

$T_{n-1} \vdash \neg(\alpha \to \beta)$. Nach Axiom (Q2) und Regel (P1) des Prädikaten-Kalküls ist: $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$, also mit Kontraposition (Proposition 6.6 und 6.5(a)): $\vdash \neg(\alpha \to \beta) \to \alpha$ und wir erhalten aus (*) mit modus ponens:

(a) $\quad T_{n-1} \vdash \exists v_0 \Phi_n(v_0)$.

Wenn wir Axiom (Q1) und Regel (P1) anwenden, $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$, also mit Kontraposition: $\vdash \neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$, dann erhalten wir aus (*) mit modus ponens auch:

(b) $\quad T_{n-1} \vdash \neg\Phi_n({}^{v_0}/\dot{c}_{\Phi_n})$.

Da $\dot{c}_{\Phi_n}$ die höchste Stufe unter allen Konstanten $\dot{c}_{\Phi_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ hat, kommt $\dot{c}_{\Phi_n}$ in den Formeln von T_{n-1} nicht vor. Nach dem Konstanten-Theorem 13.4 gilt daher $T_{n-1} \vdash \neg\Phi_n({}^{v_0}/y_0)$ und die Generalisierungs-Regel (P6) liefert (weil alle Formeln von T_{n-1} Aussagen sind):

(c) $\quad T_{n-1} \vdash \forall y_0 : \neg\Phi_n(y_0)$.

Aber (a) und (c) zeigen, daß auch T_{n-1} widerspruchsvoll ist.

Wir können das Argument iterieren und erhalten, daß auch T_{n-2} widerspruchsvoll ist, etc., und schließlich, daß auch $T=T_0$ widerspruchsvoll ist. Wir hatten aber vorausgesetzt, daß T widerspruchsfrei ist. Die Annahme der Widersprüchlichkeit von T_H ist also zu verwerfen und alles ist gezeigt. ❑

Der folgende Satz von Adolf Lindenbaum (1904-1941) erlaubt es, die Sätze 13.3 und 13.5 zusammen zu führen. [Lindenbaum selber hatte diesen Satz nicht publiziert. Die einzige Quelle für diesen Satz ist ein Bericht von Alfred Tarski: *„Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik"*, Comptes Rendus des Séances de la Soc. Sci. Warschau, Band 23 (1930), pp.22-29].

13.6 Satz (A. Lindenbaum, 1930) *Jede widerspruchsfreie Menge* T *von* $\mathcal{L}$-*Aussagen kann zu einer* v o l l s t ä n d i g e n, *widerspruchsfreien Menge* $T^{\#}$ *von* $\mathcal{L}$-*Aussagen erweitert werden.*

Beweis. Betrachte die folgende Menge

$$\mathcal{A} = \{\Sigma\,;\, T \subseteq \Sigma \subseteq \mathcal{L} \;\;\&\;\; \Sigma \text{ ist eine widerspruchsfreie Theorie}\}.$$

Die partiell-geordnete Menge $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$ ist induktiv-geordnet (d.h. wenn $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ und $\mathcal{K}$ bezüglich $\subseteq$ linear-geordnet ist, dann ist auch $(\bigcup \mathcal{K}) \in \mathcal{A}$). Nach dem ZORNschen Lemma der Mengenlehre hat $\mathcal{A}$ maximale Elemente. Sei S eines von ihnen und setze $T^{\#} = S$. Aus $S \in \mathcal{A}$ folgt dann zunächst, daß S eine widerspruchsfreie Theorie von $\mathcal{L}$-Aussagen ist mit $T \subseteq S$. Wir müssen noch zeigen, daß S vollständig ist.

Sei Θ eine beliebige $\mathcal{L}$-Aussage. Wir nehmen *non*$(S \vdash \Theta)$ an. Betrachte

$$S_1 = \{\Psi;\, \Psi \text{ ist } \mathcal{L}\text{-Aussage und } S \cup \{\Theta\} \vdash \Psi\}.$$

S_1 ist deduktiv-abgeschlossen und es ist $T \subseteq S \subseteq S_1 \subseteq \mathcal{L}$. Wegen $S \cup \{\Theta\} \vdash \Theta$ ist $S_1 \vdash \Theta$, also $S \subset S_1$ (echte Inklusion!). Da S in $\mathcal{A}$ maximal ist, muß demnach S_1 widerspruchsvoll sein. Also kann man aus $S \cup \{\Theta\}$ alles herleiten, insbesondere $S \cup \{\Theta\} \vdash \neg\Theta$. Natürlich gilt auch $S \cup \{\neg\Theta\} \vdash \neg\Theta$, und mit der Fallunterscheidungs-Regel erhalten wir $S \vdash \neg\Theta$. Das mußten wir zeigen. ❑

