Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik II SS 08

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 7**

Aufgabe 1 (4+1 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Für jeden geschlossenen Term t gibt es eine natürliche Zahl n mit $\mathrm{PA} \vdash t = \overline{n}$.

b) Für alle geschlossenen Terme t_1, t_2 gilt: wenn $\mathbb{N} \models t_1 = t_2$, dann $\mathrm{PA} \vdash t_1 = t_2$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Geben Sie zu jeder Formel $\varphi(x, y)$ eine Formel $\psi(z)$ an, so daß gilt: $\mathrm{PA} \vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \leftrightarrow \forall z \psi(z)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Falls eine Funktion $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ in PA reprsentierbar ist, dann ist sie μ-rekursiv (nicht notwendigerweise primitiv rekursiv!).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind:

a) $f(n) = \ulcorner t(\overline{n}) \urcorner$

b) $g(n) = \ulcorner \phi(\overline{n}) \urcorner$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Wir haben gezeigt: Jede primitiv-rekursive Funktion und jedes primitiv-rekursive Prädikat läßt sich durch eine Σ_1-Formel darstellen. [Das gilt auch für rekursive Formeln und Prädikate.] Zeigen Sie, daß man mit *strikten* Σ_1-Formeln auskommt, d.h. mit Formeln der Form $\exists x \varphi$, wobei φ eine Δ_0-Formel ist. Zeigen Sie dazu: Zu jeder Σ_1-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ gibt es eine strikte Σ_1-Formel $\psi(x_1, \ldots, x_k)$, so daß für alle $n_1, \ldots, n_k$ gilt: $\mathrm{PA} \vdash \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}) \leftrightarrow \psi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$.