Mathematische Logik I

— Foliensatz 6 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt wird der Kalkül des Natürlichen Schließens (NK′) nach Gerhard Gentzen eingeführt.

NK′ ist ein <u>syntaktisches</u> Schlussverfahren, in dem Formeln in einer Baumstruktur miteinander in Beziehung gesetzt werden.

Es verzichtet auf Axiome und besteht lediglich aus Annahmen und Regeln zum Ableiten von Schlüssen.

Das Ableiten im Kalkül (Beweisen) ist die syntaktische Entsprechung zur semantischen Folgerung.

Vorbemerkungen

Bemerkungen:

1. Der Kalkül NK' wird für die aussagenlogische Sprache über der funktional-vollständigen Junktorenmenge $\{\rightarrow, \perp, \wedge\}$ definiert. Dadurch kann man die Anzahl der benötigten Regeln beschränken.
2. Weitere Junktoren werden zum Abschluss des Kapitels betrachtet.

Der Kalkül NK'

Eine Ableitung ist eine Baumstruktur, die aus dem Hinschreiben von Prämissen und der Anwendung von Schlüssen entsteht.

1. Annahmen dürfen jederzeit als Prämisse eingeführt werden. Dies geschieht durch das Hinschreiben einer Formel ϕ.
2. Ein einzelner Schluss besteht aus einer oder mehreren Prämissen $\psi_1, \ldots, \psi_n$ und einer Konklusion χ, zu der vermöge einer Regel übergegangen wird.

   Dies wird im Kalkül nach folgendem Schema notiert:

   $$\frac{\psi_1 \qquad \cdots \qquad \psi_n}{\chi}\ (\mathit{Regel})$$

   Die Konklusion eines Schlusses kann zur Prämisse eines weiteren Schlusses werden.

Der Kalkül NK'

Notation von Ableitungen und Regeln:

1. $\mathfrak{D}$ wird als metasprachliche Variable für Ableitungen verwendet, ggf. mit natürlichen Zahlen als Indizes.

   Eine Formel ϕ über dem $\mathfrak{D}$ kennzeichnet, dass die Ableitung $\mathfrak{D}$ die Formel ϕ als offene Annahme hat.

   Eine Formel ψ unter dem $\mathfrak{D}$ kennzeichnet, dass die Ableitung $\mathfrak{D}$ die Formel ψ als Konklusion (Endformel) hat.

$$\begin{array}{c} \phi \\ \mathfrak{D} \\ \psi \end{array}$$

Der Kalkül NK'

2. $[\phi]$ kennzeichnet bei Regeln, dass in einer tatsächlichen Ableitung bei Anwendung dieser Regel jedes Vorkommen der Formel ϕ als offene Annahme gelöscht werden darf.

   Es ist nicht gefordert, dass diese Formel als Annahme in der Ableitung überhaupt vorkommt.

   Es ist auch nicht gefordert, dass alle Vorkommen von ϕ gelöscht werden. Im Grenzfall ist es sogar erlaubt, dass kein einziges Vorkommen gelöscht wird.

3. $[\phi]$ kennzeichnet bei Ableitungen, dass ein Vorkommen der Formel ϕ als offene Annahme gelöscht wurde.

Anwendung von Regeln

Die Anwendung einer Regel sieht z.B. wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D}_1 & & \mathfrak{D}_n \\ \psi_1 & \dots & \psi_2 \end{array} \quad \text{werden zu} \quad \dfrac{\begin{array}{ccc} \mathfrak{D}_1 & & \mathfrak{D}_n \\ \psi_1 & \dots & \psi_n \end{array}}{\chi}\,(\mathit{Regel})$$

Dabei repräsentieren die $\mathfrak{D}_i$ Ableitungen der Endformeln ψ_i aus nicht näher spezifizierten Prämissen.

Das Resultat der Regelanwendung ist eine einzige neue Ableitung mit der neuen Endformel χ.

Die Ableitung repräsentiert einen Schluss von χ aus den gesammelten Prämissen von $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_n$.