13.7 Satz (Kurt Gödel, 1929) *Jede widerspruchsfreie Menge von* $\mathcal{L}$-*Aussagen hat ein Modell.*

Beweis. Sei T eine widerspruchsfreie Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen. Nach Satz 13.5 ist die Henkinisierung $T_H = \{\Phi \in \mathcal{L}_H\,;\, Fr(\Phi) = \varnothing \;\&\; T_{(H)} \vdash \Phi\}$ eine widerspruchsfreie, deduktiv-abgeschlossene Menge von $\mathcal{L}_H$-Aussagen, $T \subseteq T_H$. Nach Lindenbaums Satz 13.6 kann T_H zu einer deduktiv-abgeschlossenen, vollständigen, widerspruchsfreien Menge $T^{\#}$ von $\mathcal{L}_H$-Aussagen erweitert werden. Weil T_H eine Henkin-Theorie ist, und $T \subseteq T_H \subseteq T^{\#}$ gilt, ist auch $T^{\#}$ eine Henkin-Theorie (vergl. Seite 117). Nach Henkins Satz 13.3 hat $T^{\#}$ ein Modell

$\mathfrak{M}^{\#} = \langle M, \ldots \rangle$. Dann ist die Einschränkung von $\mathfrak{M}^{\#}$ auf die Sprache $\mathcal{L}$ ein Modell von T. ❑

Übungsaufgaben zu §13

(1) Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ irgendeine $\mathcal{L}$-Struktur. Zeigen Sie, daß

$$T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \{\Phi \in \mathcal{L}(M);\ \mathrm{Fr}(\Phi) = \varnothing \ \&\ \mathfrak{M} \models \Phi\}$$

eine vollständige Theorie ist.

(2) Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ irgendeine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{L}(M)$ die Sprache, die aus $\mathcal{L}$ entsteht, indem man in das Alphabet von $\mathcal{L}$ für jedes Element $a \in M$ einen Namen $\dot{a}$ aufnimmt. Sei $\mathfrak{M}^*$ die $\mathcal{L}(M)$-Struktur, die aus $\mathfrak{M}$ entsteht, indem man jedes Element von M auszeichnet, also $\mathfrak{M}^* = \langle M, \ldots, a \rangle_{a \in M}$. Zeigen Sie, daß die $\mathcal{L}(M)$-Theorie von $\mathfrak{M}^*$, $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}^*) = \{\Phi \in \mathcal{L}(M);\ \mathrm{Fr}(\Phi) = \varnothing \ \&\ \mathfrak{M}^* \models \Phi\}$ eine vollständige Henkin-Theorie ist.

(3) Sei S die Theorie der Gruppen T^*_G in der reicheren Sprache $\mathcal{L}(\bullet, {}^{-1}, \dot{e})$ erweitert um das Axiom $\forall v: v = \dot{e}$. Zeigen Sie, daß S eine Henkin-Theorie ist.

Definition. Sei $\mathcal{L}^*$ eine Expansion von $\mathcal{L}$. Sei T eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und S eine Menge von $\mathcal{L}^*$-Aussagen. Wir nennen S eine *konservative Erweiterung* von T, wenn für jede beliebige $\mathcal{L}$-Aussage Φ gilt:

$$S \vdash_{\mathcal{L}^*} \Phi \quad \text{genau dann wenn} \quad T \vdash_{\mathcal{L}} \Phi.$$

(4) Sei T eine widerspruchsfreie Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und sei T_H die Henkinisierung von T. Zeigen Sie, daß T_H eine konservative Erweiterung von T ist.

