Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik — Blatt 2

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2010/11**

Aufgabe 5 (3 Zusatzpunkte)

Ein Ast eines Baumes ist eine maximale linear geordnete Teilmenge des Baumes, die Länge eines Astes ist die um Eins verminderte Anzahl seiner Knoten. Zeigen Sie: Für jedes $\varphi \in PROP$ ist die Länge des längsten Astes im Strukturbaum von φ identisch mit dem Rang von φ.

Aufgabe 6 (1+1+1 Punkte)

a) Geben Sie eine rekursive Definition der Länge $l(\phi)$ (Anzahl der vorkommenden Zeichen) einer Formel $\phi \in PROP$ an und bestimmen Sie dann die Länge der Formel $\neg\neg p \wedge q \leftrightarrow q$. (Hinweis: Zur Orientierung siehe Skript Definition 1.7, 1.8 und 1.9. Die nicht explizit hingeschriebenen Klammern müssen mitgezählt werden!)

b) Geben Sie eine induktive Definition der Menge $PROP_{\wedge,\vee}$ aller Formeln, in denen höchstens die Konjunktion und die Disjunktion als Junktor vorkommen, an. Halten Sie sich dabei an die Definition 1.2 aus dem Skript.

c) Zeigen Sie dann mit dem zugehörigen Induktions-Prinzip, dass

$$\forall \phi \in PROP_{\wedge,\vee} \exists n \in \mathbb{N} : l(\phi) = 4n + 1.$$

Aufgabe 7 (2+1 Punkte)

a) Geben Sie zwei Belegungen v, w an, so dass alle Formeln aus $PROP_{\wedge,\vee}$ mit 0 bzw. mit 1 bewertet werden. Zeigen Sie dieses dann mit dem zugehörigen Induktions-Prinzip.

b) Welche Formeln aus $PROP_{\wedge,\vee}$ sind Tautologien, welche erfüllbar, welche kontingent und welche kontradiktorisch?

Aufgabe 8 (1+1+1+1 Punkte)

Prüfen Sie mithilfe von Wahrheitstafeln, ob die folgenden Formeln und Formelschemata Tautologien, Kontradiktionen oder kontingente Formeln sind.

(a) $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$ (b) $\neg(\neg\phi \vee \phi \leftrightarrow \neg \perp)$

(c) $(p_1 \to p_2) \vee p_3 \to \perp$ (d) $(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\phi)$

(Halten Sie sich beim Aufbau der Wahrheitstafeln an das Beispiel auf S.15 im Skript; beachten Sie insbesondere eine sinnvolle Reihenfolge der Zeilen.)

Aufgabe 9 (1+2 Punkte)

Beweisen Sie:

a) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \rho$, dann $\varphi \models \rho$.

b) $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1$ genau dann, wenn $[\![\varphi]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v$.

Abgabe der Aufgaben am Do. 4.11.2010 nach der Vorlesung oder als PDF im Internet.