Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik II — SS 08

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **Blatt 3**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zeigen Sie, daß folgende Ausdrücke Modelle über jedem endlichen Individuenbereich haben. Zeigen Sie, daß deren Negate genau über den unendlichen Individuenbereichen erfüllbar sind.

a) $\forall X[\forall x\forall y\forall z\forall u(X(x,y) \wedge X(z,u) \rightarrow (x \doteq z \leftrightarrow y \doteq u)) \wedge \forall x\exists y X(x,y) \rightarrow \forall y\exists x X(x,y)]$

b) $\forall X[\forall x\forall y\forall z(X(x,y) \wedge X(y,z) \rightarrow X(x,z)) \wedge \forall x\neg X(x,x) \wedge \exists x\exists y X(x,y) \rightarrow \exists x\forall y\neg X(x,y)]$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Wir betrachten die Sprache mit $\mathbf{0}$ als Konstante und $\mathbf{s}$ als einstelligem Funktionszeichen, sowie Modelle über dem Bereich der natürlichen Zahlen, in denen $\mathbf{0}$ als Null und $\mathbf{s}$ als Nachfolgerfunktion interpretiert werden. Die Existenz welcher Mengen wird durch folgende Instanzen des Komprehensionsschemas postuliert:

a) $\exists X\forall x[X(x) \leftrightarrow \forall Y(Y(\mathbf{s}(\mathbf{s}(x))))]$

b) $\exists X\forall x[X(x) \leftrightarrow \forall Y([Y(\mathbf{0}) \wedge \forall z(Y(z) \rightarrow Y(\mathbf{s}(z))) \rightarrow \forall z Y(z)] \rightarrow Y(x))]$

c) $\exists X\forall x[X(x) \leftrightarrow \forall Y([Y(\mathbf{0}) \wedge \forall z(Y(z) \rightarrow Y(\mathbf{s}(\mathbf{s}(z)))) \rightarrow \forall z Y(z)] \rightarrow Y(x))]$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, daß folgende Formeln für die Definition der Identität $x = y$ verwendet werden können, indem sie nachweisen: $\vdash_2 x \doteq y \leftrightarrow x = y$.

a) $\forall X^1[X^1(x) \rightarrow X^1(y)]$

b) $\forall X^2[\forall x X^2(x,x) \rightarrow X^2(x,y)]$

c) $\forall X^2[X^2(x,y) \rightarrow X^2(y,x)]$

d) $\forall X^2[X^2(x,y) \rightarrow \exists z X^2(z,x)]$

e) $\forall X^2[\forall z X^2(x,z) \rightarrow X^2(y,x)]$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R eine zweistellige Relation, und sei $R^t(x,y)$ definiert durch

$$\forall X^2[(\forall x X^2(x,x) \wedge \forall xyz(X^2(x,y) \wedge X^2(y,z) \rightarrow X^2(x,z)) \wedge \forall xy(R(x,y) \rightarrow X^2(x,y)) \rightarrow X^2(x,y))]$$

Zeigen Sie, daß R^t die reflexive und transitive Hülle von R ist, d.h. die kleinste reflexive und transitive Relation, die R umfaßt.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Geben Sie eine Beweisskizze für: $\Gamma \vdash_2 \phi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_1 \phi^*$.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage durch Induktion über die Struktur der Herleitung mit dem Komprehensionsschema und vereinfachten $\forall, \exists$-Regeln. Für die Quantorenregeln ist es vorteilhaft, einen Zwischenschritt zu verwenden, bei dem die freie Variable durch eine geeignete neue Konstante ersetzt wird.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Geben Sie eine Ableitung an zu:

$$\vdash_2 \exists X^n\phi \leftrightarrow \forall X^0(\forall X^n(\phi \rightarrow X^0) \rightarrow X^0)$$