§14. *Der Gödelsche Vollständigkeits-Satz*

Sind der Folgerungsbegriff und der Begriff der Deduktion gleich stark? Im Korrektheits-Satz (Satz 12.2) hatten wir „*wenn* $\Sigma \vdash \Phi$, *dann* $\Sigma \models \Phi$" bewiesen. Es stellt sich die Frage, ob dabei auch die Umkehrung gilt. Diese Frage wurde erstmals 1928 von David Hilbert und Wilhelm Ackermann gestellt. Sie schrieben in der 1.Auflage ihres Buches *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin 1928, Seite 68):

> *„Ob das Axiomensystem wenigstens in dem Sinne vollständig ist, daß wirklich alle logischen Formeln, die für jeden Individuenbereich richtig sind, daraus abgeleitet werden können, ist eine noch ungelöste Frage. Es läßt sich nur rein empirisch sagen, daß bei allen Anwendungen dieses Axiomensystem immer ausgereicht hat."*

Das Problem hat Kurt Gödel 1929 in seiner Dissertation an der Universität Wien gelöst.

14.1 Satz (Der schwache Vollständigkeits-Satz von K. Gödel, 1929) *Sei* T *eine Menge von* $\mathcal{L}$-*Aussagen (!) und* Φ *eine beliebige* $\mathcal{L}$-*Formel. Dann gilt:*

$$T \models \Phi \quad \textit{genau dann wenn} \quad T \vdash \Phi \ .$$

Beweis. Aus $T \vdash \Phi$ folgt $T \models \Phi$ nach dem Korrektheits-Satz 12.2. Wir müssen die Umkehrung beweisen.

Es sei $T \models \Phi$. Angenommen, es wäre *non*$(T \vdash \Phi)$. Sei etwa o.B.d.A. $Fr(\Phi) = \{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. Dann wäre auch

(†) $\qquad$ *non* $(T \vdash \forall v_1 \forall v_2 \dots \forall v_n \Phi)$,

denn andernfalls würde mit dem prädikatenlogischen Axiom (Q4) $T \vdash \Phi$ folgen, im Widerspruch zur Annahme. Offenbar wäre dann auch $T \cup \{\neg \forall v_1 \dots \forall v_n \Phi\}$ widerspruchsfrei.

[Denn andernfalls könnte man daraus alles ableiten, insbesondere $T \cup \{\neg \forall v_1 \dots \forall v_n \Phi\} \vdash \forall v_1 \dots \forall v_n \Phi$. Nach der Regel (P2) wäre auch

$T \cup \{\forall v_1 \ldots \forall v_n \Phi\} \vdash \forall v_1 \ldots \forall v_n \Phi$, also mit der Fallunterscheidungs-Regel (P5) : $T \vdash \forall v_1 \ldots \forall v_n \Phi$ im Widerspruch zu (†)].

Nach Gödels Satz 13.7 hätte $T \cup \{\neg\forall v_1 \ldots \forall v_n \Phi\}$ ein Modell $\mathfrak{M}$, also $\mathfrak{M} \models T$ und $\mathfrak{M} \models \neg\forall v_1 \ldots \forall v_n \Phi$. Aber $T \models \Phi$ besagt, daß jedes Modell von T auch ein Modell von Φ sein muß. Es wäre also auch $\mathfrak{M} \models \Phi$, und daher nach Proposition 9.3: $\mathfrak{M} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \Phi$ - im Widerspruch zu $\mathfrak{M} \models \neg\forall v_1 \ldots \forall v_n \Phi$. Die Annahme *non* ($T \vdash \Phi$) ist also zu verwerfen. ❑

<u>**14.2**</u> <u>**Satz**</u> (Der starke Vollständigkeits-Satz von K. Gödel, 1929) *Sei* T *eine beliebige Menge von $\mathcal{L}$-Formeln und Φ eine beliebige $\mathcal{L}$-Formel. Dann gilt:*

$$T \models \Phi \quad \textit{genau dann wenn} \quad T \vdash \Phi .$$

<u>Beweis</u>. Aus $T \vdash \Phi$ folgt $T \models \Phi$ nach dem Korrektheits-Satz 12.2. Wir müssen die Umkehrung beweisen. Es sei dazu $T \models \Phi$. Das heißt definitionsgemäß:

(†) für alle $\mathfrak{M}$ und alle Belegungen $h : \left(\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(T) = 1 \Rightarrow \mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1\right)$.

Sei $\quad \mathrm{Fr}(\Phi) \cup \bigcup\{\mathrm{Fr}(\Psi); \Psi \in T\} = \{y_\nu; \nu \in N\}$,

für eine geeignete Index-Menge N, wobei wir o.B.d.A. annehmen dürfen, daß keine der Variablen y_ν in den Formeln aus $T \cup \{\Phi\}$ auch gebunden auftritt. Die Variablen y_ν seien Variablen von $\mathcal{L}$.

