Aufgabe 10 (1+1+1 Punkte und 1 Zusatzpunkt)

Sei $\Gamma \subseteq PROP$ eine beliebige Aussagenmenge, dann ist $Cn(\Gamma) := \{\phi \in PROP;\ \Gamma \models \phi\}$ die *Menge aller Konsequenzen* aus Γ. Zeigen Sie, dass Cn die folgenden Eigenschaften hat:

a) $Cn(\bot) = PROP$ und $Cn(\top) = Taut$

b) $\Gamma \subseteq \Delta \;\; \Rightarrow \;\; Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$ (Monotonie)

c) $Cn(\Gamma) = Cn(Cn(\Gamma))$ (Abgeschlossenheit)

Zeigen Sie weiter, dass im Allgemeinen die Gleichung $Cn(\Gamma[p/q]) = Cn(\Gamma)[p/q]$ falsch ist. Dabei ist $\Gamma[p/q] := \{\phi[p/q];\ \phi \in \Gamma\}$.

Aufgabe 11 (2 Punkte)

Geben Sie zu der Formel $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r$ eine äquivalente Formel an, in der als einziger Junktor der zweistellige Junktor $|$, der durch die Wahrheitsfunktion $f_|(x, y) = 1 - xy$ definiert ist, vorkommt.

Aufgabe 12 (2 Punkte)

Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren (siehe auch Skript S. 23) mit Hilfe der Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und $\bot$ eine Formel, die den dreistelligen Junktor \$ ausdrückt, welcher durch folgende Wahrheitstafel gegeben ist:

ϕ_3	ϕ_2	ϕ_1	$\$(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Aufgabe 13 (1+1+2 Punkte und 1+1 Zusatzpunkte)

Beweisen Sie, welche der folgenden Mengen von Junktoren funktional vollständig sind.

a) $\mathfrak{J}_1 = \{\wedge, \vee\}$

b) $\mathfrak{J}_2 := \{\vee\}$

c) $\mathfrak{J}_3 := \{\neg, \vee\}$

d) $\mathfrak{J}_4 := \{|\}$

e) $\mathfrak{J}_5 = \{\neg, \leftrightarrow\}$

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse des Satzes 4.4 über funktionale Vollständigkeit und die der Aufgabe 7, Blatt 2.

Abgabe der Aufgaben am Do. 11.11.2010 nach der Vorlesung oder als PDF im Internet.