Mathematische Logik I

Vorlesung von Peter Schroeder-Heister

Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik

Eberhard Karls Universität Tübingen

Skript: René Gazzari

Vorwort

Die zweistündige Vorlesung „Mathematische Logik I“ habe ich mehrfach am Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik der Universität Tübingen gehalten, zuletzt im Wintersemester 2008/09.

Ich habe mich dabei in vieler Hinsicht auf das Lehrbuch „Logic and Structure“ von Dirk van Dalen gestützt, ohne das in jedem Einzelfall kenntlich zu machen. Allerdings bin ich nicht van Dalens Vorgehen gefolgt, für jede betrachtete Struktur eine Spracherweiterung vorzunehmen, die Namen für alle Gegenstände des Universums bereitstellt, sondern habe durchgängig Belegungen betrachtet. Das schien mir, wenn man den modelltheoretischen Zugang zur Logik in das Zentrum einer Anfängervorlesung stellt, angemessener zu sein (auch wenn mir, so wie auch van Dalen, für die fortgeschrittene Perspektive der beweistheoretische Zugang näher steht). Ferner habe ich, sowohl was die Notation als auch was manche Begriffe und Beweise angeht, Material aus der (durch ein Skriptum dokumentierten) gleichnahmigen Vorlesung meines Kollegen Ulrich Felgner benutzt, die dieser regelmäßig am Mathematischen Institut gehalten hat.

René Gazzari hat das Skriptum nicht nur technisch erstellt, sondern in vielen Teilen selbständig formuliert, mich auf zahlreiche Fehler und Ungenauigkeiten aufmerksam gemacht und in solchen Fällen immer detaillierte und gut durchdachte Lösungsvorschläge vorgelegt. Insofern ist er weit über den üblichen Beitrag eines Skriptenautors hinaus an diesem Skriptum beteiligt.

Gefundene Fehler dürfen gerne behalten werden, wir würden uns aber über eine Abgabe freuen:

psh@informatik.uni-tuebingen.de, gazzari@informatik.uni-tuebingen.de

Juli 2009, Peter Schroeder-Heister

Die hier vorliegende Fassung des Skripts wurde von mir für die im Wintersemester 2014/15 abgehaltene Vorlesung in einigen Punkten leicht abgeändert und ergänzt.

Für Hinweise auf Fehler oder Ungenauigkeiten bin ich erreichbar unter:

arndt@informatik.uni-tuebingen.de

Oktober 2014, Michael Arndt

Inhaltsverzeichnis

I Aussagenlogik

§1 Sprachaufbau und Induktion

In diesem Abschnitt wird die formale Sprache der Aussagenlogik (AL) eingeführt. Zudem werden einige zentrale Konzepte der Logik, wie etwa induktive Definitionen, behandelt.

Vorbemerkung (Sprachebenen): In der Logik werden *formale Sprachen* behandelt. Deshalb ist es hier notwendig, zwischen verschiedenen Sprachen und Sprachebenen zu unterscheiden. Als *Objektsprache* wird diejenige Sprache bezeichnet, die in der Logik formal eingeführt wird. (Diese ist das „Objekt" der Untersuchung.) Die *Metasprache* ist hingegen diejenige Sprache, in der über die Objektsprache gesprochen wird.

1.1 DEF (Alphabet): Das Alphabet der Sprache der Aussagenlogik besteht aus folgenden (objektsprachlichen) Zeichen:

(1) *Aussagesymbole* (Aussagevariable): $p_0, p_1, p_2, \ldots$
AV $:= \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge der Aussagevariablen.

(2) *Junktoren* (Konnektive, Verknüpfungszeichen, *engl.: connective*):
0-stellig: $\bot$ (das Falsum, die Absurdität)
1-stellig: $\neg$ (die Negation)
2-stellig: $\wedge$ (die Konjunktion, das Und-Zeichen),
$\vee$ (die Disjunktion oder Adjunktion, das Oder-Zeichen),
$\rightarrow$ (das Konditional oder die Subjunktion, der Implikations-Pfeil),
$\leftrightarrow$ (das Bikonditional oder die Bisubjunktion, der Äquivalenz-Pfeil)

(3) *Hilfszeichen*: (,) (Klammer-Zeichen)

Bemerkungen:

(1) Die Klammern werden benötigt, da wir eine Infix-Notation für die Objektsprache verwenden werden. In Präfix-Notation (polnische Notation) kann auf die Klammern verzichtet werden.

(2) Als Metavariable (Variable in der Metasprache) verwenden wir häufig $\circ$ für die zweistelligen Junktoren und p, q, r für die Aussagevariablen.

1.2 DEF (Formel): Die Menge PROP der *AL-Aussagen* (oder AL-Formeln, *engl.: propositions*) ist durch folgende induktive Definition erklärt:

(1) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $p_k \in$ PROP.

(2) $\bot \in$ PROP.

(3) Wenn $\phi \in$ PROP, dann $\neg\phi \in$ PROP.

(4) Wenn $\phi \in$ PROP und $\psi \in$ PROP, dann $(\phi \circ \psi) \in$ PROP.

Die Aussagevariablen und das Falsum werden auch *atomare Formeln* oder *Atome* genannt. ATM $:=$ AV $\cup \{\bot\}$ ist entspreched die *Menge der Atome*.

Bemerkungen:

(1) ϕ und ψ werden hier als Meta-Variablen für beliebige Zeichenketten über dem Alphabet verwendet; in Zukunft zumeist nur noch als Metavariablen für Formeln aus PROP.

(2) In der Aussagenlogik unterscheiden wir nicht zwischen Aussagen und Formeln. Diese Unterscheidung wird erst in der Prädikatenlogik relevant.

(3) Die Klauseln (1) – (3) in der Definition der Formel können auch als formale Regeln eines *Bildungskalküls* für AL-Formeln aufgefaßt werden. PROP ist dann die Menge der in diesem Kalkül ableitbaren Ausdrücke.

Konvention (Klammerersparnis): Um Formeln lesbarer aufzuschreiben, wird folgende Konvention für Klammerersparnis eingeführt:

(1) Außenklammern dürfen weggelassen werden.

(2) Konjunktion ($\wedge$) und Disjunktion ($\vee$) binden stärker als Konditional ($\rightarrow$) und Bikonditional ($\leftrightarrow$).

Die Klammern werden lediglich im Aufschrieb weggelassen, müssen aber bei den Formeln weiterhin mitgedacht werden. So ändert sich etwa die Anzahl der in einer Formel vorkommenden Zeichen durch die Klammerersparnis nicht.

Notation: Das Zeichen $\doteq$ bedeutet *ist von der Form, ist syntaktisch gleich* („Zeichengleichheit") und wird vor allem für die syntaktische Gleichheit von Formeln verwendet. Bei der Verwendung von $\doteq$ ist insbesondere zu beachten, dass diese unabhängig von der Klammerersparnis ist.

Beispiele ($\doteq$):

(1) $(p_0 \wedge p_1) \doteq p_0 \wedge p_1$ (links und rechts stehen die gleichen Zeichen; rechts wurden die Klammern mit der Klammerersparnis nicht explizit hingeschrieben)

(2) $\neg p_0 \wedge p_1 \not\doteq \neg(p_0 \wedge p_1)$ (Links und rechts ist das erste Zeichen eine Negation, links folgt darauf die Aussagenvariable p_0, rechts eine Klammer, die, da sie keine Außenklammer ist, nicht weggelassen werden darf.)

Induktions-Prinzip: Jeder induktiven Definition (wie etwa der Definition der AL-Formeln) entspricht ein Induktions-Prinzip. Die induktive Definition beschreibt, wie ein Bereich (Gegenstands-Bereich, Zahlbereich) aufgebaut wird; das Induktions-Prinzip sagt, wie dann Beweise über diesen Bereich in entsprechenden Schritten geführt und damit Behauptungen, die für alle Objekte dieses Bereichs gelten, bewiesen werden.

Beispiel zum Induktionsprinzip (Natürliche Zahlen): Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die kleinste Menge X (der Schnitt über alle derartigen Mengen), die folgendes erfüllt:

(1) $0 \in X$.

(2) Wenn $n \in X$, dann $n' \in X$.

Hierbei ist n' der Nachfolger von n.

Aussagen A über diesen Zahlbereich (Aussagen, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten) werden mit der gewohnten vollständigen Induktion geführt. Das bedeutet:

Theorem: Sei A eine Aussage, so dass $A(0)$ gilt und aus $A(n)$ schon $A(n')$ folgt. Dann gilt die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Betrachte $X := \{n \in \mathbb{N} : \ A(n)\}$. Offenbar ist $X \subseteq \mathbb{N}$.

Ferner gilt nach Annahme über A: $0 \in X$, und mit $n \in X$ folgt schon $n' \in X$, d.h. (1) und (2) gelten. Damit ist aber $\mathbb{N} \subseteq X$, da $\mathbb{N}$ die kleinste derartige Menge ist.

Also ist $\mathbb{N} = X$, und die Aussage ist bewiesen. Q.E.D.

Diese Korrespondenz zwischen einer induktiven Definition und einem Induktionsprinzip gilt allgemein, insbesondere auch für die induktive Definition der AL-Formeln.

1.3 Theorem (Induktionsprinzip für AL-Formeln):

Sei A eine Eigenschaft, so dass folgendes gilt:

(1) Für jedes $k \in \mathbb{N}$: $A(p_k)$.

(2) $A(\bot)$.

(3) Wenn $A(\phi)$, dann $A(\neg\phi)$.

(4) Wenn $A(\phi)$ und $A(\psi)$, dann $A\big((\phi \circ \psi)\big)$.

Dann gilt $A(\phi)$ für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$.

Beweis.

Betrachte die Menge $X := \{\phi \in \mathrm{PROP} : \ A(\phi)\}$. Offenbar ist $X \subseteq \mathrm{PROP}$.

Zunächst gilt: für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $p_k \in X$. Weiterhin ist $\bot \in X$.

Ferner: mit $\phi, \psi \in X$ ist $\neg\phi \in X$ und $(\phi \circ \psi) \in X$.

Damit gelten (1)–(4).

Da PROP die kleinste derartige Menge ist, gilt: $\mathrm{PROP} \subseteq X$.

Damit gilt $\mathrm{PROP} = X$, und die Behauptung ist gezeigt. Q.E.D.

Bemerkung: Das Theorem hat eine zentrale Bedeutung, da es die Begründung dafür ist, dass Eigenschaften von Formeln per Induktionen über den Formelaufbau gezeigt werden können.

Beispiel (Induktion über dem Formelaufbau): Mit oben bewiesenem Induktionsprinzip soll folgende (einfache) Behauptung ausführlich gezeigt werden:

Für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt, dass in ϕ eine gerade Anzahl von Klammern vorkommt.

Beweis. (Induktion über dem Aufbau von ϕ)

IA: Zeige die Aussage für atomare Formeln:

- $\perp$: Beim Falsum ($\perp$) kommen $0 = 2 \cdot 0$ Klammern vor. Also ist die Aussage für $\perp$ richtig.
- p_k: Bei jeder Aussagevariable p_k ($k \in \mathbb{N}$) kommen $0 = 2 \cdot 0$ Klammern vor. Also ist die Aussage für alle Aussagevariablen richtig.

IV: Angenommen, die Aussage ist richtig für $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$, d.h. für gewisse $n, m \in \mathbb{N}$ kommen $2n$ Klammern in ϕ und $2m$ Klammern in ψ vor.

IS: Zeige die Aussage für zusammengesetzte Formeln:

- $\neg\phi$: Die Formel $\neg\phi$ hat ebenso wie die Formel ϕ $2n$ viele Klammern. Damit ist die Anzahl der Klammern ebenso gerade und die Aussage ist richtig für $(\neg\phi)$.
- $(\phi \circ \psi)$: Die Formel $(\phi \circ \psi)$ hat dann $2n + 2m + 2 = 2 \cdot (n + m + 1)$ viele Klammern. Damit ist die Anzahl der Klammern gerade und die Aussage ist richtig für $(\phi \circ \psi)$.

Damit gilt die Aussage für alle Formeln $\phi \in \mathrm{PROP}$. Q.E.D.

1.4 DEF (Bildungsfolge): Sei $\phi \in \mathrm{PROP}$ eine Formel. Eine *Bildungsfolge* (*engl.: formation sequence*) von ϕ (auch: für ϕ) ist eine Ableitung in dem Kalkül, der durch die Bildungsregeln für AL-Formeln vorgegeben wird.

D.h.: eine Bildungsfolge von ϕ ist eine Folge $\phi_0, \ \phi_1, \ldots, \phi_n \doteq \phi$, so dass für jedes i ($0 \leq i \leq n$) einer der folgenden Fälle gilt:

(1) ϕ_i ist atomar.

(2) $\phi_i \doteq \neg\phi_k$ mit $0 \leq k < i$.

(3) $\phi_i \doteq (\phi_k \circ \phi_l)$ mit $0 \leq k, l < i$.

Bemerkungen (Bildungsfolgen):

(1) In einer Bildungsfolge für ϕ können *irrelevante* Bestandteile vorkommen. (So können in einer bestehenden Bildungsfolge für ϕ vor jedem Folgenglied beliebige atomare Formeln eingefügt werden. Die Folge bleibt dabei eine Bildungsfolge für ϕ).

(2) Jedes (echte) Anfangsstück einer Bildungsfolge ist selbst eine Bildungsfolge (möglicherweise für eine andere Formel).

(3) Entsteht eine Folge aus dem Hintereinanderschreiben von zwei Bildungsfolgen, so ist diese ebenfalls eine Bildungsfolge.

Bemerkung: Im folgenden Theorem (und in seinem Beweis) wird ϕ ausnahmsweise wieder als Meta-Variable für beliebige Zeichenketten, nicht nur für Formeln, verwendet.

1.5 Theorem (Bildungsfolgen): PROP ist die Menge aller Ausdrücke ϕ, für die es eine Bildungsfolge gibt.

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Ausdrücke, für die es eine Bildungsfolge gibt.

Zeige: PROP $\subseteq \mathcal{F}$ durch Induktion über den Formelaufbau.

IA: Atomare Aussagen (das Falsum und Aussagevariablen) sind (nach Definition) schon einelementige Bildungsfolgen.

IV: Sei $\phi_0, \ldots, \phi_n \doteq \phi$ und $\psi_0, \ldots, \psi_m \doteq \psi$ Bildungsfolgen für $\phi, \psi \in$ PROP mit $n, m \in \mathbb{N}$.

IS: Für zusammengesetzte Formeln gilt:

$\neg\phi$: Die Folge $\langle \phi_0, \ldots, \phi_n, \neg\phi \rangle$ ist eine Bildungsfolge für $\neg\phi$.

$(\phi \circ \psi)$: Die Folge $\big\langle \phi_0, \ldots, \phi_n, \psi_0 \ldots, \psi_m, (\phi \circ \psi) \big\rangle$ ist eine Bildungsfolge für $(\phi \circ \psi)$.

Damit ist jedes $\phi \in$ PROP schon Element von $\mathcal{F}$ und PROP $\subseteq \mathcal{F}$.

Zeige nun $\mathcal{F} \subseteq$ PROP. Wir zeigen durch Induktion nach n die etwas stärkere Aussage, dass für alle Bildungsfolgen $\langle \phi_0, \ldots, \phi_n \rangle$ der Länge $(n+1)$ und dort für alle Folgenglieder ϕ_k $(0 \leq k \leq n)$ gilt: $\phi_k \in$ PROP.

IA: ϕ_0 ist nach Definition von Bildungsfolgen eine atomare Formel. Es gilt also $\phi_0 \in$ PROP.

IV: Die Aussage gelte für jede Bildungsfolge $\phi_0, \ldots, \phi_n$.

IS: Sei $\langle \phi_0, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1} \rangle$ eine (längere) Bildungsfolge.