Abhängigkeit von Annahmen

Eine Ableitung ist von den obersten Prämissen, die hingeschrieben wurden, *abhängig*, falls diese nicht *gelöscht* wurden:

1. Abhängigkeit bedeutet, dass man zur Konklusion der Ableitung unter Voraussetzung der Annahmen gelangt.

   Durch das Löschen einer Annahme hebt man diese Abhängigkeit auf; man kann also ohne diese Annahme zur Konklusion gelangen.

   Solange eine Annahme nicht gelöscht wurde, wird sie auch als *offene Annahme* bezeichnet.

Abhängigkeit von Annahmen

Eine Ableitung ist von den obersten Prämissen, die hingeschrieben wurden, *abhängig*, falls diese nicht *gelöscht* wurden:

2. Einige Regeln erlauben das Löschen von vorher hingeschriebenen Annahmen.

   Wird beim Ableiten tatsächlich eine offene Annahme gelöscht, so wird die zu löschende Annahme in eckige Klammern gesetzt und die Regel, aufgrund der das Löschen geschieht, im Ableitungsbaum mit einem fortlaufenden Index nummeriert.

   Dieser Index wird bei der gelöschten Formel an der eckigen Klammern wiederholt.

Abhängigkeit von Annahmen

Die Anwendung einer Regel mit einer Löschung sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{c} \phi \\ \mathfrak{D} \\ \psi \end{array} \qquad \text{wird zu} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} [\phi]^1 \\ \mathfrak{D} \\ \psi \end{array}}{\chi} \; (\mathit{Regel}{:}1)$$

Dabei repräsentiert $\mathfrak{D}$ eine beliebige Ableitung, die neben ϕ weitere (offene) Annahmen haben kann. Auch ϕ darf an weiteren Stellen offen vorkommen.

Formell drückt der Index, der an die eckige Klammer und hinter die Regel geschrieben wird, eine Relation zwischen den Vorkommen von Annahmen (hier ϕ) und der Konklusion einer Regel (hier χ), bei der diese Vorkommen gelöscht werden, aus.

Schlussregeln

Definition 1 (Schlussregeln)

Die Schlussregeln bestimmen Relationen von einer oder mehreren Prämissen zu einer Konklusion.

Die meisten Schlussregeln erlauben das Einführen (*Introduzieren*) oder Beseitigen (*Eliminieren*) von Junktoren; eine Schlussregel nimmt allerdings eine Sonderstellung ein.

Einige Regeln ermöglichen zudem das Löschen offener Annahmen.

(Die Kennzeichnung der verwendeten Regel für das Ableiten ist in Klammern neben dem Schlussstrich angegeben.)

Schlussregeln

Definition 1 (Schlussregeln (Forts.))

1. Einführung der Konjunktion:

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ (\wedge I)$$

2. Beseitigung der Konjunktion:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ (\wedge E_1) \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge E_2)$$

Schlussregeln

Definition 1 (Schlussregeln (Forts.))

3. Einführung der Implikation:

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \psi\end{array}}{\phi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow I)$$

4. Beseitigung der Implikation (modus ponens):

$$\frac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\ (\rightarrow E)$$

Schlussregeln

Definition 1 (Schlussregeln (Forts.))

5. Widerspruchsregel (reductio ad absurdum):

$$\cfrac{\begin{array}{c}[\phi \to \bot]\\ \bot\end{array}}{\phi}\ (\mathsf{RAA})$$

Ableitungen

Definition 2 (Ableitungen)

Mithilfe der Schlussregeln kann nun induktiv über der Baumstruktur eine *Ableitung* definiert werden:

1. Für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist ϕ selbst eine Ableitung.
2. Falls $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ Ableitungen sind, dann sind auch die folgenden Bäume Ableitungen:

$$(\wedge) \quad \frac{\begin{array}{cc} \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \\ \phi & \psi \end{array}}{\phi \wedge \psi} \quad ; \quad \frac{\begin{array}{c} \mathfrak{D} \\ \phi \wedge \psi \end{array}}{\phi} \quad ; \quad \frac{\begin{array}{c} \mathfrak{D} \\ \phi \wedge \psi \end{array}}{\psi}$$

