Mathematische Logik I – Übungsaufgaben **Blatt 12**

Dr. Michael Arndt **WS 2014/15**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie Theorem 11.3 (2). D.h. zeigen Sie, dass für jede Variable x und jede $\mathcal{L}$-Formel ϕ im Kalkül NK gilt:

$$\forall x\phi \dashv\vdash \neg\exists x\neg\phi$$

Hinweis: Aufgrund der informellen Notation der Schlussregeln ist es sinnvoll, in den Ableitungen $\phi(x)$ anstatt ϕ zu schreiben. (Beide Schreibweisen stehen für dieselbe Formel. Die erste Schreibweise weist lediglich auf ein mögliches Vorkommen der Variable x in ϕ hin.)

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Schlussfiguren:

$$\mathfrak{D}_1 \quad \simeq \quad \dfrac{\dfrac{}{x \doteq x}\,(IR_1)}{\forall x(x \doteq x)}\,(\forall I)$$

$$\mathfrak{D}_2 \quad \simeq \quad \dfrac{(x \doteq x) \vee \neg(x \doteq x)}{\forall x\big((x \doteq x) \vee \neg(x \doteq x)\big)}\,(\forall I)$$

$$\mathfrak{D}_3 \quad \simeq \quad \dfrac{\dfrac{[x \doteq x]^1}{(x \doteq x) \to (x \doteq x)}\,(\to I : 1)}{\forall x\big((x \doteq x) \to (x \doteq x)\big)}\,(\forall I)$$

Geben Sie für jede dieser Schlussfiguren an, in welchen der in der Vorlesung behandelten Kalkülen diese eine gültige Ableitung ist.

Aufgabe 3 (2+2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie in $\mathrm{NK}'_{\doteq}$:

a) $\dot{R}(\dot{c}) \vdash \exists x\big(x \doteq \dot{c} \wedge \dot{R}(x)\big)$

b) $\exists x\big(x \doteq \dot{c} \wedge \dot{R}(x)\big) \vdash \dot{R}(\dot{c})$

c) $\forall x(x \doteq y \to x \doteq z) \vdash y \doteq z$

d) $\vdash \forall x\big(\dot{f}(x) \to \dot{g}(x)\big) \to \forall x\big(\dot{f}(\dot{f}(x)) \to \dot{g}(\dot{g}(x))\big)$