Für jedes k mit $0 \leq k < n+1$ gilt: ϕ_k ist auch in der Bildungsfolge $\langle \phi_0, \ldots \phi_n \rangle$. Also ist nach Induktionsvoraussetzung $\phi_k \in$ PROP.

Nach Definition von Bildungsfolgen gilt für ϕ_{n+1} eine der folgenden Fälle:

(1) ϕ_{n+1} ist atomar, also $\phi_{n+1} \in$ PROP.

(2) $\phi_{n+1} \doteq \neg\phi_k$ mit $0 \leq k < n$. Damit ist ϕ_k Folgenglied der Bildungsfolge $\langle \phi_0, \ldots, \phi_n \rangle$, und nach Induktionsannahme gilt: $\phi_k \in$ PROP. Damit ist aber $\neg\phi_k \in$ PROP nach Definition von PROP.

(3) $\phi_{n+1} \doteq (\phi_k \circ \phi_l)$ mit $0 \leq k, l < n$. Damit sind ϕ_k und ϕ_l Folgenglieder der Bildungsfolge $\langle \phi_0, \ldots, \phi_n \rangle$, und nach Induktionsannahme gilt: $\phi_k, \phi_l \in$ PROP.
Damit ist aber $(\phi_k \circ \phi_l) \in$ PROP nach Definition von PROP.

Damit wurde insbesondere gezeigt, dass für jede Bildungsfolge $\langle \phi_0, \ldots \phi_n \rangle$ gilt: $\phi_n \in$ PROP. Damit $\mathcal{F} \subseteq$ PROP.

Q.E.D.

Rekursionssatz: Der folgende Rekursionssatz gewährleistet, dass durch rekursive Definitionen über der Menge PROP eingeführte Funktionen wohldefiniert sind. Damit hat der Rekursionssatz eine ähnlich zentrale Bedeutung wie das Induktionsprinzip. In dieser Weise wird später z.B. die Semantik der AL definiert.

1.6 Theorem (Rekursionssatz/ Definition durch Rekursion): Seien für eine beliebige Menge $\mathcal{A} \neq \varnothing$ Abbildungen $H_\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $H_\neg : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ und $H_{\text{ATM}} : \text{ATM} \to \mathcal{A}$ gegeben.

Dann gibt es genau eine Abbildung $F : \text{PROP} \to \mathcal{A}$ mit:

(1) für jedes $\phi \in \text{ATM}$: $\quad F(\phi) = H_{\text{ATM}}(\phi)$

(2) $F(\neg\phi) = H_\neg\big(F(\phi)\big)$

(3) $F\big((\phi \circ \psi)\big) = H_\circ\big(F(\phi), F(\psi)\big)$

Beweis.

Zu zeigen ist die Existenz und die Eindeutigkeit der Abbildung F.

Existenz:

Sei $F^\star \subseteq \text{PROP} \times \mathcal{A}$ die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

- Für jedes atomare $\phi \in \text{PROP}$: $\quad \langle \phi, H_{\text{ATM}}(\phi)\rangle \in F^\star$
- Falls $\langle \phi, a\rangle \in F^\star$, dann auch: $\quad \langle \neg\phi, H_\neg(a)\rangle \in F^\star$
- Falls $\langle \phi, a\rangle, \langle \psi, b\rangle \in F^\star$, dann auch: $\quad \langle (\phi \circ \psi), H_\circ(a, b)\rangle \in F^\star$

Für jedes $\phi \in \text{PROP}$ gibt es ein $a \in \mathcal{A}$ mit: $\langle \phi, a\rangle \in F^\star$. (Leichte Induktion über dem Formelaufbau von ϕ.)

Ebenfalls gilt: Dieses a ist für jedes ϕ eindeutig bestimmt. (Erneut Induktion über dem Formelaufbau; hier geht die Minimalität von $F^\star$ wesentlich ein.)

Damit: Sei $F : \text{PROP} \to \mathcal{A} : \phi \mapsto a$ mit $\langle \phi, a\rangle \in F^\star$. F ist offensichtlich eine Abbildung, die (1) – (3) erfüllt. Damit ist die Existenz gezeigt.

Eindeutigkeit:

Seien F, G zwei Abbildungen, die beide (1) – (3) erfüllen. Zeige, dass dann für jede Formel $\phi \in \text{PROP}$ gilt: $F(\phi) = G(\phi)$

ϕ atomar: Wegen (1) gilt: $F(\phi) = H_{\text{ATM}}(\phi) = G(\phi)$

IV: Für ϕ, ψ gelte $F(\phi) = G(\phi)$.

$\neg\phi$: Mit (2) und IV gilt:

$$F(\neg\phi) = H_\neg\big(F(\phi)\big) \overset{(IV)}{=} H_\neg\big(G(\phi)\big) = G(\neg\phi)$$

$(\phi \circ \psi)$: Unter Verwendung von (3) analog zum Fall $\neg\phi$.

Insgesamt wurde die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion F gezeigt. Q.E.D.

Im Folgenden werden nun einige Anwendungen des Rekursionssatzes, also rekursive Definitionen, angegeben.

1.7 DEF (Strukturbaum): Für eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist ihr *Strukturbaum* (Gliederungsbaum, *engl.: parsing tree*) $T(\phi)$ wie folgt rekursiv definiert:

(1) für $\phi \in \mathrm{ATM}$:

$T(\phi) =_{\mathrm{def}} \quad \bullet \ \phi$

(2) $T\big((\phi \circ \psi)\big) =_{\mathrm{def}}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \bullet\ (\phi \circ \psi) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ T(\phi) & & T(\psi) \end{tikzcd}$$

(3) $T(\neg\phi) =_{\mathrm{def}}$

$$\begin{tikzcd} \bullet\ \neg\phi \arrow[d, dash] \\ T(\phi) \end{tikzcd}$$

1.8 DEF (Rang): Für eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist ihr *Rang* r wie folgt rekursiv definiert:

(1) für $\phi \in \mathrm{ATM}$: $\quad \mathbf{r}(\phi) =_{\mathrm{def}} 0$

(2) $\mathbf{r}\big((\phi \circ \psi)\big) =_{\mathrm{def}} \max\{\mathbf{r}(\phi), \mathbf{r}(\psi)\} + 1$

(3) $\mathbf{r}(\neg\phi) =_{\mathrm{def}} \mathbf{r}(\phi) + 1$

1.9 DEF (Teilformel): Für eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist $\mathbf{sub}(\phi)$, die *Menge aller Teilformeln von* ϕ, wie folgt rekursiv definiert:

(1) für $\phi \in \mathrm{ATM}$: $\quad \mathbf{sub}(\phi) =_{\mathrm{def}} \{\phi\}$

(2) $\mathbf{sub}\big((\phi \circ \psi)\big) =_{\mathrm{def}} \{(\phi \circ \psi)\} \cup \big(\mathbf{sub}(\phi) \cup \mathbf{sub}(\psi)\big)$

(3) $\mathbf{sub}(\neg\phi) =_{\mathrm{def}} \{\neg\phi\} \cup \mathbf{sub}(\phi)$

Eine Formel ψ ist *Teilformel* einer Formel ϕ, falls $\psi \in \mathbf{sub}(\phi)$.

Eine Formel ψ ist *echte Teilformel* einer Formel ϕ, falls $\psi \in \mathbf{sub}(\phi)$ und $\psi \neq \phi$.

Statt $\psi \in \mathbf{sub}(\phi)$ schreiben wir auch: $\quad \psi \preceq \phi$.

Falls dabei $\psi \neq \phi$, so schreiben wir: $\quad \psi \prec \phi$.

Ranginduktion: Man kann Aussagen über Formeln durch Induktion über ihrem Rang beweisen. Dies ist eine Induktion über den natürlichen Zahlen im üblichen Sinne. Wir formulieren hier das Prinzip der Ranginduktion als Prinzip der Wertverlaufsinduktion, bei der man nicht von n auf $n + 1$ schließt, sondern von $< n$ auf n. Insbesondere ist bei dieser Induktion kein Induktionsanfang nötig. (Warum?)

Der Beweis des folgenden Satzes zeigt, dass die Ranginduktion aus der Induktion über dem Formelaufbau gewonnen werden kann, dass wir also auf ein eigenständiges arithmetisches Induktionsprinzip verzichten können. Dies gilt entsprechend auch an späteren Stellen, z.B. bei Induktionen über der Länge von Beweisen.

1.10 Theorem (Ranginduktion): Sei A eine Eigenschaft, so dass folgendes für Formeln $\psi \in \mathrm{PROP}$ gilt:

Aus dem Gelten von $A(\phi)$ für alle Formeln ϕ mit $\mathbf{r}(\phi) < \mathbf{r}(\psi)$ folgt schon das Gelten von $A(\psi)$. (†)

Dann gilt $A(\phi)$ schon für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$.

Etwas formaler:

Wenn für alle $\psi \in \mathrm{PROP}$ gilt, dass,
  wenn für alle $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt, dass,
    wenn $\mathbf{r}(\phi) < \mathbf{r}(\psi)$, dann $A(\phi)$,
  dann auch $A(\psi)$,
dann gilt für alle $\phi \in \mathrm{PROP} : A(\phi)$.

Beweis.

Es sei A eine Eigenschaft mit (†).

Zeige zunächst durch Induktion über dem Formelaufbau:

Für alle $\psi \in \mathrm{PROP}$ und alle $\phi \in \mathrm{PROP}$: Wenn $\mathbf{r}(\phi) < \mathbf{r}(\psi)$, dann $A(\phi)$.

ψ atomar: Trivialerweise gilt für alle Formeln ϕ mit $\mathbf{r}(\phi) < \mathbf{r}(\psi)$ (es gibt keine solchen!) schon $A(\phi)$.

IV: Angenommen, die Aussage ist von ψ und σ erfüllt.

$\neg\psi$: analog zum Fall $(\psi \circ \sigma)$ unten.

$(\psi \circ \sigma)$: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\mathbf{r}(\psi \circ \sigma) = \mathbf{r}(\psi) + 1$.

Angenommen: Es gibt eine Formel τ mit $\mathbf{r}(\tau) < \mathbf{r}(\psi \circ \sigma)$, so dass $A(\tau)$ nicht gilt.

Dann kann τ aufgrund der IV keinen kleineren Rang haben als ψ. Also gilt: $\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}(\psi)$.

Insbesondere gilt damit für alle Formeln ϕ mit kleinerem Rang als τ schon $A(\phi)$. Mit (†) folgt nun: $A(\tau)$. Widerspruch

Also gilt doch für alle Formeln ϕ mit $\mathbf{r}(\phi) < \mathbf{r}(\psi \circ \sigma)$: $A(\phi)$

Zeige nun noch: Für alle $\psi \in \mathrm{PROP}$ ist $A(\psi)$.

Sei $\psi \in \mathrm{PROP}$ beliebig. Für alle Formeln ϕ mit $\mathbf{r}(\phi) < \mathbf{r}(\psi)$ gilt mit obiger Induktion $A(\phi)$. Damit gilt mit (†): $A(\psi)$. q.e.d.

Bemerkung (Induktionsprinzipien): Aus der Ranginduktion läßt sich umgekehrt die Induktion über dem Formelaufbau beweisen. Damit sind beide Induktionsprinzipien gleichwertig.

Es sollen noch einige Beispiele für Induktionen gegeben werden:

Beispiel (Transitivität von $\preccurlyeq$): Die Teilformel-Relation $\preccurlyeq$ ist transitiv.

Beweis.
Wir zeigen: Wenn $\phi \preccurlyeq \psi$, dann $\mathbf{sub}(\phi) \subseteq \mathbf{sub}(\psi)$
durch Induktion über dem Rang n der Formel ψ:
Sei $\psi \in$ PROP beliebig mit Rang $\mathbf{r}(\psi) = n$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

IV: Angenommen, die Aussage gilt für jede Formel σ mit $\mathbf{r}(\sigma) < n$.
Betrachte beliebige Teilformel $\phi \preccurlyeq \psi$:

Falls ψ atomar:
Dann $\phi \doteq \psi$. Also $\mathbf{sub}(\phi) = \mathbf{sub}(\psi) \subseteq \mathbf{sub}(\psi)$.

Falls $\psi \doteq \neg\sigma$:
Damit $\mathbf{sub}(\psi) = \mathbf{sub}(\sigma) \cup \{\neg\sigma\}$ für ein $\sigma \in$ PROP mit $\mathbf{r}(\sigma) < n$.
Falls $\phi \in \mathbf{sub}(\sigma)$, dann ist $\phi \preccurlyeq \sigma$ und mit IV gilt:

$$\mathbf{sub}(\phi) \subseteq \mathbf{sub}(\sigma) \subseteq \mathbf{sub}(\psi)$$

Ansonsten ist $\phi \in \{\neg\sigma\}$. Damit ist $\phi \doteq \psi$.
Und wieder gilt $\mathbf{sub}(\phi) = \mathbf{sub}(\psi) \subseteq \mathbf{sub}(\psi)$ trivialerweise.

Falls $\psi \doteq (\sigma_1 \circ \sigma_2)$:
Analog zu $\psi \doteq \neg\sigma$ mit ein wenig aufwendigeren Fallunterscheidungen.

Die Transitivität von $\preccurlyeq$ ergibt sich jetzt wie folgt: Sei $\phi \preccurlyeq \psi$ und $\psi \preccurlyeq \sigma$.
Dann gilt $\phi \in \mathbf{sub}(\psi) \subseteq \mathbf{sub}(\sigma)$. Also $\phi \preccurlyeq \sigma$. Q.E.D.

Notation (Kardinalität/ Größe von Mengen): Für eine Menge M ist $\#M$ (auch $|M|$) die Anzahl ihrer Elemente.

Beispiel (Anzahl von Teilformeln): Ist n die Anzahl der Junktoren in einer Formel ϕ (die einzelnen Vorkommen), dann ist $\#\mathbf{sub}(\phi) \leq 2n + 1$.

Beweis. Übungsaufgabe Q.E.D.

Beispiel (Eindeutige Lesbarkeit): Zu jeder nicht-atomaren Formel σ gibt es entweder eindeutige Formeln ϕ und ψ mit $\sigma \doteq (\phi \circ \psi)$ oder eine eindeutige Formel ϕ mit $\sigma \doteq \neg\phi$.

Beweis. Übungsaufgabe Q.E.D.

§2 Semantik

In diesem Abschnitt wird die Semantik für die formale Sprache der Aussagenlogik (AL) eingeführt. Zentrale Begriffe in diesem Abschnitt sind Belegungen und Bewertungen.

Die Semantikfunktion weist jeder AL-Aussage eine Bedeutung zu. Die möglichen Bedeutungen einer AL-Aussage sind die Wahrheitswerte *wahr* und *falsch*. Zur Vereinfachung der Darstellung stehe 1 für *wahr* und 0 für *falsch*.

2.1 DEF (Wahrheitstafel/ Wahrheitsfunktionen): *Wahrheitstafel* beschreiben *Wahrheitsfunktionen* für 0-, 1- und 2-stellige (später auch n-stellige) Junktoren. Das sind Abbildungen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Mit ihrer Hilfe werden Bewertungen definiert.