Es seien jetzt $\dot{d}_\nu$ (für $\nu \in N$) neue Individuen-Konstante, die noch nicht im Alphabet von $\mathcal{L}$ vorkommen. Wir expandieren $\mathcal{L}$ um diese neuen Zeichen und setzen:

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \sqcup \{\dot{d}_\nu ; \nu \in N\}.$$

Für $\Theta \in T \cup \{\Phi\}$ sei Θ^* diejenige $\mathcal{L}^*$-Formel, die aus Θ entsteht, indem man jedes y_ν durch $\dot{d}_\nu$ ersetzt. Offenbar ist Θ^* eine $\mathcal{L}^*$-Aussage.

1. Behauptung: $\quad T \models \Phi \Rightarrow \{\Theta^*; \Theta \in T\} \models \Phi^*$.

Beweis: Da $\{\Theta^*; \Theta \in T\}$ eine Menge von $\mathcal{L}^*$-Aussagen ist, müssen wir zeigen, daß jede $\mathcal{L}^*$-Struktur $\mathfrak{M}^* = \langle M, \ldots \rangle$, welche ein Modell von $\{\Theta^*; \Theta \in T\}$ ist, auch ein Modell von Φ^* ist.

Sei also $\mathfrak{M}^*$ mit $\mathfrak{M}^* \models \Theta^*$ (für alle $\Theta \in T$) gegeben. Betrachte die Belegung h, die durch $h(y_\nu) = \dot{d}_\nu$ für $\nu \in N$, und $h(v) \in M$ beliebig für alle übrigen

Variablen v von $\mathcal{L}$, gegeben ist. $\mathfrak{M}^* \models \Theta^*$ (für alle $\Theta \in T$) besagt dann gerade $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Theta) = 1$ für alle $\Theta \in T$. Nach (†) folgt daraus $\mathrm{val}^h_{\mathfrak{M}}(\Phi) = 1$, also $\mathfrak{M}^* \models \Phi^*$ und die Behauptung ist bewiesen.

Aus $\{\Theta^*; \Theta \in T\} \models \Phi^*$ folgt jetzt nach dem schwachen Vollständigkeits-Satz 14.1 $\{\Theta^*; \Theta \in T\} \vdash \Phi^*$.

2. Behauptung: $\{\Theta^*; \Theta \in T\} \vdash \Phi^* \Rightarrow \{\Theta; \Theta \in T\} \vdash \Phi$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es endlich viele $\mathcal{L}^*$-Formeln $\Psi_1^*, \Psi_2^*, \ldots, \Psi_m^*$ (wobei alle $\Psi_i \in T$), so daß die Sequenz $\Psi_1^*, \Psi_2^*, \ldots, \Psi_m^* \vdash_{\mathcal{L}^*} \Phi^*$ aufgrund der Regeln (P1) bis (P6) des Prädikaten-Kalküls für $\mathcal{L}^*$ nach endlich vielen Schritten hingeschrieben werden darf. Wir wählen eine solche Herleitung von $\Psi_1^*, \Psi_2^*, \ldots, \Psi_m^* \vdash_{\mathcal{L}^*} \Phi^*$. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen,

(#) daß in keiner Formel dieser Herleitung eine Variable y_ν (für $\nu \in N$) auftritt (weder frei noch gebunden).

Wir ersetzen jetzt in allen Formeln der Herleitung jede Individuenkonstante $\dot{d}_\nu$ durch die Variable y_ν mit gleichem Index $\nu \in N$. Man bestätigt, daß durch diese Ersetzung jedes prädikatenlogische Axiom (Q1),..,(Q6) ein Axiom bleibt, und daß jede Anwendung einer Regel (P1),...,(P6) eine Anwendung derselben Regel bleibt

[dies gilt beispielsweise auch für (Q3), denn wenn in der Herleitung $(\forall v_n(\Psi^* \to \Phi^*)) \to (\Psi^* \to \forall v_n \Phi^*)$ mit $v_n \notin \mathrm{Fr}(\Psi^*)$ benutzt wurde, dann ist auch $v_n \notin \mathrm{Fr}(\Psi)$ aufgrund unserer Annahme (#), und somit ist auch $(\forall v_n(\Psi \to \Phi)) \to (\Psi \to \forall v_n \Phi)$ ein Axiom].