Ableitungen

Definition 2 (Ableitungen (Forts.))

$$(\rightarrow) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\phi] \\ \mathfrak{D} \\ \psi\end{matrix}}{\phi \rightarrow \psi} \quad ; \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1 \\ \phi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathfrak{D}_2 \\ \phi \rightarrow \psi\end{matrix}}{\psi}$$

$$(\mathrm{RAA}) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\phi \rightarrow \bot] \\ \mathfrak{D} \\ \bot\end{matrix}}{\phi}$$

Ableitungen

Bemerkung:

In der Definition wird nicht vorausgesetzt, dass die durch eckige Klammern gekennzeichneten Prämissen in den Ableitungen tatsächlich vorkommen oder, wenn sie tatsächlich vorkommen sollten, dort tatsächlich gelöscht werden.

Löschungen sind mögliche Nebeneffekte von Regelanwendungen.

Im Allgemeinen wird man zwar versuchen, Annahmen zu löschen, wenn das möglich ist.

Gelegentlich hat es einen strategischen Nutzen, bestimmte Annahmen nicht oder erst zu einem späteren Zeitpunkt zu löschen.

Hypothesenmenge

Definition 3 (Hypothesenmenge)

Die Abbildung

$$\mathrm{Hyp} : \mathfrak{D} \mapsto \{\phi \in \mathrm{PROP} : \phi \text{ ist offene Annahme von } \mathfrak{D}\}$$

ordnet jeder Ableitung $\mathfrak{D}$ die Menge ihrer offenen Annahmen zu.

Die Menge $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ wird auch *Hypothesenmenge* oder *Annahmenmenge von* $\mathfrak{D}$ genannt.

Ableitbarkeit, Formaler Beweis

Definition 4 (Ableitbarkeit, Formaler Beweis)

Eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist aus einer Menge $\Delta \subseteq \mathrm{PROP}$ von Formeln *ableitbar* ($\Delta \vdash \phi$), falls es eine Ableitung $\mathfrak{D}$ mit der Endformel ϕ gibt, und $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \Delta$.

Eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist *formal beweisbar* ($\vdash \phi$), falls es eine Ableitung $\mathfrak{D}$ mit der Endformel ϕ gibt, in der alle Annahmen gelöscht sind. Die Ableitung $\mathfrak{D}$ heißt dann *formaler Beweis* von ϕ.

Notation:

Die folgenden Schreibweisen sind wie im semantischen Fall der Folgerungsrelation ($\models$) erklärt:

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \phi \quad ; \quad \Gamma, \phi \vdash \psi \quad ; \quad \Gamma, \Delta \vdash \phi$$

Endliche Ableitbarkeit

Proposition 5

Sei $\Delta \subseteq \mathrm{PROP}$ *eine (unendliche) Aussagenmenge und* $\phi \in \mathrm{PROP}$ *eine Aussage. Falls* $\Delta \vdash \phi$*, dann gibt es eine endliche Teilmenge* $\widetilde{\Delta} \subseteq \Delta$ *von* Δ *mit* $\widetilde{\Delta} \vdash \phi$*.*

Beweis:

$\Delta \vdash \phi$ bedeutet, dass es eine Ableitung $\mathfrak{D}$ mit Endformel ϕ gibt, so dass $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subset \Delta$.

$\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ muss nach der Definition von Ableitungen endlich sein, und zudem gilt offensichtlich: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \vdash \phi$. $\square$

Endliche Ableitbarkeit

Bemerkung:

Die Proposition über die endliche Ableitbarkeit von Formeln aus Annahmemengen ist trivial, da Ableitungen als endliche Strukturen definiert wurden.

Der analoge Satz für die semantische Folgerungsbeziehung $\models$ ist nicht trivial. Er wird erst später mit Hilfe des Vollständigkeitssatzes unter Verwendung dieser Proposition bewiesen (vgl. Korollar 7.14).