Die Wahrheitstafeln für die einzelnen Junktoren sehen wie folgt aus:

$\bot$
0

;

ϕ	$\neg\phi$
0	1
1	0

;

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \to \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Die so definierten Funktionen können aufgrund der Wahl der Wahrheitswerte auch arithmetisch dargestellt werden:

$\bot$: $f_\bot() = 0$

$\neg$: $f_\neg(x) = 1 - x$

$\wedge$: $f_\wedge(x,y) = \min\{x,y\} = x \cdot y$

$\vee$: $f_\vee(x,y) = \max\{x,y\} = x + y - x \cdot y$

$\to$: $f_\to(x,y) = 1 - x + x \cdot y$ (Es gilt: $f_\to(x,y) = 0$ gdw. $x = 1$ und $y = 0$)

$\leftrightarrow$: $f_\leftrightarrow(x,y) = 1 - |x - y|$ (Es gilt: $f_\leftrightarrow(x,y) = 1$ gdw. $x = y$)

2.2 DEF (Belegung/ Bewertung):

(1) Eine Abbildung $v : \mathrm{AV} \to \{0,1\}$ heißt *Belegung der Aussagevariablen.*

(2) Eine Abbildung $[\![\cdot]\!] : \mathrm{PROP} \to \{0,1\}$ heißt *Bewertung*, falls für alle Formeln $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ folgendes erfüllt ist:

- $[\![\bot]\!] = f_\bot$
- $[\![\neg\phi]\!] = f_\neg([\![\phi]\!])$
- $[\![(\phi \circ \psi)]\!] = f_\circ([\![\phi]\!], [\![\psi]\!])$

Die beiden Klammern $[\![$ und $]\!]$ heißen Semantikklammern und gehen auf Dana Scott zurück.

2.3 Theorem (Eindeutigkeit von Bewertungen): Sei eine Belegung $v : \mathrm{AV} \to \{0,1\}$ der Aussagevariablen gegeben.

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Bewertung $[\![\cdot]\!]_v : \mathrm{PROP} \to \{0,1\}$, so dass für jede Aussagevariable $p \in \mathrm{AV}$ gilt: $[\![p]\!]_v = v(p)$.

Beweis. Einfache Anwendung des Rekursions-Satzes. Q.E.D.

Bemerkungen (Induzierte Bewertungen/ Notation):

(1) Die im Satz durch die Belegung v bestimmte Bewertung nennen wir auch die *durch v induzierte Bewertung.*

(2) Wenn aus dem Kontext klar hervorgeht, um welche Belegung v der Aussagevariablen es sich handelt, werden wir auch $[\![\cdot]\!]$ statt $[\![\cdot]\!]_v$ schreiben.

2.4 Proposition (Koinzidenz-Lemma): Sei $\phi \in \mathrm{PROP}$ beliebige Formel. Seien v und w zwei Belegungen derart, dass für alle in ϕ vorkommenden Aussagevariablen p gilt: $v(p) = w(p)$.

Dann gilt auch: $[\![\phi]\!]_v = [\![\phi]\!]_w$.

Beweis.

Durch Induktion über dem Aufbau von ϕ.

$\phi \simeq \bot$: Nach Definition von Bewertungen gilt: $[\![\bot]\!]_v = [\![\bot]\!]_w$.

$\phi \simeq p_k (k \in \mathbb{N})$: Nach Voraussetzung gilt: $[\![p_k]\!]_v = v(p_k) = w(p_k) = [\![p_k]\!]_w$.

IV: Angenommen: die Behauptung gilt für ψ und σ.

$\phi \simeq (\psi \circ \sigma)$: Da v und w auf allen Aussagevariablen von $(\psi \circ \sigma)$ übereinstimmen, tun sie das auch jeweils auf ψ und σ. Damit:

$$[\![\psi \circ \sigma]\!]_v = f_\circ([\![\psi]\!]_v, [\![\sigma]\!]_v) \overset{(IV)}{=} f_\circ([\![\psi]\!]_w, [\![\sigma]\!]_w) = [\![\psi \circ \sigma]\!]_w$$

$\phi \simeq (\neg\psi)$: analog zu $(\psi \circ \sigma)$. Q.E.D.

2.5 DEF (Eigenschaften von Formeln): Sei $\phi \in \mathrm{PROP}$ eine Formel.

- ϕ heißt *allgemeingültig* oder *tautologisch*,
  falls für jede Belegung v gilt: $[\![\phi]\!]_v = 1$.
- ϕ heißt *widersprüchlich* oder *kontradiktorisch*,
  falls für jede Belegung v gilt: $[\![\phi]\!]_v = 0$.
- ϕ heißt *kontingent*,
  falls es zwei Belegung v und w gibt mit: $[\![\phi]\!]_v = 1$ und $[\![\phi]\!]_w = 0$.
- ϕ heißt *erfüllbar* oder *konsistent*,
  falls es eine Belegung v gibt mit: $[\![\phi]\!]_v = 1$.

2.6 DEF (Logische Folgerung): Sei $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{PROP}$ eine Menge von Aussagen. Die Formel ϕ heißt *(aussagen-)logische Folgerung aus* Γ, falls für jede Belegung v gilt:

$$\text{Falls } [\![\psi]\!]_v = 1 \text{ für jedes } \psi \in \Gamma \text{ gilt, dann gilt auch } [\![\phi]\!]_v = 1.$$

Wir schreiben dann $\Gamma \models \phi$.

Bemerkungen (Logische Folgerung):

(1) Wir schreiben: $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \phi$ für $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \phi$. Weitere Schreibweisen sind: $\Gamma, \Delta \models \phi$ für $\Gamma \cup \Delta \models \phi$ sowie $\Gamma, \psi \models \phi$ für $\Gamma \cup \{\psi\} \models \phi$.

(2) Schreibe $\Gamma \not\models \phi$, falls ϕ keine Folgerung aus Γ ist. *Vorsicht* Aus $\Gamma \not\models \phi$ folgt im Allgemeinen *nicht* $\Gamma \models \neg\phi$!

(3) ϕ ist genau dann eine Tautologie, wenn ϕ aus der leeren Menge logisch folgt, d.h. wenn $\varnothing \models \phi$. Dann schreiben wir auch: $\models \phi$.

(4) Wir lassen zu, dass Γ eine unendliche Menge ist. Später werden wir zeigen, dass man sich bei der aussagenlogischen Folgerung auf eine endliche Teilmenge $\Sigma \subseteq \Gamma$ beschränken kann.

(5) Der Begriff der logischen Folgerung geht auf Bernard Bolzano und Alfred Tarski zurück. Deren Idee war, dass logische Folgerung darin besteht, dass sich die Wahrheit der Prämissen auf die Wahrheit der Konklusion überträgt, und zwar unabhängig von der Interpretation der nichtlogischen Zeichen (in der AL sind das die Aussagevariablen).

Das wird hier so verstanden, dass sich die Wahrheit unter alle Belegungen der nichtlogischen Zeichen überträgt.

Beispiel (Logische Folgerung): Folgendes sind logische Folgerungen:

(1) $\neg\phi \models \phi \to \bot$:

Beweis.

ϕ	$\neg\phi$		$\bot$	$\phi \to \bot$
0	1	✓	0	1
1	0		0	0

Q.E.D.

(2) $\phi \vee \psi, \neg\psi \models \phi$

Beweis.

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\neg\psi$		ϕ
0	0	0	1		0
0	1	1	0		0
1	0	1	1	✓	1
1	1	1	0		1

Q.E.D.

Beispiel (AL-Tautologie): Folgende Formel-Schemata repräsentieren aussagenlogische Tautologien:

(1) $\models \neg\phi \vee \phi$:

Beweis.

ϕ	$\neg\phi$	$\neg\phi \vee \phi$
0	1	1
1	0	1

Q.E.D.

(2) $\models ((\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \phi$

Beweis.

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\neg\psi$	$(\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi$	$((\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \phi$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Q.E.D.

2.7 Theorem (Import-Export): Es sei Γ eine Menge von Formeln, und $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ gegeben. Dann gilt:

$$\Gamma, \phi \models \psi \text{ genau dann, wenn } \Gamma \models \phi \rightarrow \psi.$$

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

„$\Rightarrow$“ Es gelte: $\Gamma \not\models \phi \rightarrow \psi$.

Dann gibt es eine Belegung v für die folgendes gilt:

$$\text{Für alle } \chi \in \Gamma \text{ ist zwar } [\![\chi]\!]_v = 1, \text{ aber } [\![\phi \rightarrow \psi]\!]_v = 0.$$

Unter dieser Belegung gilt insbesondere:

$$[\![\phi]\!]_v = 1 \quad \text{und} \quad [\![\psi]\!]_v = 0$$

Also: $\Gamma, \phi \not\models \psi$.

„$\Leftarrow$“ Es gelte: $\Gamma, \phi \not\models \psi$.

Dann gibt es eine Belegung v für die folgendes gilt:

$$\text{Für alle } \chi \in \Gamma \text{ ist } [\![\chi]\!]_v = 1 \text{ und } [\![\phi]\!]_v = 1, \text{ aber } [\![\psi]\!]_v = 0.$$

Unter dieser Belegung gilt dann:

$$[\![\phi \rightarrow \psi]\!]_v = 0$$

Also: $\Gamma \not\models \phi \rightarrow \psi$.

Q.E.D.

2.8 DEF (Logische Äquivalenz): Seien $\phi, \psi \in$ PROP. Wir nennen die Aussagen ϕ und ψ *(aussagen-)logisch äquivalent*, falls $\phi \models \psi$ und $\psi \models \phi$ gilt. Wir schreiben dann auch $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$.

2.9 Lemma (Logische Äquivalenzg): Für alle Aussagen $\phi, \psi \in$ PROP sind äquivalent:

(1) ϕ und ψ sind logisch-äquivalent.

(2) Für alle Belegungen v gilt: $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$.

(3) $\models \phi \leftrightarrow \psi$.

Beweis. Übung. Q.E.D.

2.10 Lemma (Äquivalenzrelation): Die logische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf PROP. Damit gilt für alle $\phi, \psi, \sigma \in$ PROP:

(1) *Reflexivität:* $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \phi$.

(2) *Symmetrie:* Wenn $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$ gilt, dann auch $\psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \phi$.

(3) *Transitivität:* Wenn $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$ und $\psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \sigma$, dann auch $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \sigma$.

Beweis. (1) und (2) sind trivial, (3) verbleibt als leichte Übung. Q.E.D.

2.11 Lemma (Eigenschaften von $\models$): Seien $\phi, \psi \in$ PROP. Dann gilt:

(1) Wenn $\phi \models \psi$, dann auch $\phi \wedge \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \phi$.

(2) Wenn $\phi \models \psi$, dann auch $\phi \vee \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$.

(3) Wenn $\models \phi$, dann auch $\phi \wedge \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$.

(4) Wenn $\models \phi$, dann auch $\neg\phi \vee \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$.

Beweis.

Beweise hier nur (1), Rest verbleibt als Übung.

„$\models$“: Zeige also $\phi \wedge \psi \models \phi$:

Sei v eine Belegung mit $[\![\phi \wedge \psi]\!]_v = 1$. Damit:

$$1 = [\![\phi \wedge \psi]\!]_v = f_\wedge([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) = \min\{[\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\} \leq [\![\phi]\!]_v \in \{0, 1\}$$

Damit bleibt nur $[\![\phi]\!]_v = 1$, und es gilt: $\phi \wedge \psi \models \phi$

„$=\!|$“: Zeige nun $\phi \models \phi \wedge \psi$:

Sei dazu v eine Belegung mit: $[\![\phi]\!]_v = 1$.

Nach Voraussetzung gilt $\phi \models \psi$. Nach Definition der Folgerung muss also für v gelten: $[\![\psi]\!]_v = 1$. Damit:

$$[\![\phi \wedge \psi]\!]_v = f_\wedge([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) = f_\wedge(1, 1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Damit ist auch $\phi \models \phi \wedge \psi$ gezeigt.

Q.E.D.

2.12 Lemma (Wichtige logische Folgerungsbeziehungen): Die folgenden logischen Folgerungsbeziehungen gelten für alle Formeln ϕ, χ, ψ:

(1) Kettenschluß:

$\phi \to \chi, \chi \to \psi \models \phi \to \psi$

(2) Modus ponendo ponens:

$\phi \to \psi, \phi \models \psi$

(3) Modus tollendo tollens:

$\phi \to \psi, \neg\psi \models \neg\phi$

(4) Modus tollendo ponens:

$\phi \vee \psi, \neg\phi \models \psi$

(5) Modus ponendo tollens:

$\neg(\phi \wedge \psi), \phi \models \neg\psi$

Beweis. Leichte Übungen q.e.d.

2.13 Lemma (Wichtige logische Äquivalenzbeziehungen): Die folgenden logischen Folgerungsbeziehungen gelten für alle Formeln ϕ, χ, ψ:

(1) Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$:

$\phi \wedge \psi \mathrel{=\!\mid\models} \psi \wedge \phi$

$\phi \vee \psi \mathrel{=\!\mid\models} \psi \vee \phi$

(2) Assioziativität von $\wedge$ und $\vee$:

$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \mathrel{=\!\mid\models} \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$

$(\phi \vee \psi) \vee \chi \mathrel{=\!\mid\models} \phi \vee (\psi \vee \chi)$

(3) Distributivität von $\wedge$ und $\vee$:

$(\phi \wedge \psi) \vee \chi \mathrel{=\!\mid\models} (\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$

$(\phi \vee \psi) \wedge \chi \mathrel{=\!\mid\models} (\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$

(4) Absorption:

$(\phi \wedge \psi) \vee \phi \mathrel{=\!\mid\models} \phi$

$(\phi \vee \psi) \wedge \phi \mathrel{=\!\mid\models} \phi$

(5) Idempotenz:

$\phi \wedge \phi \mathrel{=\!\mid\models} \phi$

$\phi \vee \phi \mathrel{=\!\mid\models} \phi$

(6) Neutralität von $\bot$:

$\phi \vee \bot \mathrel{=\!\mid\models} \phi$

(7) Satz vom Widerspruch:

$\phi \wedge \neg\phi \mathrel{=\!\mid\models} \bot$

(8) Doppelte Negation:

$\neg\neg\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \phi$

(9) De Morgansche Gesetze:

$\neg(\phi \wedge \psi) \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg\phi \vee \neg\psi$

$\neg(\phi \vee \psi) \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg\phi \wedge \neg\psi$

(10) Negation als Implikation der Absurdität:

$\phi \to \bot \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg\phi$

$\neg\phi \to \bot \mathrel{=\!\mid\!\models} \phi$

(11) Kontraposition:

$\phi \to \psi \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg\psi \to \neg\phi$

(12) Materiale Implikation:

$\phi \to \psi \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg\phi \vee \psi$

(13) Import-/Export-Äquivalenz:

$\phi \wedge \psi \to \chi \mathrel{=\!\mid\!\models} \phi \to (\psi \to \chi)$

(14) Distribution von $\wedge$ und $\vee$ über die Implikation:

$\phi \wedge \psi \to \chi \mathrel{=\!\mid\!\models} (\phi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$

$\phi \vee \psi \to \chi \mathrel{=\!\mid\!\models} (\phi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)$

$\chi \to \phi \wedge \psi \mathrel{=\!\mid\!\models} (\chi \to \phi) \wedge (\chi \to \psi)$

$\chi \to \phi \vee \psi \mathrel{=\!\mid\!\models} (\chi \to \phi) \vee (\chi \to \psi)$

Beweis. Leichte Übungen Q.E.D.

§3 Substitution

In diesem Abschnitt wird die Substitution eingeführt. Die Substitution ist ein wichtiges Werkzeug, das im weiteren Verlauf der Vorlseung, insbesondere in der Prädikatenlogik, an Bedeutung gewinnt.

3.1 DEF (Substitution): Es seien $\phi, \psi \in$ PROP und $p \in$ AV.

Die Formel $\phi[\psi/p]$ ist das Resultat der *Substitution* (Ersetzung) sämtlicher Vorkommen der Aussagevaribalen p in der Formel ϕ durch die Formel ψ.

Formal läßt sich die Substitution wie folgt rekursiv definieren:

(1) $p_k[\phi/p_l] \doteq_{\text{def}} \begin{cases} p_k & \text{falls } k \neq l \\ \phi & \text{sonst} \end{cases}$

(2) $\bot[\psi/p_l] \doteq_{\text{def}} \bot$

(3) $\neg\phi[\psi/p_l] \doteq_{\text{def}} \neg\big(\phi[\psi/p_l]\big)$

(4) $(\phi_1 \circ \phi_2)[\psi/p_l] \doteq_{\text{def}} \big(\phi_1[\psi/p_l] \circ \phi_2[\psi/p_l]\big)$

Bemerkung: In der Definition der Substitution ist nicht gefordert, dass p überhaupt in ϕ vorkommt, und ausdrücklich erlaubt, dass p in ψ vorkommt.