Durch die Ersetzung geht also die Herleitung in eine Herleitung über. Bei der Ersetzung gehen die Aussagen Ψ_i^* und Φ^* in die ursprünglichen Formeln $\Psi_i \in T$ und Φ über. Wir erhalten also $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m \vdash_{\mathcal{L}} \Phi$ und daher $T \vdash \Phi$ wie gewünscht. ❑

<u>14.3</u> <u>Korollar</u> (Endlichkeits-Satz) *Sei* T *eine beliebige Menge von* $\mathcal{L}$-*Formeln und* Φ *eine beliebige* $\mathcal{L}$-*Formel. Wenn* $T \models \Phi$, *dann gibt es eine endliche Teilmenge* S *von* T *mit* $S \models \Phi$.

Beweis. Wir nehmen $T \models \Phi$ an. Nach Satz 14.2 gilt dann $T \vdash \Phi$ und das heißt nach Definition 12.1, daß es eine endliche Teilmenge $S \subseteq T$ gibt mit $S \vdash \Phi$. Nach dem Korrektheits-Satz 12.2 gilt dann aber auch $S \models \Phi$. ❑

Gödel hat seinen Vollständigkeits-Satz auf ganz andere Weise bewiesen. Sein Beweis setzt dabei voraus, daß die betrachtete Sprache abzählbar ist. Das relevante Modell wird durch eine Anwendung des Königschen Lemmas (Existenz von unendlichen Zweigen in Bäumen der Höhe ω, deren sämtliche Schichten endlich sind) gewonnen. Hilbert und Ackermann haben in der zweiten Auflage (1937) ihres Buches „Grundzüge der theoretischen Logik" einen neuen Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes unter Verwendung der Skolemschen Normalform gegeben. Eine Variante dieses Beweises hatte Leon Henkin 1949 entwickelt. Einen weiteren Beweis haben Helena Rasiowa und Roman Sikorski (*„A proof of the completeness theorem of Gödel"*, Fundamenta Mathematicae, Band 37 (1950), pp.193-200) gegeben.

— * —

Der Gödelsche Vollständigkeits-Satz hat die höchst bemerkenswerte Konsequenz, daß die Menge aller Folgerungen aus einer endlichen (oder aus einer rekursiv-aufzählbaren) Menge Σ von Axiomen algorithmisch erzeugt werden kann. Denn $\{\Phi;\ \Sigma \models \Phi\} = \{\Phi;\ \Sigma \vdash \Phi\}$ und mit dem Prädikaten-Kalkül können somit die sämtlichen Folgerungen aus Σ auf rein mechanischem Wege gewonnen werden. Unter Verwendung der Begriffe der „rekursiven" Funktion (D. Hilbert, Th. Skolem) kann man diesen Sachverhalt auch wie folgt wiedergeben.

14.4 Korollar: *Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare quantorenlogische Sprache mit rekursivem (oder rekursiv-aufzählbarem) Alphabet. Dann ist die Menge* $\mathrm{Taut}(\mathcal{L}) = \{\Phi \in \mathcal{L};\ \vdash \Phi\}$ *aller logisch-allgemeingültigen Formeln (Tautologien) rekursiv-aufzählbar.* ❑

Auch bei rekursivem Alphabet ist die Menge $\mathrm{Taut}(\mathcal{L})$ im allgemeinen nicht rekursiv, sondern lediglich rekursiv-aufzählbar. Das ist ein berühmter Satz von Alonzo Church (*„A note on the Entscheidungsproblem"*, Journal of Symbolic Logic 1(1936), pp.40-41. Korrekturen p.101-102) und Alan Turing (*„On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem"*, Proc. London Math. Soc. 42 (1937), pp.230-265 und 43(1937), pp.544-546). Einen gut lesbaren Beweis findet man in Hans Hermes: *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit,* Springer Verlag Berlin 1978 (3.Auflage), pp.165-172.

Rekursivität wird mit *Entscheidbarkeit* gleichgesetzt. Diese Gleichsetzung wurde erstmals von Alonzo Church ausgesprochen (cf. Amer.J.Math.58(1936), pp.345-363) und wird deshalb *»Churchsche These«* genannt. Der Satz von Church-Turing besagt demnach, daß bei hinreichend reichen Sprachen $\mathcal{L}$ die Menge Taut($\mathcal{L}$) nicht entscheidbar ist. Church und auch Turing setzen voraus, daß die jeweiligen Sprachen eine größere Anzahl von mehrstelligen Funktions-Zeichen enthalten. Diese Resultate können wie folgt verschärft werden.

