

## Mathematische Logik I

### Blatt 7

---

**Aufgabe 24:** Zeigen Sie für beliebige Formelmengen  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$  die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

- (a)  $\Gamma$  ist konsistent.
- (b) Es gibt keine Formel  $\phi \in \text{PROP}$  mit:  $\Gamma \vdash \phi$  und  $\Gamma \vdash \neg\phi$ .
- (c) Es gibt eine Formel  $\phi$  mit:  $\Gamma \not\vdash \phi$

**DEF (Vollständigkeit/ Unabhängigkeit):** Eine Formelmenge  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$  heißt *vollständig*, falls für jedes  $\phi \in \text{PROP}$  gilt:

$$\Gamma \vdash \phi \quad \text{oder} \quad \Gamma \vdash \neg\phi$$

Falls  $\Gamma$  nicht vollständig ist, gibt es Formeln  $\phi \in \text{PROP}$  mit  $\Gamma \not\vdash \phi$  und  $\Gamma \not\vdash \neg\phi$ . Diese Formeln werden *unabhängig von  $\Gamma$*  genannt.

*Hinweis (Aufgabe 25):* Setzen Sie in der nächsten Aufgabe voraus, dass PROP über der vollständigen Junktorenmenge  $\{\rightarrow, \wedge, \perp\}$  definiert wurde.

**Aufgabe 25:** Für alle  $k \in \mathbb{N}$  sei  $\lambda_k \in \{p_k, \neg p_k\}$  ein Literal.

1. Zeigen Sie mit Induktion über den Formelaufbau, dass die Formelmenge  $\Lambda := \{\lambda_k; k \in \mathbb{N}\}$  vollständig ist. Argumentieren Sie hierbei rein syntaktisch.
2. Zeigen Sie zudem unter Verwendung des Vollständigkeitsatzes, dass die Menge  $\Lambda$  konsistent ist.

**Aufgabe 26:** Es soll in einer formalen Sprache  $\mathfrak{L}$  über Strukturen gesprochen werden, in denen zwei 2-stellige Funktionen  $+$  und  $\times$ , eine 3-stellige Funktion  $\min$  und zwei 2-stellige Relationen  $\leq$  und  $|$  (teilt) sowie 3 Konstanten ausgezeichnet sind.

Definieren Sie geeignete Indexmengen  $I, K$  und  $L$  und geben Sie eine geeignete Signatur an; geben sie dann alle nichtlogischen Zeichen der Sprache  $\mathfrak{L}$  (wie definiert) an.

Definieren Sie zudem zwei Strukturen zu dieser Sprache  $\mathfrak{L}$  über dem Grundraum  $\mathbb{N}$ . Dabei soll in der ersten Struktur die Interpretation der nichtlogischen Zeichen kanonisch sein; in der zweiten alle Interpretationen verschieden von der Interpretation in der ersten.

**Aufgabe 27 (Zweiter Versuch):** Lösen Sie Aufgabe (17), Blatt 5, erneut.

*Hinweis (Zweiter Versuch):* Eine Bearbeitung des zweiten Versuches erfolgt freiwillig, nur der bessere Versuch fließt in die Bewertung ein.

**Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 4. Juni.**