Beispiel (Substitution):

(1) $((p_1 \to p_2) \wedge p_1)[p_2 \vee p_1/p_3] \doteq (p_1 \to p_2) \wedge p_1$

(2) $((p_1 \to p_2) \wedge p_1)[p_2 \vee p_1/p_1] \doteq ((p_2 \vee p_1) \to p_1) \wedge (p_2 \vee p_1)$

3.2 DEF (Simultane Substitution): Seien $\phi, \psi_1, \ldots, \psi_n \in$ PROP und seien $p_{k_1}, \ldots, p_{k_n} \in$ AV ($n \in \mathbb{N}$ und $k_1 \ldots, k_n \in \mathbb{N}$).

Die Formel $\phi[\psi_1/p_{k_1}, \ldots, \psi_n/p_{k_n}]$ ist das Resultat der *simultanen Substitution* aller Aussagevariablen p_{k_i} in der Formel ϕ durch die entsprechende Formel ψ_i $(0 \leq i \leq n)$.

Bemerkung: Das Ergebnis einer simultanen Ersetzung ist im Allgemeinen verschieden von der Hintereinanderausführung derselben Ersetzungen.

Beispiel:

- $(p_1 \wedge p_2)[p_1/p_2]\,[p_2/p_1] \doteq (p_1 \wedge p_1)[p_2/p_1] \doteq (p_2 \wedge p_2)$
- $(p_1 \wedge p_2)[p_1/p_2,\ p_2/p_1] \doteq (p_2 \wedge p_1)$

Alternative Notation (Simultane Substitution): Anstelle der definierten Notation schreiben wir auch $\phi[\psi_1, \ldots, \psi_n/p_1, \ldots, p_n]$ oder kurz $\phi[\vec{\psi}/\vec{p}]$.

Bemerkung:

(1) Für Substitution und die simultane Substitution können exakte, rekursive Definition angegeben werden, sofern man das Konzept der rekursiven Definition geeignet erweitert.

(2) Die simultane Substitution durch Hintereinanderausführungen einfacher Substitutionen beschrieben werden (leichte Übung).

3.3 Theorem (Substitutionssatz): Seien $\phi, \psi_1, \psi_2 \in$ PROP und $p \in$ AV. Dann gilt:

$$\text{Wenn } \psi_1 \mathrel{=\!\!\mid\!\models} \psi_2, \text{ dann } \phi[\psi_1/p] \mathrel{=\!\!\mid\!\models} \phi[\psi_2/p].$$

Dazu äquivalent:

$$\text{Wenn } \models \psi_1 \leftrightarrow \psi_2, \text{ dann } \models \phi[\psi_1/p] \leftrightarrow \phi[\psi_2/p].$$

Beweis. Durch Induktion über dem Aufbau von ϕ.

Seien dazu $\psi_1, \psi_2 \in$ PROP gegeben mit: $\psi_1 \mathrel{=\!\!\mid\!\models} \psi_2$, und $p \in AV$.

$\bot$: $\bot[\psi_1/p] \simeq \bot \mathrel{=\!\!\mid\!\models} \bot \simeq \bot[\psi_2/p]$

p_n: Falls $p \simeq p_n$, dann gilt nach Voraussetzung über ψ_1 und ψ_2:

$$p_n[\psi_1/p] \simeq \psi_1 \mathrel{=\!\!\mid\!\models} \psi_2 \simeq p_n[\psi_2/p]$$

Ansonsten ist $p \not\simeq p_n$, und damit gilt trivialerweise:

$$p_n[\psi_1/p] \simeq p_n \mathrel{=\!\!\mid\!\models} p_n \simeq p_n[\psi_2/p]$$

IV: Es gelte die Behauptung für σ und τ. Damit gilt für alle Belegungen v:

$$[\![\sigma[\psi_1/p]]\!]_v = [\![\sigma[\psi_2/p]]\!]_v \quad \text{und} \quad [\![\tau[\psi_1/p]]\!]_v = [\![\tau[\psi_2/p]]\!]_v$$

$\neg\sigma$: Analog zum Fall $\sigma \circ \tau$ unten.

$(\sigma \circ \tau)$: Klar ist (für $i = 1, 2$): $(\sigma \circ \tau)[\psi_i/p] \simeq \big(\sigma[\psi_i/p] \circ \tau[\psi_i/p]\big)$.

Sei v eine beliebige Belegung. Damit gilt:

$$[\![(\sigma \circ \tau)[\psi_1/p]]\!]_v = f_\circ\big([\![\sigma[\psi_1/p]]\!]_v, [\![\tau[\psi_1/p]]\!]_v\big)$$

$$\stackrel{(IV)}{=} f_\circ\big([\![\sigma[\psi_2/p]]\!]_v, [\![\tau[\psi_2/p]]\!]_v\big) = [\![(\sigma \circ \tau)[\psi_2/p]]\!]_v$$

Damit sind die beiden Formeln schon logisch-äquivalent.

Q.E.D.

Bemerkung:

Das Theorem besagt, dass die Ersetzung von Teilaussagen durch logisch äquivalente Aussagen den Wahrheitswert der Gesamtaussage nicht verändert.

§4 Funktionale Vollständigkeit und Dualität

In diesem Paragraphen werden wir uns mit den semantischen Eigenschaften der Junktoren beschäftigen. Zunächst wird der Begriff des Junktors auf Junktoren beliebiger Stelligkeit verallgemeinert, um damit die funktionale Vollständigkeit von Junktorenmengen diskutieren zu können. Im Anschluss daran wird die Dualität von Junktoren besprochen.

4.1 Allgemeine Junktoren: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei ein n-stelliger Junktor \$ gegeben, d.h. wenn $\phi_1, \dots, \phi_n \in \text{PROP}$, dann auch $\$(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \text{PROP}$. Weiterhin sei für \$ eine n-stellige Wahrheitsfunktion $f_\$: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ definiert (z.B. durch eine Wahrheitstafel). Dann ist die Bewertung einer Formel $\$(\phi_1, \dots, \phi_n)$ unter einer Belegung v definiert als:

$$[\![\$(\phi_1, \dots, \phi_n)]\!]_v =_{\text{def}} f_\$\big([\![\phi_1]\!]_v, \dots, [\![\phi_n]\!]_v\big).$$

4.2 DEF (Darstellbarkeit/ Funktionale Vollständigkeit): Sei $\mathcal{K}$ eine Menge beliebiger Junktoren.

Ein n-stelliger Junktor \$ läßt sich über $\mathcal{K}$ *darstellen*, falls es eine Formel χ gibt, so dass in χ höchstens die Aussagevariablen $p_1, \dots p_n$ und höchstens Junktoren aus $\mathcal{K}$ vorkommen und es gilt:

$$\$(p_1, \dots, p_n) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \chi$$

Die Menge $\mathcal{K}$ heißt *(wahrheits-)funktional vollständig*, falls sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeder n-stellige Junktor \$ darstellen läßt.

Bemerkungen:

(1) Sei χ Formel, die einen Junktor \$ darstellt. Aus dem Substitutionssatz folgt damit für beliebige $\phi_1, \dots, \phi_n \in \text{PROP}$:

$$\$(\phi_1, \dots, \phi_n) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \chi[\phi_1/p_1, \dots, \phi_n/p_n]$$

Dadurch ist die Darstellung von allgemeinen Junktoren durch Formelschemta begründet.

(2) Nach der Definition von Darstellbarkeit dürfen bei der Darstellung von $\bot$ (und $\top$) nur Formeln verwendet werden, die keine Aussagevariablen enthalten. Damit kann $\bot$ lediglich durch 0-stellige Junktoren dargestellt werden. Daher müßte bereits in jeder vollständigen Menge $\bot$ (oder $\top$) vorkommen.

Um dies zu vermeiden, erlauben wir für $\bot$ (und $\top$), dass es durch Formeln τ dargestellt werden darf, die höchstens die Aussagevariable p_0 enthalten.

4.3 Lemma (Darstellbarkeit der ursprünglichen Junktoren): Die ursprünglichen Junktoren lassen sich wechselseitig durch andere Junktoren darstellen. Für alle $\phi, \psi \in$ PROP gilt z.B.:

(1) $\phi \leftrightarrow \psi \mathrel{=\mid\models} (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

(2) $\phi \to \psi \mathrel{=\mid\models} (\neg\phi \vee \psi)$

(3) $\phi \vee \psi \mathrel{=\mid\models} \neg\phi \to \psi$

(4) $\phi \vee \psi \mathrel{=\mid\models} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$

(5) $\phi \wedge \psi \mathrel{=\mid\models} \neg(\neg\psi \vee \neg\phi)$

(6) $\neg\phi \mathrel{=\mid\models} \phi \to \bot$

(7) $\bot \mathrel{=\mid\models} \phi \wedge \neg\phi$

Beweis. Der Beweis wurde bereits im Zuge der Äquivalenzen in Kapitel 2 erbracht (Lemmata 2.12 und 2.13). Q.E.D.

Beispiel (Definition von $\wedge$ durch $\to$,$\bot$): Finde eine Formel, in der nur die beiden Junktoren $\bot$ und $\to$ vorkommen und die zu $\phi \wedge \psi$ logisch-äquivalent ist.

$$\begin{aligned}
\phi \wedge \psi &\mathrel{=\mid\models} \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) && \big(\text{Def. } \wedge, \text{ wie oben } (5)\big)\\
&\mathrel{=\mid\models} ((\neg\phi) \vee (\psi \to \bot)) \to \bot && \big(\text{Def. } \neg, \text{ wie oben } (6)\big)\\
&\mathrel{=\mid\models} (\phi \to (\psi \to \bot)) \to \bot && \big(\text{Def. } \to, \text{ wie oben } (2)\big)
\end{aligned}$$

4.4 Theorem (Funktionale Vollständigkeit): Sei $\mathcal{K} := \{\wedge, \vee, \neg, \bot\}$. Für jeden n-stelligen Junktor \$ ($n \in \mathbb{N}$) gibt es eine Formel χ, die genau die Aussagesymbole $p_1, \ldots, p_n$ und höchstens Junktoren aus $\mathcal{K}$ enthält, so dass folgendes gilt:

$$\$(p_1, \ldots, p_n) \mathrel{=\mid\models} \chi$$

Beweis. Durch Induktion über der Anzahl n der Stellen von \$

$n = 0$: Für $\$ \doteq \bot$ ist die Aussage trivial. Sei also $\$ \not\doteq \bot$.

Damit gilt, dass in der Wahrheitstafel von \$ eine 1 steht (d.h., dass die Wahrheitstafel von \$ nur aus der 1 besteht), muss $f_\$ = f_\top = 1 - f_\bot$ sein.

Betrachte $\chi \doteq_{\text{def}} \neg\bot$. Offensichtlich enthält χ keine Aussagevariablen und nur Junktoren aus $\mathcal{K}$. Es gilt zudem: $\$ \mathrel{=\mid\models} \chi$.

IV: Angenommen, die Aussage gilt für alle n-stelligen Junktoren.

$n + 1$: Sei \$ ein beliebiger $n + 1$-stelliger Junktor, definiert durch seine $n + 1$-stellige Wahrheitsfunktion $f_\$$.

Definiere zwei n-stellige Junktoren $\$_0, \$_1$ durch folgende, n-stellige Wahrheitsfunktionen:

$$f_{\$_0}(x_1, \ldots, x_n) =_{\text{def}} f_\$(x_1, \ldots, x_n, 0)$$
$$f_{\$_1}(x_1, \ldots, x_n) =_{\text{def}} f_\$(x_1, \ldots, x_n, 1)$$

Sei v eine beliebige Belegung. Damit gilt:
Falls $v(p_{n+1}) = 0$:

$$\begin{aligned}
\llbracket \$(p_1, \ldots, p_{n+1}) \rrbracket_v &= \llbracket \$_0(p_1, \ldots, p_n) \rrbracket_v \\
&= \llbracket \$_0(p_1, \ldots, p_n) \rrbracket_v \cdot \llbracket \neg p_{n+1} \rrbracket_v \\
&= \llbracket \$_0(p_1, \ldots, p_n) \wedge \neg p_{n+1} \rrbracket_v
\end{aligned}$$

Falls $v(p_{n+1}) = 1$:

$$\begin{aligned}
\llbracket \$(p_1, \ldots, p_{n+1}) \rrbracket_v &= \llbracket \$_1(p_1, \ldots, p_n) \rrbracket_v \\
&= \llbracket \$_0(p_1, \ldots, p_n) \rrbracket_v \cdot \llbracket p_{n+1} \rrbracket_v \\
&= \llbracket \$_1(p_1, \ldots, p_n) \wedge p_{n+1} \rrbracket_v
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\$(p_1, \ldots, p_{n+1}) \mathrel{\dashv\models} \big(\$_0(p_1, \ldots, p_n) \wedge \neg p_{n+1}\big) \vee \big(\$_1(p_1, \ldots, p_n \wedge p_{n+1})\big)$$

Nach IV gibt es Formeln χ_0, χ_1, so dass diese genau die Aussagevariablen $p_1, \ldots, p_n$ und höchstens Junktoren aus $\mathcal{K}$ enthalten und dass gilt:

$$\$_0(p_1, \ldots, p_n) \mathrel{\dashv\models} \chi_0$$
$$\$_1(p_1, \ldots, p_n) \mathrel{\dashv\models} \chi_1$$

Dann folgt mit Substitutionssatz für $\chi \bumpeq_{\mathrm{def}} \big(\chi_0 \wedge \neg p_{n+1}\big) \vee (\chi_1 \wedge p_{n+1})$:

$$\$(p_1, \ldots, p_{n+1}) \mathrel{\dashv\models} \chi$$

Dabei erfüllt χ die geforderten Bedingungen. Q.E.D.

Beispiel (Vorgehen im Theorem): Das Vorgehen im Beweis des Theorems soll illustriert werden. Sei dazu $ ein zweistelliger Junktor, der über eine Wahrheitstafel definiert wird.

Vorsicht: Wir schreiben in den Wahrheitstafeln die Argumente in umgekehrter Reihenfolge! Damit wird erreicht, dass zuerst ϕ_1 in die Formel aufgenommen wird, und zuletzt ϕ_2 hinzukommt.

ϕ_2	ϕ_1	$\$(\phi_1, \phi_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c}\bot \\ \neg\bot\end{array}\right\} \begin{array}{r}\chi_0 \bumpeq (\bot \wedge \neg\phi_1) \\ \vee (\neg\bot \wedge \phi_1)\end{array} \\
\left.\begin{array}{c}\bot \\ \bot\end{array}\right\} \begin{array}{r}\chi_1 \bumpeq (\bot \wedge \neg\phi_1) \\ \vee (\bot \wedge \phi_1)\end{array}
\end{array}\right\} \begin{array}{r}\chi \bumpeq (\chi_0 \wedge \neg\phi_2) \\ \vee (\chi_1 \wedge \phi_2)\end{array}$$

Es ist $\chi \bumpeq (((\bot \wedge \neg\phi_1) \vee (\neg\bot \wedge \phi_1)) \wedge \neg\phi_2) \vee (((\bot \wedge \neg\phi_1) \vee (\bot \wedge \phi_1)) \wedge \phi_2)$.

Nach Theorem 4.4 gilt nun $\$(\phi_1, \phi_2) \mathrel{\dashv\models} \chi$.