Satz (Leopold Löwenheim, 1915) *Sei* $\mathcal{L}$ *eine quantorenlogische Sprache, deren einzige außerlogischen Zeichen nur Individuen-Konstanten und 1-stellige Relations-Zeichen sind. Dann ist* Taut($\mathcal{L}$) *entscheidbar.*

Satz *Sei* $\mathcal{L}$ *eine quantorenlogische Sprache, die wenigstens ein 2-stelliges Relationszeichen enthält. Dann ist* Taut($\mathcal{L}$) *unentscheidbar.*

Satz (Mojzesz Presburger, 1929) *Sei* $\mathcal{L}$ *eine quantorenlogische Sprache, deren einzige außerlogische Zeichen nur Individuenkonstante und ein einziges 2-stelliges Funktionszeichen ist. Dann ist* Taut($\mathcal{L}$) *entscheidbar.*

Satz *Sei* $\mathcal{L}$ *eine quantorenlogische Sprache, die wenigstens zwei 2-stellige Funktionszeichen enthält. Dann ist* Taut($\mathcal{L}$) *unentscheidbar.*

Die Grenze zwischen entscheidbaren und unentscheidbaren Klassen von $\mathcal{L}$-Strkturen kann man auch mit Bezug auf die Kompliziertheit der Quantoren-Präfixe von $\mathcal{L}$-Formeln in pränexer Normalform suchen. Über Resultate in diesem Bereich berichten:

W. Ackermann: *Solvable cases of the Decision Problem.* Amsterdam 1968.

J. Suranyi: *Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems,* Berlin 1959.

Diese Sätze offenbaren einen großen Unterschied zwischen der Junktoren-Logik und der Quantoren-Logik, denn nach Satz 4.3 von Bernays-Post ist die Menge aller aussagenlogischen Tautologien entscheidbar. In der Aussagen-Logik hat der Traum von Leibniz in Bezug auf die Entscheidbarkeit aller wissenschaftlichen Probleme eine positive Realisierung, nicht so jedoch in der Quantoren-Logik.

Wir erwähnen noch, daß nach Kurt Gödel (Vortrag in Königsberg, 1930, - siehe Gödels Werke III, p.15 und p.18) für die Logik der zweiten Stufe nicht einmal mehr rekursive, vollständige Kalküle existieren (siehe §18). - Für einen Beweis siehe auch Hans Hermes: *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit.* Springer Verlag Berlin 1978 (3.Auflage), pp.172-176.

Semi-Entscheidbarkeit. Die Menge Taut($\mathcal{L}$) aller logisch-allgemeingültigen $\mathcal{L}$-Formeln ist rekursiv-aufzählbar.

Rekursive Aufzählbarkeit wird mit *„Semi-Entscheidbarkeit“* gleichgesetzt.

Obwohl Taut($\mathcal{L}$) im allgemeinen nicht entscheidbar ist, ist Taut($\mathcal{L}$) dennoch semi-entscheidbar. Es gibt also ein mechanisch ausführbares Verfahren, das bei einer vorgelegten Aussage genau dann nach endlich vielen Schritten zu einem Ende führt, wenn die Aussage eine Tautologie ist, und zu keinem Ende kommt, wenn die Aussage keine Tautologie ist. Solange das Verfahren noch nicht zu einem Ende gekommen ist, kann man nicht sagen, ob die vorgegebene Aussage eine Tautologie ist oder nicht. Man kann nicht vorhersagen, nach wieviel Rechenschritten mit einem eventuellen Ende des Verfahrens zu rechnen ist. Insofern liegt kein Entscheidungs-Verfahren vor, sondern nur ein „Semi-Entscheidungs-Verfahren“.

Literatur

Kurt Gödel: *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls.* Dissertation Universität Wien 1929.

Kurt Gödel: *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.* Monatshefte für Mathematik u.Physik 37 (1930), pp.349-360.

Kurt Gödel: *Collected Works,* Oxford University Press, Band 1 (1986), Band 2 (1990), Band 3 (1995).

Übungsaufgaben zu §14

(1) Zeigen Sie, daß von der 1.Behauptung im Beweis von Satz 14.~~3~~2 auch die Umkehrung gilt.

(2) Zeigen Sie, daß von der 2.Behauptung im Beweis von Satz 14.~~3~~2 auch die Umkehrung gilt.