

Aufgabe 47 (2 Punkte)

Zeigen Sie in $NK'_=$: $\vdash \forall x(f(x) = g(x)) \rightarrow \forall x(f(f(x)) = g(g(x)))$

Aufgabe 48 (2 + 2 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass im Beweis des Modell-Existenz-Theorems (12.12) die Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ wohldefiniert ist, d.h. dass gilt: $t_1 \sim s_1, \dots, t_n \sim s_n \Rightarrow f^{\mathfrak{A}}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$.
2. Zeigen Sie, dass für jeden geschlossenen Term t gilt: $\llbracket t \rrbracket^{\mathfrak{A}} = \bar{t}$.

Aufgabe 49 (5 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Es seien Γ, Δ Mengen von \mathcal{L} -Aussagen und $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ Klassen von \mathcal{L} -Strukturen. Es sei weiterhin $\text{MOD}(\Gamma) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \Gamma\}$ und $\text{Th}(\mathfrak{K}) = \{\phi \in \mathcal{L} : \mathfrak{K} \models \phi \text{ und } FV(\phi) = \emptyset\}$ (vgl. Def. 13.1). Zeigen Sie:

1. $\text{MOD}(\Gamma \cup \Delta) = \text{MOD}(\Gamma) \cap \text{MOD}(\Delta)$,
2. $\text{Th}(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \text{Th}(\mathfrak{K}_1) \cap \text{Th}(\mathfrak{K}_2)$,
3. $\mathfrak{K} \subseteq \text{MOD}(\Gamma)$ genau dann, wenn $\Gamma \subseteq \text{Th}(\mathfrak{K})$,
4. $\text{MOD}(\Gamma \cap \Delta) \supseteq \text{MOD}(\Gamma) \cup \text{MOD}(\Delta)$,
5. $\text{Th}(\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2) \supseteq \text{Th}(\mathfrak{K}_1) \cup \text{Th}(\mathfrak{K}_2)$.

Zeigen Sie im Falle von (d) und (e), dass keine Gleichheit gilt.