Da für alle $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt, dass $\bot \wedge \phi \mathrel{\dashv\models} \bot$ und $\neg\bot \wedge \phi \mathrel{\dashv\models} \phi$, läßt sich χ unter Verwendung von Substitution weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\chi &\bumpeq (((\bot \wedge \neg\phi_1) \vee (\neg\bot \wedge \phi_1)) \wedge \neg\phi_2) \vee (((\bot \wedge \neg\phi_1) \vee (\bot \wedge \phi_1)) \wedge \phi_2) \\
&\mathrel{\dashv\models} ((\bot \vee \phi_1) \wedge \neg\phi_2) \vee ((\bot \vee \bot) \wedge \phi_2) \\
&\mathrel{\dashv\models} (\phi_1 \wedge \neg\phi_2) \vee (\bot \wedge \phi_2) \\
&\mathrel{\dashv\models} (\phi_1 \wedge \neg\phi_2) \vee \bot \\
&\mathrel{\dashv\models} \phi_1 \wedge \neg\phi_2
\end{aligned}$$

4.5 Korollar: Folgende Mengen von Junktoren sind funktional vollständig:

$$\{\to, \bot\}, \{\neg, \to\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}$$

Beweis. Es genügt jeweils zu zeigen, dass sich mit Hilfe der vorgegebenen Junktoren die Junktoren einer funktional vollständigen Menge darstellen lassen.

Zeige die funktionale Vollständigkeit von $\{\to, \bot\}$:

Wir wissen aus dem Theorem zur funktionalen Vollständigkeit, dass die Menge $\mathcal{K} = \{\wedge, \vee, \neg, \bot\}$ funktional vollständig ist. Es genügt also die Junktoren aus $\mathcal{K}$ nach Theorem 4.3 darzustellen:

(1) $\neg p_1 \mathrel{=\!\!|\!\!\models} p_1 \to \bot$

(2) $p_1 \vee p_2 \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg p_1 \to p_2$
Auf der rechten Seite darf $\neg$ verwendet werden, da $\neg$ schon über $\{\to, \bot\}$ dargestellt wurde und $\neg p_1$ entsprechend ersetzt werden kann.

(3) $p_1 \wedge p_2 \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$

Damit sind alle Junktoren aus $\mathcal{K}$ dargestellt über $\{\to, \bot\}$, und daher ist diese Menge funktional vollständig.

Die Behauptung wird für die anderen Mengen analog bewiesen (wobei nun auch $\{\to, \bot\}$ anstelle von $\mathcal{K}$ verwendet werden könnte). Q.E.D.

Beispiel (Funktional vollständige Junktoren): Die beiden zweistelligen Junktoren *Sheffer-Strich* oder *Exklusion* ($|$) und *Peircescher Pfeil* oder *Rejektion* ($\downarrow$) sind schon alleine für sich funktional vollständig. Sie haben folgende Wahrheitstafeln:

ϕ	ψ	$\phi \mid \psi$	$\phi \downarrow \psi$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Die funktionale Vollständigkeit von $\{\,|\,\}$ und $\{\downarrow\}$ verbleibt als Übung.

Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen werden nur noch Formeln über der funktional vollständigen Junktorenmenge $\{\neg, \wedge, \vee\}$ betrachtet.

4.6 DEF (Inversion): Die Abbildung $(\cdot)^\iota : \mathrm{PROP} \to \mathrm{PROP} : \phi \mapsto (\phi)^\iota$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von ϕ definiert:

(1) $(p_k)^\iota \mathrel{\hat{=}_{\text{def}}} \neg p_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$

(2) $(\neg\phi)^\iota \mathrel{\hat{=}_{\text{def}}} \neg(\phi)^\iota$

(3) $\big((\phi \wedge \psi)\big)^\iota \mathrel{\hat{=}_{\text{def}}} \big((\phi)^\iota \vee (\psi)^\iota\big)$

(4) $\big((\phi \vee \psi)\big)^\iota \mathrel{\hat{=}_{\text{def}}} \big((\phi)^\iota \wedge (\psi)^\iota\big)$

4.7 Lemma (Inversion): Für jede Formel $\phi \in \text{PROP}$ und für jede Belegung v gilt:

$$[\![(\phi)^\iota]\!]_v = 1 - [\![\phi]\!]_v = [\![\neg\phi]\!]_v$$

Beweis. Durch Induktion über den Aufbau von ϕ, wobei nur Formeln über der funktional vollständigen Menge $\{\wedge, \vee, \neg\}$ betrachtet werden:

Sei nun v eine beliebige Belegung.

p: Es gilt: $(p)^\iota \doteq \neg p$. Damit: $[\![(p)^\iota]\!]_v = [\![\neg p]\!]_v = 1 - [\![p]\!]_v$

IV: Es gelte die Behauptung für ψ und χ.

$\neg\psi$: Es gilt: $(\neg\psi)^\iota \doteq \neg(\psi)^\iota$. Damit:

$$[\![(\neg\psi)^\iota]\!]_v = [\![\neg(\psi)^\iota]\!]_v = 1 - [\![(\psi)^\iota]\!]_v \overset{(IV)}{=} 1 - [\![\neg\psi]\!]_v = [\![\neg\neg\psi]\!]_v$$

$(\psi \wedge \chi)$: Es gilt: $\big((\psi \wedge \chi)\big)^\iota \doteq \big((\psi)^\iota \vee (\chi)^\iota\big)$. Damit:

$$[\![\big((\psi \wedge \chi)\big)^\iota]\!]_v = [\![(\psi)^\iota \vee (\chi)^\iota]\!]_v = f_\vee([\![(\psi)^\iota]\!]_v, [\![(\chi)^\iota]\!]_v)$$

$$\overset{(IV)}{=} f_\vee(1 - [\![\psi]\!]_v, 1 - [\![\chi]\!]_v) = \max(1 - [\![\psi]\!]_v, 1 - [\![\chi]\!]_v)$$

Nun ist $\max(1 - [\![\psi]\!]_v, 1 - [\![\chi]\!]_v) = 0$ genau dann, wenn $[\![\psi]\!]_v = [\![\chi]\!]_v = 1$, was genau dann gilt, wenn $[\![\psi \wedge \chi]\!]_v = 1$.

Somit: $[\![(\psi \wedge \chi)^\iota]\!]_v = 1 - [\![\psi \wedge \chi]\!]_v = [\![\neg(\psi \wedge \chi)]\!]_v$.

$(\psi \vee \chi)$: Analog zum Fall $(\psi \wedge \chi)$.

Q.E.D.

4.8 Korollar: Für jede Formel $\phi \in \text{PROP}$ gilt:

$$(\phi)^\iota \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} \neg\phi$$

Beweis. Direkte Folge aus obigem Lemma. Q.E.D.

4.9 DEF (Dual): Die Abbildung $(\,\cdot\,)^\delta : \text{PROP} \to \text{PROP} : \phi \mapsto (\phi)^\delta$ ordnet jeder Formel ϕ ihr Dual zu und ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von ϕ definiert:

(1) $(p_k)^\delta \doteq_{\text{def}} p_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$

(2) $(\neg\phi)^\delta \doteq_{\text{def}} \neg(\phi)^\delta$

(3) $\big((\phi \wedge \psi)\big)^\delta \doteq_{\text{def}} \big((\phi)^\delta \vee (\psi)^\delta\big)$

(4) $\big((\phi \vee \psi)\big)^\delta \doteq_{\text{def}} \big((\phi)^\delta \wedge (\psi)^\delta\big)$

Offensichtlich gilt: $((\phi)^\delta)^\delta \doteq \phi$.

4.10 Theorem (Dualitätssatz): Seien $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$. Dann gilt:

Es ist $\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$ genau dann, wenn $(\phi)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} (\psi)^\delta$.

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

„$\Rightarrow$“ Sei $\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$ gegeben, womit aber auch gilt: $\neg\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\psi$.
Mit obigem Lemma folgt: $(\phi)^\iota \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\psi \mathrel{=\!\!|\!\models} (\psi)^\iota$
Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit: $\{p_0, \ldots, p_n\} \supseteq \mathrm{AV}(\phi) \cup \mathrm{AV}(\psi)$,
wobei $\mathrm{AV}(\phi)$ die Menge der Aussagevariablen ist, die in ϕ vorkommen.
Nach einer simultanen Substitution dieser $n+1$ Aussagenvariablen durch ihre Negation gilt noch immer:

$$(\phi)^\iota[\neg p_0, \ldots, \neg p_n / p_0, \ldots, p_n] \mathrel{=\!\!|\!\models} (\psi)^\iota[\neg p_0, \ldots, \neg p_n / p_0, \ldots, p_n]$$

Dabei gilt:

$$(\phi)^\iota[\neg p_0, \ldots, \neg p_n / p_0, \ldots, p_n] \doteq (\phi)^\delta[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n / p_0, \ldots, p_n]$$

und

$$(\psi)^\iota[\neg p_0, \ldots, \neg p_n / p_0, \ldots, p_n] \doteq (\psi)^\delta[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n / p_0, \ldots, p_n]$$

Das bedeutet:

$$(\phi)^\delta[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n / p_0, \ldots, p_n] \mathrel{=\!\!|\!\models} (\psi)^\delta[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n / p_0, \ldots, p_n]$$

Daraus folgt direkt: $(\phi)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} (\psi)^\delta$

„$\Leftarrow$“ Sei $(\phi)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} (\psi)^\delta$ gegeben.
Nun folgt aus „$\Rightarrow$“ bereits: $((\phi)^\delta)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} ((\psi)^\delta)^\delta$.
Da $((\phi)^\delta)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi$ und $((\psi)^\delta)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$, gilt schon: $\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$

Insgesamt wurde die Äquivalenz gezeigt. Q.E.D.

Bemerkung (Dualitätssatz): Der Dualitätssatz läßt sich etwa für Aussagen über Normalformen (vgl. dazu den nächsten Paragraphen) gut verwenden.

§5 Algebraische Gesetze und Normalformen

In diesem Paragraphen werden Normalformen von Aussagen vorgestellt. Zu diesem Zweck sollen zunächst abkürzende Schreibweisen für iterierte Konjunktionen und Disjunktionen eingeführt und verallgemeinerte algebraische Gesetze für diese gezeigt werden.

5.1 DEF (Verallgemeinerung $\wedge$ und $\vee$): Seien $\phi_i \in$ PROP für $i \in \mathbb{N}$. Dann seien folgende Schreibweisen rekursiv erklärt:

(1) *Verallgemeinerte Konjunktion:*

$$\bigwedge_{i=1}^{1} \phi_i \;\simeq_{\text{def}}\; \phi_1$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} \phi_i \;\simeq_{\text{def}}\; \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_k \wedge \phi_{n+1}\Big)$$

(2) *Verallgemeinerte Disjunktion:*

$$\bigvee_{i=1}^{1} \phi_i \;\simeq_{\text{def}}\; \phi_1$$

$$\bigvee_{i=1}^{n+1} \phi_i \;\simeq_{\text{def}}\; \Big(\bigvee_{i=1}^{n} \phi_k \vee \phi_{n+1}\Big)$$

Bemerkungen (Verallgemeinerung $\wedge$und $\vee$):

(1) Es wurden hier *keine* unendlichen Konjunktionen und Disjunktionen definiert, sondern beliebige endliche Konjunktionen und Disjunktionen.

(2) Als Grenzfall wird noch vereinbart:

$$\bigwedge_{i=1}^{0} \phi_k \;\simeq_{\text{def}}\; \neg\bot$$

$$\bigvee_{i=1}^{0} \phi_k \;\simeq_{\text{def}}\; \bot$$

(3) Genau genommen müßte man die Definitionen mit dem jeweiligen Grenzfall beginnen und erhielte gemäß der rekursiven Klauseln:

$$\bigwedge_{i=1}^{1} \phi_i \;\simeq\; \neg\bot \wedge \phi_1$$

$$\bigvee_{i=1}^{1} \phi_i \;\simeq\; \bot \vee \phi_1$$

Entsprechend wäre $\bigvee_{i=1}^{4} \phi_i \simeq ((((\bot \vee \phi_1) \vee \phi_2) \vee \phi_3) \vee \phi_4)$.

Solche Formulierungen verallgemeinerter Konjunktion und Disjunktion wären unelegant, da neben den gewünschten noch andere Junktoren vorkämmen. Daher werden die Verallgemeinerungen wie zuerst genannt eingeführt.

5.2 Lemma (Äquivalenzen der verallgemeinerten Junktoren): Die bekannten algebraischen Gesetze für $\wedge$ und $\vee$ aus Lemma 2.13 gelten auch für die Verallgemeinerungen.

D.h.: Für jedes $n \in \mathbb{N}$, für alle $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi \in \mathrm{PROP}$ gilt:

(1) Einfaches Distributivgesetz:

$$(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i) \vee \psi \mathrel{\dashv\models} \bigwedge_{i=1}^{n} (\phi_i \vee \psi)$$

$$(\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i) \wedge \psi \mathrel{\dashv\models} \bigvee_{i=1}^{n} (\phi_i \wedge \psi)$$

(2) Allgemeines Distributiv-Gesetz:

$$(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i) \vee (\bigwedge_{j=1}^{m} \psi_j) \mathrel{\dashv\models} \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} (\phi_i \vee \psi_j)$$

$$(\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i) \wedge (\bigvee_{j=1}^{m} \psi_j) \mathrel{\dashv\models} \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} (\phi_i \wedge \psi_j)$$

(3) De Morgan:

$$\neg \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \mathrel{\dashv\models} \bigvee_{i=1}^{n} \neg\phi_i$$

$$\neg \bigvee_{i=1}^{n} \phi_i \mathrel{\dashv\models} \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\phi_i$$

Beweis. leichte Übung. Q.E.D.

5.3 Lemma (Dualität der verallgemeinerten Junktoren):
Für jedes $n, m \in \mathbb{N}$ und für alle $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi \in \mathrm{PROP}$ gilt:

$$\neg(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} \phi_{i,j}) \mathrel{\dashv\models} \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} \neg\phi_{i,j}$$

$$\neg(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} \phi_{i,j}) \mathrel{\dashv\models} \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} \neg\phi_{i,j}$$

Beweis. Übung. Q.E.D.

5.4 DEF (Normalformen): Sei $\phi \in \mathrm{PROP}$ eine Formel.

(1) ϕ heißt *Literal*, falls ϕ eine Aussagevariable ($\phi \doteq p$) oder eine negierte Aussagevariable ($\phi \doteq \neg p$) ist.

(2) ϕ heißt *konjunktive Normalform* (KNF), falls ϕ eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist. D.h.: es gibt Literale $\phi_{i,j}$ mit:

$$\phi \doteq \bigwedge_i \bigvee_j \phi_{i,j}$$

(3) ϕ heißt *disjunktive Normalform* (DNF), falls ϕ eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist. D.h.: es gibt Literale $\phi_{i,j}$ mit:

$$\phi \doteq \bigvee_i \bigwedge_j \phi_{i,j}$$

Bemerkungen (Normalformen):

(1) Die beiden Formeln $p_1 \wedge \neg p_2$ und $p_1 \vee \neg p_2$ sind beide sowohl konjunktive als auch disjunktive Normalformen.

(2) Zur übersichtlichen Darstellung konkreter konjunktiver und disjunktiver Normalformen dürfen bei iterierten Konjunktionen die Klammern der geschachtelten Konjunktionen weggelassen werden. Entsprechendes gilt bei iterierten Disjunktionen.

Beipiel (Normalformen): Folgende Aussage ist eine konjunktive Normalform:

- $(\neg p_0 \vee p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_0 \vee p_1 \vee p_2)$

5.5 Theorem (Existenz von Normalformen): Sei $\phi \in \mathrm{PROP}$. Dann gibt es zu ϕ eine Formel $\mathrm{KNF}(\phi)$ und eine Formel $\mathrm{DNF}(\phi)$, so dass:

(1) $\mathrm{KNF}(\phi) \mathrel{=\!|\!\models} \phi$, und $\mathrm{KNF}(\phi)$ ist eine konjunktive Normalform,

(2) $\mathrm{DNF}(\phi) \mathrel{=\!|\!\models} \phi$, und $\mathrm{DNF}(\phi)$ ist eine disjunktive Normalform.

