

## Mathematische Logik I

### Blatt 5

*Hinweis (Formelbäume):* Formelbäume können unter L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X gut mit dem Paket *bussproofs.sty* gesetzt werden.

**Aufgabe 16:** Setzen Sie voraus, dass  $\phi, \psi, \sigma \in \text{PROP}$  Formeln sind. Prüfen Sie, ob folgende Strukturen zu Ableitungen ergänzt werden können. Ergänzen Sie gegebenenfalls die Strukturen zu Ableitungen und geben Sie dann eine Ableitbarkeitsbehauptung an, die mit der Ableitung bewiesen werden kann. Ansonsten begründen Sie kurz, warum keine Ergänzung möglich ist.

$(a) \quad \frac{\phi \quad \psi \quad \sigma}{(\phi \wedge \psi) \wedge \sigma}$	$(b) \quad \frac{\frac{[\phi \wedge \psi]}{\phi \quad \psi}}{\phi \wedge \psi \rightarrow \phi \quad \phi \wedge \psi \rightarrow \psi}$
$(c) \quad \frac{\frac{\phi}{\phi \rightarrow \phi}}{(\phi \rightarrow \phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)}}{\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))}$	$(d) \quad \frac{\frac{[\phi] \quad \neg\phi}{\perp} \text{ (RAA)}}{\neg\phi}$
$(e) \quad \frac{\frac{[\phi] \quad \neg\phi}{\perp}}{\neg\phi}$	$(f) \quad \frac{\frac{\frac{[\phi]^1 \quad [\neg\phi]^2}{\perp} \text{ (1)}}{\perp \rightarrow \neg\phi}}{\frac{\perp}{\phi} \text{ (2)}}$

**Aufgabe 17:** Beweisen Sie im Kalkül NK' die folgenden Ableitbarkeitsbehauptungen. Beachten Sie hierbei die Definition der Ableitbarkeit (DEF 6.4) und setzen Sie voraus, dass  $\phi, \psi, \sigma$  beliebige Formeln aus PROP sind.

- (a)  $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \sigma \vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$
- (b)  $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi$
- (c)  $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma))$
- (d)  $\neg(\phi \wedge \psi) \vdash (\phi \rightarrow \neg\psi)$

Warum genügt in dieser Aufgabe die einfache Angabe eines Ableitungsbaumes nicht?

**Aufgabe 18:** Beweisen Sie ausführlich, dass für alle Formeln  $\phi, \psi \in \text{PROP}$  und alle Formelmengen  $\Gamma, \Delta \subseteq \text{PROP}$  die folgenden Strukturregeln im Kalkül NK' gelten. (Vgl. hierzu Proposition 6.6.)

- (a)  $\phi \vdash \phi$  (Identität)
- (b)  $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \Gamma, \Delta \vdash \phi$  (Verdünnung)
- (c)  $(\Gamma \vdash \phi \text{ und } \Delta, \phi \vdash \psi) \Rightarrow \Gamma, \Delta \vdash \psi$  (Schnitt)

**Aufgabe 19 (Zweiter Versuch):** Lösen Sie Aufgabe (9), Blatt 3, erneut.

*Hinweis (Zweiter Versuch):* Eine Bearbeitung des zweiten Versuches erfolgt freiwillig, nur der bessere Versuch fließt in die Bewertung ein.

**Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 21. Mai.**