Struktureigenschaften

Proposition 6 (Struktureigenschaften)

Für alle Aussagen $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ *und alle Formelmengen* $\Delta, \Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *gelten die folgenden Struktureigenschaften:*

1. *Identität:* $\phi \vdash \phi$.
2. *Verdünnung: Wenn* $\Gamma \vdash \phi$*, dann* $\Gamma, \Delta \vdash \phi$.
3. *Schnitt: Wenn* $\Gamma \vdash \phi$ *und* $\Delta, \phi \vdash \psi$*, dann* $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

Beweis:

Direkte Folge aus der Definition von Ableitbarkeit. $\square$

Weitere Junktoren

Notation:

Seien $\phi, \psi \in$ PROP beliebige Formeln. Es dürfen folgende abkürzende Schreibweisen verwendet werden:

1. $\neg\phi$ für die Formel $(\phi \to \bot)$
2. $(\phi \vee \psi)$ für die Formel $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
3. $(\phi \leftrightarrow \psi)$ für die Formel $((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))$

Weitere Schlussregeln

Proposition 7 (Weitere Schlussregeln)

1. *Einführung der Negation:*

$$\frac{\begin{matrix}[\phi] \\ \bot\end{matrix}}{\neg\phi}\;(\neg I)$$

2. *Beseitigung der Negation:*

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\;(\neg E)$$

Weitere Schlussregeln

Proposition 7 (Weitere Schlussregeln (Forts.))

1. *Einführung der Disjunktion:*

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ (\vee I_1) \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ (\vee I_2)$$

2. *Beseitigung der Disjunktion:*

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\phi]\\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]\\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\vee E)$$

Weitere Schlussregeln

Proposition 7 (Weitere Schlussregeln (Forts.))

1. *Einführung der Biimplikation:*

$$\dfrac{\begin{matrix}[\phi] \\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \phi\end{matrix}}{\phi \leftrightarrow \psi}\ (\leftrightarrow I)$$

2. *Beseitigung der Biimplikation:*

$$\dfrac{\phi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\psi}\ (\leftrightarrow E_1) \qquad\qquad \dfrac{\psi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\phi}\ (\leftrightarrow E_2)$$

Weitere Junktoren

Bemerkung:

Dass eine Schlussregel gilt, bedeutet hier, dass ihre Anwendung ersetzbar ist durch Anwendung schon bekannter Schlussregeln (für $\wedge, \to$ und $\perp$). Dies ermöglicht im Kalkül einen einfachen Umgang mit Formeln, die $\vee$ und $\leftrightarrow$ enthalten.

Man muss hierbei aber beachten, dass die Junktoren $\vee$ und $\leftrightarrow$ tatsächlich nicht zur Sprache gehören und nur als Abkürzung für Formeln verwendet werden; entsprechend muss die Definition einer Ableitung nicht den neuen Verhältnissen angepasst werden.

Die neuen Schlussregeln sind nur Abkürzungen im Aufschrieb. Man kann jederzeit die tatsächlich gemachten Teilableitungen einfügen.

Weitere Junktoren

Bemerkung:

Man kann alternativ die Disjunktion und die Biimplikation auch als Grundzeichen der Aussagenlogik verwenden.

In diesem Fall werden die in Proposition 6.8 (1) – (4) bewiesenen Eigenschaften der Zeichen $\vee$ und $\leftrightarrow$ als eigenständige Schlussregeln festgesetzt. Die Definition einer Ableitung wird an die neuen Verhältnisse angepaßt. Der resultierende Kalkül wird NK genannt.

Insbesondere sind damit $(\phi \vee \psi)$ und $(\phi \leftrightarrow \psi)$ keine Abkürzungen mehr für andere Formeln; stattdessen kann man nun im Kalkül NK die folgenden gegenseitigen Ableitbarkeiten beweisen:

$$\begin{array}{rcl} \phi \vee \psi & \dashv\vdash & \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \\ \phi \leftrightarrow \psi & \dashv\vdash & (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi) \end{array}$$