Beweis. Durch Induktion über den Formelaufbau von ϕ.

p: Eine Aussagenvariable p ist trivialerweise sowohl KNF als auch DNF. Setze: $\mathrm{KNF}(p) \mathrel{\hat{=}}_{\mathrm{def}} p$ und $\mathrm{DNF}(p) \mathrel{\hat{=}}_{\mathrm{def}} p$. Damit:

$$\mathrm{KNF}(p) \mathrel{=\!|\!\models} p \quad \text{und} \quad \mathrm{KNF}(p) \mathrel{=\!|\!\models} p$$

IV: Es gelte die Behauptung für ψ, χ. Das heißt:

$$\psi \mathrel{=\!|\!\models} \mathrm{KNF}(\psi) \mathrel{\hat{=}} \bigwedge_{i=1}^{k} \delta_i \quad \text{und} \quad \chi \mathrel{=\!|\!\models} \mathrm{KNF}(\chi) \mathrel{\hat{=}} \bigwedge_{j=1}^{l} \delta_{k+i}$$

und

$$\psi \mathrel{=\!|\!\models} \mathrm{DNF}(\psi) \mathrel{\hat{=}} \bigvee_{i=1}^{m} \kappa_i \quad \text{und} \quad \chi \mathrel{=\!|\!\models} \mathrm{DNF}(\chi) \mathrel{\hat{=}} \bigvee_{j=1}^{n} \kappa_{m+i}$$

wobei (für geeignete $k, l, m, n \in \mathbb{N}$) κ_i Konjunktionen und δ_i Disjunktionen von Literalen sind.

$\neg\psi$: Mit Lemma 5.2 (3) gilt:

$$\neg\psi \overset{\mathsf{IV}}{\mathrel{=\!|\!\models}} \neg \bigwedge_{i=1}^{k} \delta_i \mathrel{=\!|\!\models} \bigvee_{i=1}^{k} \neg\delta_i \mathrel{=\!|\!\models} \bigvee_{i=1}^{k} \tilde{\kappa}_i$$

und

$$\neg\psi \overset{\mathsf{IV}}{\mathrel{=\!|\!\models}} \neg \bigvee_{i=1}^{m} \kappa_i \mathrel{=\!|\!\models} \bigwedge_{i=1}^{m} \neg\kappa_i \mathrel{=\!|\!\models} \bigwedge_{i=1}^{m} \tilde{\delta}_i$$

Dabei gelten $\tilde{\kappa}_i \mathrel{=\!|\!\models} \neg\delta_i$ und $\tilde{\delta}_i \mathrel{=\!|\!\models} \neg\kappa_i$ unter erneuter Verwendung von Lemma 5.2 (3) und Entfernung doppelter Negationen.

Setze: $\mathrm{KNF}(\neg\psi) \mathrel{\hat{=}}_{\mathrm{def}} \bigwedge_{i=1}^{m} \tilde{\delta}_i$ und $\mathrm{DNF}(\neg\psi) \mathrel{\hat{=}}_{\mathrm{def}} \bigvee_{i=1}^{k} \tilde{\kappa}_i$.

$(\psi \wedge \chi)$: Offenbar ist: $\psi \wedge \chi \overset{\mathsf{IV}}{=\!\mid\models} \mathrm{KNF}(\psi) \wedge \mathrm{KNF}(\chi)$. Da

$$\mathrm{KNF}(\psi) \wedge \mathrm{KNF}(\chi) \simeq \bigwedge_{i=1}^{k} \delta_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{l} \delta_{k+j} =\!\mid\models \bigwedge_{i=1}^{k+l} \delta_i$$

können wir festlegen, dass $\mathrm{KNF}(\psi \wedge \chi) \simeq_{\mathrm{def}} \bigwedge_{i=1}^{k+l} \delta_i$.

Weiterhin gilt: $\psi \wedge \chi \overset{\mathsf{IV}}{=\!\mid\models} \mathrm{DNF}(\psi) \wedge \mathrm{DNF}(\chi)$. Nun ist

$$\mathrm{DNF}(\psi) \wedge \mathrm{DNF}(\chi) \simeq \bigvee_{i=1}^{m} \kappa_k \;\wedge\; \bigvee_{j=1}^{n} \kappa_{m+j} \overset{\star}{=\!\mid\models} \bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} (\kappa_i \wedge \kappa_{m+j})$$

Dabei $(\star)$ gilt nach Lemma 5.3.

Nun kann man leicht zeigen, dass

$$\bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} (\kappa_i \wedge \kappa_{m+j}) =\!\mid\models \bigvee_{i=1}^{m+n} \kappa_k$$

Daher ist $\mathrm{DNF}(\psi \wedge \chi) \simeq_{\mathrm{def}} \bigvee_{i=1}^{m+n} \kappa_k$.

$(\psi \vee \chi)$: Analog zum Fall $(\psi \wedge \chi)$.

Q.E.D.

Bemerkungen (Normalformen):

(1) Das Theorem soll die Existenz einer logisch-äquivalenten konjunktiven Normalform zu jeder beliebigen Formel beweisen. Dazu muss aber die stärkere Aussage gezeigt werden, dass gleichzeitig konjunktive und disjunktive Normalformen zu einer gegebenen Formel existieren.

Im Beweis werden lediglich Formeln über der Junktorenmenge $\{\wedge, \vee, \neg\}$ betrachtet. Dies genügt auch, da diese Menge funktional vollständig ist (wenn wir $\perp$ durch $p_0 \wedge \neg p_0$ definieren). Zu einer Formel, in der andere Junktoren vorkommen, muß zunächst eine äquivalente Formel gefunden werden, die nur Junktoren aus $\{\wedge, \vee, \neg\}$ enthält.

(2) Eine Normalform (sowohl disjunktiv als auch konjuntiv) läßt sich direkt aus der Wahrheitstafel der gegebenen Formel konstruieren.

(3) Zu einer gegebenen Formel gibt es weder nur eine einzige konjunktive Normalform noch nur eine einzige disjunktive Normalform.

(4) Es handelt sich hier um Normalformen, die zu einer gegebenen Ausgangsformel logisch äquivalent sind. Daneben kann man auch Normalformen betrachten, die mit der Ausgangsformel nur allgemeingültigkeitsäquivalent (bzw. erfüllbarkeitsäquivalent) sind, die also genau dann allgemeingültig (erfüllbar) sind, wenn die Ausgangsformel allgemeingültig (erfüllbar) ist.

dasdasdasfasdfasdg

§6 Der Kalkül des Natürlichen Schließens

In diesem Abschnitt wird der Kalkül des Natürlichen Schließens (NK′) nach Gerhard Gentzen eingeführt. NK′ ist ein syntaktisches Schlussverfahren, in dem Formeln in einer Baumstruktur miteinander in Beziehung gesetzt werden. Das Verfahren verzichtet auf Axiome und besteht lediglich aus Annahmen und Regeln zum Ableiten von Schlüssen. Das Ableiten im Kalkül (Beweisen) ist die syntaktische Entsprechung zur semantischen Folgerung.

Bemerkungen (Sprache):

(1) Der Kalkül NK′ wird für die aussagenlogische Sprache über der funktionalvollständigen Junktorenmenge $\{\rightarrow, \perp, \wedge\}$ definiert. Dadurch kann man die Anzahl der benötigten Regeln beschränken.

(2) Weitere Junktoren werden am Ende des Paragraphen eingeführt.

Schließen im Kalkül: Eine Ableitung ist eine Baumstruktur, die aus dem Hinschreiben von Prämissen und der mehrfachen Anwendung einzelner Schlüsse entsteht.

(1) Annahmen dürfen jederzeit als Prämisse eingeführt werden. Dies geschieht durch das Hinschreiben einer Formel ϕ.

(2) Ein einzelner Schluss besteht aus einer oder mehreren Prämissen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ und einer Konklusion ψ, zu der vermöge einer Regel übergegangen wird. Dies wird im Kalkül nach folgendem Schema notiert:

$$\frac{\phi_1 \qquad \cdots \qquad \phi_n}{\psi}\ (\mathit{Regel})$$

Die Konklusion eines Schlusses kann zur Prämisse eines weiteren Schlusses werden.

Abhängigkeit von Annahmen: Eine Ableitung ist von den Prämissen, die hingeschrieben wurden, *abhängig*, falls diese nicht *gelöscht* wurden. Dies wird im Folgenden näher erläutert:

(1) Abhängigkeit bedeutet, dass man zur Konklusion der Ableitung unter Voraussetzung der Annahmen gelangt. Durch das Löschen einer Annahme hebt man diese Abhängigkeit auf; man kann also ohne diese Annahme zur Konklusion gelangen. Solange eine Annahme nicht gelöscht wurde, wird sie auch als *offene Annahme* bezeichnet.

(2) Einige Regeln erlauben das Löschen von vorher hingeschriebenen Annahmen. Wird beim Ableiten tatsächlich eine offene Annahme gelöscht, so wird die zu löschende Annahme in eckige Klammern gesetzt und die Regel, aufgrund der das Löschen geschieht, im Ableitungsbaum mit einem fortlaufenden Index nummeriert. Dieser Index wird bei der gelöschten Formel an der eckigen Klammern wiederholt.

Die Anwendung einer Regel mit einer Löschung sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{c} \phi \\ \mathfrak{D} \\ \psi \end{array} \quad \text{wird zu} \quad \begin{array}{c} [\phi]^1 \\ \mathfrak{D} \\ \dfrac{\psi}{\chi}\,{\scriptstyle (Regel:1)} \end{array}$$

Dabei repräsentiert $\mathfrak{D}$ eine beliebige Ableitung, die neben ϕ weitere (offene) Annahmen haben kann. Auch ϕ darf an weiteren Stellen offen vorkommen.

Formell drückt der Index, der an die eckige Klammer und hinter die Regel geschrieben wird, eine Relation zwischen den Vorkommen von Annahmen (hier ϕ) und der Konklusion einer Regel (hier χ), bei der diese Vorkommen gelöscht werden, aus.

Konvention (Notation bei Ableitungen und Regeln): Es werden noch einige Konventionen für die Notation benötigt.

(1) $\mathfrak{D}$ wird als metasprachliche Standardvariable für Ableitungen verwendet. (Gelegentlich werden natürliche Zahlen als Indizes verwendet.)

Eine Formel ϕ über dem $\mathfrak{D}$ kennzeichnet, dass die Ableitung $\mathfrak{D}$ die Formel ϕ als offene Annahme hat.

Eine Formel ψ unter dem $\mathfrak{D}$ kennzeichnet, dass die Ableitung $\mathfrak{D}$ die Formel ψ als Konklusion (Endformel) hat.

(2) $[\phi]$ kennzeichnet bei Regeln, dass in einer tatsächlichen Ableitung jedes Vorkommen der Formel ϕ als offene Annahme gelöscht werden darf.

Es ist nicht gefordert, dass die Formel als Annahme in der Ableitung überhaupt vorkommt.

Es ist auch nicht gefordert, dass alle Vorkommen von ϕ gelöscht werden. Im Grenzfall ist es sogar erlaubt, dass kein einziges Vorkommen gelöscht wird.

(3) $[\phi]$ kennzeichnet bei Ableitungen, dass ein Vorkommen der Formel ϕ als offene Annahme gelöscht wurde.

Die durch einen Index ausgedrückte Relation der Annahmenlöschung ist also „many-one“ (und damit eine partielle Funktion) und kann im Grenzfall leer sein.

6.1 DEF (Schlussregeln): Die Schlussregeln bestimmen Relationen von einer oder mehreren Prämissen zu einer Konklusion. Sie erlauben das Einführen (*Introduzieren*) oder Beseitigen (*Eliminieren*) von Junktoren; eine Schlussregel nimmt allerdings eine Sonderstellung ein. Einige Regeln ermöglichen zusätzlich das Löschen offener Annahmen. Die Kennzeichnung der verwendeten Regel für das Ableiten ist in Klammern neben dem Schlußstrich angegeben:

(1) Einführung der Konjunktion:

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\,(\wedge I)$$

(2) Beseitigung der Konjunktion:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\,(\wedge E_1) \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\,(\wedge E_2)$$

(3) Einführung der Implikation:

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi}\,(\to I)$$

(4) Beseitigung der Implikation (modus ponens):

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\,(\to E)$$

(5) Widerspruchsregel (reductio ad absurdum):

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi \to \bot]\\ \bot\end{array}}{\phi}\,(\mathrm{RAA})$$

6.2 DEF (Ableitung): Mithilfe der Schlussregeln kann nun induktiv über der Baumstruktur eine *Ableitung* definiert werden:

(1) Für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist ϕ selbst eine Ableitung.

(2) Falls $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ Ableitungen sind, dann sind auch die folgenden Bäume Ableitungen:

$$(\wedge)\quad \frac{\begin{array}{cc}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2\\ \phi & \psi\end{array}}{\phi \wedge \psi} \quad ; \quad \frac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\phi} \quad ; \quad \frac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\psi}$$

$$(\to)\quad \frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \mathfrak{D}\\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi} \quad ; \quad \frac{\begin{array}{cc}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2\\ \phi & \phi \to \psi\end{array}}{\psi}$$

$$(\mathrm{RAA})\quad \frac{\begin{array}{c}[\phi \to \bot]\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{array}}{\phi}$$

Es wird nicht vorausgesetzt, dass die durch eckige Klammern gekennzeichneten Prämissen in den Ableitungen tatsächlich vorkommen oder dort tatsächlich gelöscht werden.

Beispiele (Ableitungen):

(1) Nach den Bemerkungen zur Annahmenlöschung sind folgende Ableitungen durch richtige Anwendung der Implikationseinführung entstanden:

$$\dfrac{[p_0]^1}{p_0 \to p_0}\,(\to I{:}1) \quad ; \quad \dfrac{p_0}{p_0 \to p_0}\,(\to I) \quad ; \quad \dfrac{p_0}{p_1 \to p_0}\,(\to I)$$

(2) Eine Ableitung von $p_0 \to (p_1 \to p_2)$ aus der Annahme $p_0 \wedge p_1 \to p_2$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_0 \wedge p_1 \to p_2 \qquad \dfrac{[p_0]^2 \qquad [p_1]^1}{p_0 \wedge p_1}\,(\wedge I)}{p_2}\,(\to E)}{p_1 \to p_2}\,(\to I{:}1)}{p_0 \to (p_1 \to p_2)}\,(\to I{:}2)$$

(3) Eine Ableitung der Formel $((p_0 \to \bot) \to \bot) \to p_0$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(p_0 \to \bot) \to \bot]^2 \qquad [p_0 \to \bot]^1}{\bot}\,(\to E)}{p_0}\,(RAA{:}1)}{((p_0 \to \bot) \to \bot) \to p_0}\,(\to I{:}2)$$

6.3 DEF (Annahmenmenge): Die Abbildung

$$\mathrm{Hyp} : \mathfrak{D} \mapsto \{\phi \in \mathrm{PROP} : \ \phi \text{ ist offene Annahme von } \mathfrak{D}\}$$

ordnet jeder Ableitung $\mathfrak{D}$ die Menge ihrer offenen Annahmen zu. Die Menge $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ wird auch *Hypothesenmenge* oder *Annahmenmenge von* $\mathfrak{D}$ genannt.

6.4 DEF (Ableitbarkeit, Formaler Beweis): Eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist aus einer Menge $\Delta \subseteq \mathrm{PROP}$ von Formeln *ableitbar* ($\Delta \vdash \phi$), falls es eine Ableitung $\mathfrak{D}$ mit der Endformel ϕ gibt, und $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \Delta$.

Eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist *formal beweisbar* ($\vdash \phi$), falls es eine Ableitung $\mathfrak{D}$ mit der Endformel ϕ gibt, in der alle Annahmen gelöscht sind. Die Ableitung $\mathfrak{D}$ heißt dann *formaler Beweis* von ϕ.

