Mathematische Logik I – Übungsaufgaben **Blatt 6**

Dr. Michael Arndt **WS 2014/15**

Aufgabe 1 (1 Punkt)

Beweisen Sie Proposition 6.7 (3). D.h. beweisen Sie die Gültigkeit der Schlussregeln ($\vee I_1$) und ($\vee I_2$) in NK′, wobei $\phi \vee \psi$ wie auf Seite 37 des Skripts definiert ist. Zeigen Sie dazu für NK′:

$$\phi \vdash \phi \vee \psi \quad \text{sowie} \quad \psi \vdash \phi \vee \psi$$

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte)

Sei $\phi \,|\, \psi$ eine Abkürzung für $\phi \wedge \psi \to \bot$. Zeigen Sie für NK′:

a) $\phi \,|\, \psi,\ \phi,\ \psi \vdash \bot$

b) Wenn $\Gamma, \phi \vdash \bot$, dann $\Gamma \vdash \phi \,|\, \psi$. Wenn $\Gamma, \psi \vdash \bot$, dann $\Gamma \vdash \phi \,|\, \psi$.

c) Leiten Sie aus den Ergebnissen von a) und b) Einführungs- und Beseitigungsregeln für $|$ an.

Aufgabe 3 (1+1+1+2 Punkte)

Zeigen Sie im Kalkül NK, in dem die Regeln aus Proposition 6.7 Grundregeln sind, dass folgende Beziehungen gelten:

a) $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$

b) $\vdash (\phi \wedge \neg\phi) \to \psi$

c) $\vdash \neg\neg\phi \to \phi$

d) $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

Aufgabe 4 (1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind konsistent? Geben Sie jeweils eine Begründung.

a) $\{p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_0\}$

b) $\{p_0,\ p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to \bot\}$

c) $\{p_{2k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{p_{2k+1} \to \bot : k \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 5 $(1 + 1 + 1$ Punkte$)$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine geeignete Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ an, welche die genannte Eigenschaft hat. Geben Sie jeweils eine Begründung.

a) Γ hat keine maximal-konsistente Erweiterung.

b) Γ hat genau eine maximal-konsistente Erweiterung.

c) Γ hat unendlich viele maximal-konsistente Erweiterungen.