Notation (Ableitbarkeit): Die folgenden Schreibweisen sind gebräuchlich und wie im semantischen Fall der Folgerungsrelation ($\models$) erklärt:

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \phi \quad ; \quad \Gamma, \phi \vdash \psi \quad ; \quad \Gamma, \Delta \vdash \phi$$

6.5 Proposition (Endliche Ableitbarkeit): Sei $\Delta \subseteq \mathrm{PROP}$ eine (unendliche) Aussagenmenge und $\phi \in \mathrm{PROP}$ eine Aussage. Falls $\Delta \vdash \phi$, dann gibt es eine endliche Teilmenge $\widetilde{\Delta} \subseteq \Delta$ von Δ mit $\widetilde{\Delta} \vdash \phi$.

Beweis. $\Delta \vdash \phi$ bedeutet, dass es eine Ableitung $\mathfrak{D}$ mit Endformel ϕ gibt, so dass $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subset \Delta$. $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ muss nach der Definition von Ableitungen endlich sein, und zudem gilt offensichtlich: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \vdash \phi$. Q.E.D.

Bemerkung (Endliche Ableitbarkeit): Der analoge Satz für die semantische Folgerungsbeziehung $\models$ ist nicht trivial. Er wird erst später mit Hilfe des Vollständigkeitssatzes unter Verwendung dieser Proposition bewiesen (vgl. Korollar 7.14).

6.6 Proposition (Struktureigenschaften): Für alle Aussagen $\phi, \psi \in$ PROP und alle Formelmengen $\Delta, \Gamma \subseteq$ PROP gelten die folgenden Struktureigenschaften:

(1) *Identität:* $\phi \vdash \phi$.

(2) *Verdünnung:* Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma, \Delta \vdash \phi$.

(3) *Schnitt:* Wenn $\Gamma \vdash \phi$ und $\Delta, \phi \vdash \psi$, dann $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

Beweis. Direkte Folge aus der Definition von Ableitbarkeit. Q.E.D.

Der Kalkül NK′ wurde für die Sprache PROP mit den Junktoren $\rightarrow$, $\wedge$ und $\bot$ definiert. Im Folgenden wird diskutiert, wie mit den verbleibenden Junktoren in diesem Kalkül (und dieser Sprache) umgegangen werden muss.

Notation (Weitere Junktoren): Seien $\phi, \psi \in$ PROP beliebige Formeln. Es dürfen folgende abkürzende Schreibweisen verwendet werden:

(1) $\neg\phi$ für die Formel $(\phi \rightarrow \bot)$

(2) $(\phi \vee \psi)$ für die Formel $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$

(3) $(\phi \leftrightarrow \psi)$ für die Formel $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$

6.7 Proposition (Weitere Schlussregeln): Für die Junktoren $\neg$, $\vee$, $\leftrightarrow$ gelten im Kalkül NK′ folgende (abkürzenden) Schlussregeln zur Einführung und Beseitigung:

(1) Einführung der Negation:

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \bot\end{array}}{\neg\phi}\ (\neg I)$$

(2) Beseitigung der Negation:

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ (\neg E)$$

(3) Einführung der Disjunktion:

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ (\vee I_1) \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ (\vee I_2)$$

(4) Beseitigung der Disjunktion:

$$\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\phi] \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\vee E)$$

(5) Einführung der Biimplikation:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\phi] \\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \phi\end{matrix}}{\phi \leftrightarrow \psi}\ (\leftrightarrow I)$$

(6) Beseitigung der Biimplikation:

$$\dfrac{\phi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\psi}\ (\leftrightarrow E_1) \qquad\qquad \dfrac{\psi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\phi}\ (\leftrightarrow E_2)$$

Beweis. Zum Beweis vergleiche van Dalen, Lemma 1.6.2, Seite 49ff. q.e.d.

Bemerkung (Schlussregeln für die Abkürzungen): Dass eine Schlussregel gilt, bedeutet hier, dass ihre Anwendung ersetzbar ist durch Anwendung schon bekannter Schlussregeln (für $\wedge$,$\rightarrow$ und $\perp$). Dies ermöglicht im Kalkül einen einfachen Umgang mit Formeln, die $\vee$ und $\leftrightarrow$ enthalten.

Man muss hierbei aber beachten, dass die Junktoren $\vee$ und $\leftrightarrow$ tatsächlich nicht zur Sprache gehören und nur als Abkürzung für Formeln verwendet werden; entsprechend muss die Definition einer Ableitung nicht den neuen Verhältnissen angepasst werden. Die neuen Schlussregeln sind nur Abkürzungen im Aufschrieb. Man kann jederzeit die tatsächlich gemachten Teilableitungen einfügen.

Alternativer Kalkül: Man kann alternativ die Disjunktion und die Biimplikation auch als Grundzeichen der Aussagenlogik verwenden; also eine Sprache PROP betrachten, die über den Junktoren $\wedge$, $\rightarrow$, $\perp$ und auch $\neg$, $\vee$ und $\leftrightarrow$ definiert ist.

In diesem Fall werden die in Proposition 6.8 (1) – (4) bewiesenen Eigenschaften der Zeichen $\neg$, $\vee$ und $\leftrightarrow$ als eigenständige Schlussregeln festgesetzt. Die Definition einer Ableitung wird an die neuen Verhältnisse angepaßt. Der resultierende Kalkül wird NK genannt.

Insbesondere sind damit $(\phi \vee \psi)$ und $(\phi \leftrightarrow \psi)$ keine Abkürzungen mehr für andere Formeln; stattdessen kann man nun im Kalkül NK die folgenden gegenseitigen Ableitbarkeiten beweisen:

$$\neg\phi \dashv\vdash \phi \rightarrow \perp$$

$$\phi \vee \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$\phi \leftrightarrow \psi \dashv\vdash (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

§7 Vollständigkeit

Motivation (Vollständigkeitssatz): Bisher wurden zwei zentrale Konzeptionen der Logik eingeführt:

(1) Die Folgerung ($\models$): wird semantisch definiert über die Betrachtung aller (möglichen) Interpretationen der Formeln; die Gültigkeit (Wahrheit) der Prämissen erzwingt in einem Schluss die Gültigkeit der Konklusion; die Bedeutung der Junktoren wird explizit durch Wahrheits-Funktionen festgelegt.

(2) Das Ableiten ($\vdash$): wird syntaktisch definiert über die regelkonforme Anwendung von Schlussregeln eines Kalküls (bei uns NK$'$); beim Ableiten wird auf die Betrachtung der Bedeutung verzichtet, entscheidend ist das Erreichen der Endformel von den Prämissen ausgehend; die Bedeutung der Junktoren ist (höchstens) implizit durch die Schlussregeln festgelegt.

Im Folgenden wird die Vollständigkeit von NK$'$ bewiesen. Damit ist die Gleichwertigkeit beider Konzeptionen gemeint. Die Vollständigkeit (im weiten Sinn) umfaßt dabei zwei Richtungen:

(1) Die Korrektheit des Kalküls: Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma \models \phi$.

Alles, was abgeleitet werden kann, kann auch gefolgert werden.

(2) Die (eigentliche) Vollständigkeit des Kalküls: Wenn $\Gamma \models \phi$, dann $\Gamma \vdash \phi$.

Alles, was gefolgert werden kann, kann auch abgeleitet werden.

Die Verwendung von "Vollständigkeit" als übergeordneten Begriff legt nahe, dass der Folgerungsbegriff als primär, der Ableitungsbegriff als sekundär verstanden wird. Ursprünglich wurde dies auch tatsächlich so gesehen. Es gibt allerdings inzwischen philosophische Konzeptionen der Logik, die das Ableiten als primär ansehen. Letztlich kann festgehalten werden, dass beide Konzeptionen unabhängig voneinander motiviert werden können und prinzipiell unabhängig voneinander eingeführt werden können.

Bemerkungen:

(1) Um die Argumente bei voller Allgemeinheit kurz zu halten, wird im Folgenden grundsätzlich von einer Sprache über der funktional-vollständigen Junktorenmenge $\{\wedge, \rightarrow, \perp\}$ ausgegangen.

(2) Das folgende leicht einsichtige Argument wird in diesem Paragraphen wiederholt verwendet: Wenn $\Gamma \models \phi$, dann $\Delta \cup \Gamma \models \phi$.

7.1 Proposition (Korrektheit): Für jede Ableitung $\mathfrak{D}$ mit Endformel ϕ gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

Beweis. Durch Induktion über dem Aufbau der Ableitung $\mathfrak{D}$.

$\mathfrak{D} \simeq \phi$: Damit ist $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \{\phi\}$ und Endformel von $\mathfrak{D}$ ist ϕ.
Trivialerweise gilt: $\phi \models \phi$.

IV: Angenommen Aussage gilt für Ableitungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$.

$$\mathfrak{D} \simeq \frac{\begin{array}{cc}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \\ \phi & \psi\end{array}}{\phi \wedge \psi}\,(\wedge I) \qquad \text{Damit:}\quad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \cup \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2).$$

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2) \models \psi$.
Damit gilt, da $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_i) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \psi$.
Daraus folgt direkt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \wedge \psi$.

$$\mathfrak{D} \simeq \frac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1 \\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\phi}\,(\wedge E_1) \qquad \text{Damit:}\quad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1).$$

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \models \phi \wedge \psi$.
Mit $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ gilt schon: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \wedge \psi$.
Also auch: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

$$\mathfrak{D} \simeq \frac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1 \\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\psi}\,(\wedge E_2) \qquad \text{Analog!}$$

$$\mathfrak{D} \simeq \frac{\begin{array}{cc}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \\ \phi & \phi \to \psi\end{array}}{\psi}\,(\to E) \qquad \text{Damit:}\quad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \cup \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2).$$

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2) \models \phi \to \psi$.
Damit gilt, da $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_i) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \to \psi$.
Daraus folgt direkt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \psi$.

$$\mathfrak{D} \simeq \dfrac{\begin{matrix}[\phi]^k \\ \mathfrak{D}_1 \\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi}\ (\to I{:}k)$$

Aufgrund der möglichen Löschung kann keine einfache Aussage über die Annahmenmengen getroffen werden. Es sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

(1) Kein Vorkommen von ϕ in bisheriger Ableitung, d.h.
$\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und damit auch: $\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

(2) Ein Vorkommen von ϕ wurde nicht gelöscht, d.h.
$\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und $\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

(3) Alle Vorkommen von ϕ wurden gelöscht, d.h.
$\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und $\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \models \psi$, und damit $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \cup \{\phi\} \models \psi$.

In allen Fällen folgt mit Import-/Export-Theorem: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \to \psi$.

$$\mathfrak{D} \simeq \dfrac{\begin{matrix}[\phi \to \bot]^k \\ \mathfrak{D}_1 \\ \bot\end{matrix}}{\phi}\ (\mathrm{RAA}{:}k)$$

Analog zu oben sind wieder 3 Fälle zu unterscheiden:

(1) $(\phi \to \bot) \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und damit auch: $(\phi \to \bot) \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$,

(2) $(\phi \to \bot) \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und $(\phi \to \bot) \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$,

(3) $(\phi \to \bot) \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und $(\phi \to \bot) \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \models \bot$. Also ist $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ nicht erfüllbar.

In den ersten beiden Fällen gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$.

Damit folgt aus der Unerfüllbarkeit von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ sofort: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

Angenommen, es würde im dritten Fall gelten: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \not\models \phi$.

Dann gäbe es eine Belegung v mit:

$$\text{Für jedes } \psi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \text{ gilt } [\![\psi]\!]_v = 1, \text{ und } [\![\phi]\!]_v = 0.$$

Insbesondere gilt dann auch: $[\![\phi \to \bot]\!]_v = 1$.

Da $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \cup \{\phi \to \bot\}$, wäre eine Belegung gefunden, die $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ erfüllt. Dies wäre ein WIDERSPRUCH zur Unerfüllbarkeit von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$.

Also doch: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

Damit wurden alle möglichen Ableitungen betrachtet, und die Aussage ist gezeigt. Q.E.D.

7.2 Theorem (Korrektheit von NK′): Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ Menge von Aussagen und $\phi \in \mathrm{PROP}$ eine Formel. Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann auch $\Gamma \models \phi$.

Beweis.

Es gelte $\Gamma \vdash \phi$.

Nach Definition der Ableitbarkeit gilt: Es gibt eine Ableitung $\mathfrak{D}$ mit Endformel ϕ, und für die offenen Annahmen $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ gilt $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \Gamma$.

Mit dem Satz zur Korrektheit von Ableitungen gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

Daraus folgt direkt für $\Gamma \supseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$: $\Gamma \models \phi$. Q.E.D.

Bemerkung (Korrektheit): Die Korrektheit des Kalküls NK′ wurde recht schnell und einfach gezeigt. Um nun die Umkehrung der Aussage, also die Vollständigkeit des Kalküls, zeigen zu können, wird noch ein wenig Begrifflichkeit und Theorie benötigt.

7.3 DEF (Konsistenz): Eine (evtl. unendliche) Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ heißt *konsistent*, falls $\Gamma \nvdash \bot$. Andernfalls heißt Γ *inkonsistent*.

7.4 Lemma (Äquivalenzen von Konsistenz): Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ eine Menge von Aussagen. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(1) Γ ist konsistent.

(2) Es gibt keine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$, so dass: $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \phi \to \bot$.

(3) Es gibt $\phi \in \mathrm{PROP}$ mit: $\Gamma \nvdash \phi$.

Beweis. Der Beweis verbleibt als leichte Übung. Q.E.D.

7.5 Lemma (Konsistenz erfüllbarer Mengen): Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ eine Menge von Aussagen. Gibt es eine Belegung v, so dass für jedes $\psi \in \Gamma$ gilt: $[\![\psi]\!]_v = 1$, dann ist Γ konsistent.

Beweis.

Sei v eine Belegung, so dass für jedes $\psi \in \Gamma$ gilt: $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Angenommen Γ ist inkonsistent.

Dann gibt es eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$, so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \phi \to \bot$.

Damit gilt mit der Korrektheit des Kalküls: $\Gamma \models \phi$ und $\Gamma \models \phi \to \bot$.

Damit muss nach der Definition der Folgerung für die gewählte Belegung v gelten:

$$[\![\phi]\!]_v = 1 \quad \text{und} \quad [\![\phi \to \bot]\!]_v = 1$$

WIDERSPRUCH zur Definition von Bewertungen. Also ist Γ doch konsistent.

Q.E.D.

7.6 DEF (maximal-konsistent): Eine Menge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ heißt *maximal-konsistent*, falls Γ konsistent ist und für jede konsistente Obermenge $\Gamma' \supseteq \Gamma$ gilt, dass $\Gamma' = \Gamma$. (Das bedeutet, dass Γ keine echte konsistente Erweiterung hat.)

Abzählbarkeit von PROP: Der folgende Satz benötigt wesentlich eine Abzählung von PROP. Diese kann z.B. wie folgt angegeben werden:

Zunächst wird jedem Zeichen des Alphabets fortlaufend eine natürliche Zahl größer 0 zugeordnet:

α	(	)	$\wedge$	$\rightarrow$	$\perp$	p_0	p_1	...
$N(\alpha)$	1	2	3	4	5	6	7	...

Damit können beliebige Formeln wie folgt kodiert werden:

$$K : \mathrm{PROP} \rightarrow \mathbb{N} : \phi \simeq \alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_n \mapsto \prod_{k=0}^{n} \pi_k^{N(\alpha_k)}$$

Dabei ist π_k die k-te Primzahl.

Aufgrund der eindeutigen Lesbarkeit von Formeln ist diese Kodierung K wohldefiniert und aufgrund der eindeutigen Zerlegbarkeit einer natürlichen Zahl in ihre Primfaktoren injektiv.

Hieraus läßt sich eine Abzählung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathrm{PROP} : n \mapsto \phi_n$ gewinnen.

Genauer: Es läßt sich eine primitiv-rekursive Funktion g angeben, so dass $g(n)$ der Kode für die Formel ϕ_n ist. (Übungsaufgabe!)

7.7 Proposition (Konsistente Erweiterbarkeit): Jede konsistente Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ läßt sich zu einer maximal-konsistenten Menge $\Gamma' \supseteq \Gamma$ erweitern.

Beweis.

Sei Γ konsistente Menge von Aussagen und $\{\phi_k \in \mathrm{PROP} : \ k \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von PROP.

Definiere nun rekursiv eine aufsteigende Folge von Formelmengen:

$\Gamma_0 =_{\mathrm{def}} \Gamma$ und $\Gamma_{n+1} =_{\mathrm{def}} \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \text{falls } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \text{ konsistent} \\ \Gamma_n & \text{sonst} \end{cases}$

Nach Konstruktion ist klar, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass Γ_n konsistent ist.

Setze nun: $\widehat{\Gamma} =_{\mathrm{def}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$.

Es gilt:

(1) $\widehat{\Gamma} \supseteq \Gamma$ ist konsistent: Angenommen nicht. Dann $\widehat{\Gamma} \vdash \perp$. Dann gibt es eine Ableitung $\mathfrak{D}$ mit $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \widehat{\Gamma}$ und Endformel $\perp$. Da $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ endlich ist, gibt es maximales $k \in \mathbb{N}$ mit $\phi_k \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$. Nach Konstruktion gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \Gamma_{k+1}$.

Damit gilt aber: $\Gamma_{k+1} \vdash \perp$. WIDERSPRUCH zur Konsistenz von Γ_k.

Also ist auch $\widehat{\Gamma}$ konsistent.

(2) $\widehat{\Gamma}$ ist maximal: Angenommen nicht, dann gibt es ein $\phi_k \in \mathrm{PROP} \setminus \widehat{\Gamma}$, so dass $\widehat{\Gamma} \cup \{\phi_k\}$ konsistent ist. Damit ist aber auch $\Gamma_k \cup \{\phi_k\}$ konsistent und $\phi_k \in \Gamma_{k+1} \subseteq \Gamma'$. WIDERSPRUCH zur Definition.

Also ist $\widehat{\Gamma}$ maximal-konsistent. Q.E.D.

7.8 Lemma: Sei $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ beliebige Formelmenge. Dann gilt für jede Formel $\phi \in \text{PROP}$:

(1) Ist $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\}$ inkonsistent, dann gilt: $\Gamma \vdash \phi$.

(2) Ist $\Gamma \cup \{\phi\}$ inkonsistent, dann gilt: $\Gamma \vdash \phi \to \bot$.

Beweis.

(1) Sei $\mathfrak{D}$ eine Ableitung für $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\} \vdash \bot$. Durch die weitere Anwendung der Regel (RAA) samt Löschung aller Prämisse $\phi \to \bot$ wird $\mathfrak{D}$ sofort zu einer Ableitung für $\Gamma \vdash \phi$.

(2) Sei $\mathfrak{D}$ eine Ableitung für $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$. Durch die weitere Anwendung der Regel $(\to I)$ samt Löschung aller Prämissen ϕ wird $\mathfrak{D}$ sofort zu einer Ableitung für $\Gamma \vdash \phi \to \bot$. Q.E.D.

7.9 Korollar: Falls $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ maximal-konsistent ist, dann ist Γ unter Ableitbarkeit abgeschlossen. D.h.: Wenn $\Gamma \vdash \phi$ gilt, dann auch $\phi \in \Gamma$.

Beweis.

Es gelte: $\Gamma \vdash \phi$.

Angenommen $\phi \notin \Gamma$. Dann ist aufgrund der Maximalität von Γ die Menge $\Gamma \cup \{\phi\}$ inkonsistent. Damit gilt mit obigem Lemma: $\Gamma \vdash \phi \to \bot$.

Damit $\Gamma \vdash \bot$, d.h. Γ ist inkonsistent. WIDERSPRUCH.

Also doch: $\phi \in \Gamma$. Q.E.D.

7.10 Lemma (Eigenschaften maximal-konsistenter Mengen): Es sei $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ maximal-konsistent. Dann gilt für alle $\phi, \psi \in \text{PROP}$:

(1) Entweder $\phi \in \Gamma$ oder $(\phi \to \bot) \in \Gamma$.

(2) $(\phi \to \psi) \in \Gamma$ genau dann, wenn $\phi \notin \Gamma$ oder $\psi \in \Gamma$.

(3) $(\phi \wedge \psi) \in \Gamma$ genau dann, wenn $\phi \in \Gamma$ und $\psi \in \Gamma$.

Beweis.

(1) Aufgrund der Konsistenz von Γ ist es unmöglich, dass sowohl $\phi \in \Gamma$ als auch $(\phi \to \bot) \in \Gamma$.

Angenommen, $\phi \notin \Gamma$. Aufgrund der Abgeschlossenheit unter Ableitbarkeit gilt dann $\Gamma \nvdash \phi$. Wäre $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\}$ inkonsistent, dann würde nach Lemma 8 gelten: $\Gamma \vdash \phi$. Also ist $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\}$ konsistent.

Aufgrund der Maximalität von Γ gilt: $(\phi \to \bot) \in \Gamma$.

Analog folgt aus $(\phi \to \bot) \notin \Gamma$, dass $\phi \in \Gamma$.

(2) Es sind zwei Richtungen zu zeigen.

"$\Rightarrow$": Es gelte: $\phi \to \psi \in \Gamma$.

Sei $\phi \in \Gamma$. Damit gilt: $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \phi \to \psi$. Damit folgt: $\Gamma \vdash \psi$.

Da Γ maximal-konsistent und damit unter Ableitbarkeit abgeschlossen ist, gilt damit auch: $\psi \in \Gamma$.

"$\Leftarrow$": Es ist zu unterscheiden, ob $\phi \in \Gamma$ oder $\phi \notin \Gamma$.

Falls $\phi \in \Gamma$, dann ist nach Voraussetzung $\psi \in \Gamma$. Damit gilt: $\Gamma \vdash \psi$.

Daraus folgt trivialerweise auch $\Gamma \vdash \phi \to \psi$, und damit: $(\phi \to \psi) \in \Gamma$.

Falls aber $\phi \notin \Gamma$, dann gilt mit (1): $(\phi \to \bot) \in \Gamma$ $(\star)$

Betrachte nun folgende Ableitung $\mathfrak{D}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^1 \qquad \phi \to \bot}{\bot}}{\psi}\,(\mathrm{RAA})}{\phi \to \psi}\,(\to I{:}1)$$

Wegen $(\star)$ gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \{\phi \to \bot\} \subseteq \Gamma$.

Also ist gezeigt: $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ und damit auch $(\phi \to \psi) \in \Gamma$.

(3) Verbleibt als einfache Übung. Q.E.D.

7.11 Lemma (Erfüllbarkeit konsistenter Mengen): Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ konsistent. Dann gibt es eine Belegung v, so dass für jedes $\psi \in \Gamma$ gilt: $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Beweis.

Sei $\widehat{\Gamma} \supseteq \Gamma$ maximal-konsistente Erweiterung von Γ.

Die Belegung v wird definiert durch: $v(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in \widehat{\Gamma} \\ 0 & \text{falls } p \notin \widehat{\Gamma} \end{cases}$

Falls für jedes $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt:

$$[\![\phi]\!]_v = 1 \text{ genau dann, wenn } \phi \in \widehat{\Gamma} \quad (\star)$$

dann ist eine Belegung v gefunden, so dass für jedes $\psi \in \Gamma \subseteq \widehat{\Gamma}$ gilt: $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Zeige also $(\star)$ durch Induktion über dem Aufbau von ϕ:

$\bot$: $[\![\bot]\!]_v = 0$ und $\bot \notin \widehat{\Gamma}$.

p: $[\![p]\!]_v = 1$ genau dann, wenn $v(p) = 1$ genau dann, wenn $p \in \widehat{\Gamma}$.

IV: Die Behauptung gelte für ψ und χ.

$(\psi \to \chi)$: $[\![\psi \to \chi]\!]_v = 1$ genau dann, wenn $[\![\psi]\!]_v = 0$ oder $[\![\chi]\!]_v = 0$
genau dann, wenn $\psi \notin \widehat{\Gamma}$ oder $\chi \in \widehat{\Gamma}$
genau dann, wenn $(\psi \to \chi) \in \widehat{\Gamma}$ nach Lemma 10 (2).

$(\psi \wedge \chi)$: $[\![\psi \wedge \chi]\!]_v = 1$ genau dann, wenn $[\![\psi]\!]_v = 1$ und $[\![\chi]\!]_v = 1$
genau dann, wenn $\psi \in \widehat{\Gamma}$ und $\chi \in \widehat{\Gamma}$
genau dann, wenn $\phi \wedge \psi \in \widehat{\Gamma}$ nach Lemma 10 (3). Q.E.D.

7.12 Korollar: Für ein konsistentes $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ und $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt $\Gamma \nvdash \phi$ genau dann, wenn es eine Belegung v gibt, so dass für jedes $\psi \in \Gamma$ gilt:

$$[\![\psi]\!]_v = 1 \quad \text{und} \quad [\![\phi]\!]_v = 0$$

Beweis. $\Gamma \nvdash \phi$ genau dann, wenn $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\}$ konsistent. Q.E.D.

7.13 Theorem (Vollständigkeit von NK′): Für jede Menge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ und Aussage $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt: Wenn $\Gamma \models \phi$, dann auch $\Gamma \vdash \phi$.

Beweis.

Angenommen, es gelte $\Gamma \nvdash \phi$. Daraus folgt: $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\} \nvdash \bot$.

Damit ist $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\}$ erfüllbar und es gilt: $\Gamma \not\models \phi$. Q.E.D.

7.14 Korollar (Endlichkeitssatz): Falls $\Gamma \models \phi$, dann gibt es endliches $\Gamma' \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma' \models \phi$.

Beweis. Direkte Folge aus der Vollständigkeit von NK′ und der Tatsache, dass für jede Ableitung $\mathfrak{D}$ gilt, dass $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ endlich ist. Q.E.D.

7.15 Korollar (Kompaktheitssatz): $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge $\Gamma' \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.

Beweis.

Es müssen zwei Richtungen gezeigt werden:

"$\Rightarrow$": trivial.

"$\Leftarrow$": Angenommen, Γ sei nicht erfüllbar. Dann ist $\Gamma \models \bot$, und damit, aufgrund der Vollständigkeit von NK′, auch $\Gamma \vdash \bot$. Damit gibt es endlichhes $\Gamma' \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma' \vdash \bot$. Dafür gilt aber: $\Gamma' \models \bot$. Also ist Γ' nicht erfüllbar. WIDERSPRUCH. Also ist Γ doch erfüllbar. Q.E.D.

II Quantorenlogik

Motivation

Im zweiten Teil der Vorlesung wird die Quantorenlogik behandelt – gleichbedeutend zum Begriff *Quantorenlogik* sind die Begriffe *Prädikatenlogik* und *Logik erster Stufe*.

Die Quantorenlogik erweitert die Aussagenlogik, indem sie nicht mehr nur Aussagen als Ganzes analysiert, sondern auch deren innere Struktur betrachtet. Nach einer informellen Motivation, welche dies detailierter ausführt, wird die Quantorenlogik analog zur Aussagenlogik eingeführt: Definition der formalen Sprache, der Semantik und schließlich eines syntaktischen Kalküls. Im Anschluss wird wie schon in der Aussagenlogik die semantische Vollsändigkeit des Kalküls gezeigt.

Informelle Motivation: Die Quantorenlogik unterscheidet sich in folgenden Punkten wesentlich von der Aussagenlogik:

(1) Betrachtung von: Individuen, Funktionen und Relationen

Wir werden (in einer formalen Sprache) über Individuen eines Gegenstandsbereiches (Elemente einer Menge) und Funktionen und Relationen über diesen Bereich reden. Der Bereich zusammen mit den ausgezeichneten Individuen, Funktionen und Relationen wird Struktur genannt.

(2) Verwendung neuer Zeichen im Alphabet:

(a) Logische Zeichen:
Quantoren: $\forall$, $\exists$
Gleichheitsrelation: $\doteq$
Individuenvariablen: $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots$

(b) Nicht-logische Zeichen:
Individuenkonstanten: $\dot a,\ \dot b,\ \dot c,\ \ldots$
Funktionszeichen: $\dot f,\ \dot g,\ \dot h,\ \ldots$ oder $\dot +$
Relationszeichen: $\dot P,\ \dot Q,\ \dot R,\ \ldots$ oder $\dot\leq$

Der Punkt $\dot{}$ über den nicht-logischen Zeichen verweist darauf, dass diese sprachliche Zeichen sind; soll in der Metasprache auf die entsprechenden Objekte (Interpretation der Zeichen) Bezug genommen werden, wird der Punkt weggelassen.

(3) Verwendung von *Termen*: Man benutzt Terme, um in der formalen Sprache über die Individuen des Grundbereiches zu sprechen. Dazu werden Variablen, Individuenkonstanten und Funktionszeichen verwendet.

Beispiele: $\dot f(x_0, \dot a, \dot b)$, $(\dot a \dot + x_1)$, $\dot g(\dot a, x_0, \dot f(x_1, \ldots b, x_0))$

(4) Verwendung von *Formeln*: Durch Formeln werden Aussagen aufgestellt. Diese können (im Gegensatz zu Termen) wahr oder falsch sein, verweisen also auf Wahrheit bzw. Falschheit.

Beispiele: $\exists x_0\,(x_0 \dot\leq f(x_0 \dot + x_0))$, $\forall x_0 \forall x_1\,((x_0 \dot\leq x_1) \vee (x_1 \dot\leq x_0))$

§8 Sprache der Prädikatenlogik

In diesem Abschnit werden formale Sprachen eingeführt. Diese Sprachen werden mit $\mathfrak{L}$ bezeichnet. Die einzelnen Sprachen, die hier definiert werden sollen, unterscheiden sich darin, welche nicht-logischen Zeichen zur Verfügung stehen.

Deshalb werden zur Definition einer formalen Sprache $\mathfrak{L}$ drei (möglicherweise leere) Index-Mengen I, K, L benötigt, die paarweise disjunkt sind. Diese Mengen legen fest, wieviele und welche Individuenkonstanten, Funktions- und Relationszeichen in der Sprache vorkommen.

8.1 DEF (Alphabet): Das Alphabet einer formalen Sprache $\mathfrak{L}$ besteht aus den folgenden Zeichen:

Logische Zeichen:

(1) Junktoren: $\rightarrow, \perp$ weiterhin: $\neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow$

(2) Quantoren: $\forall$ (Allquantor) weiterhin: $\exists$ (Existenzquantor)

(3) Individuenvariablen: für jedes $n \in \mathbb{N}$: x_n

(4) Gleichheitszeichen: $=$

Nicht-logische Zeichen (in Klammern metasprachliche Variablen):

(1) Individuenkonstanten: für jedes $i \in I$: $\dot{c}_i$ ($\dot{a}$, $\dot{b}$, ...)

(2) Funktionszeichen: für jedes $k \in K$: $\dot{f}_k$ ($\dot{f}$, $\dot{g}$, ...)

(3) Relationszeichen: für jedes $l \in L$: $\dot{R}_l$ ($\dot{P}$, $\dot{Q}$, ...)

Hilfszeichen:

(1) Klammerpaar: (,)

(2) Komma: ,

Bemerkungen:

(1) Später wird gezeigt, dass der Existenquantor durch den Allquantor ausgedrückt werden kann. Entsprechend würde hier zur Sprachdefinition der Allquantor $\forall$ zusammen mit den Junktoren $\perp$ und $\rightarrow$ genügen.

(2) $\text{VAR} =_{\text{def}} \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge der Individuenvariablen.

(3) Die nicht-logischen Zeichen wurden mit einem kleinen Punkt notiert. Dies dient zur Unterscheidung der nicht-logischen Zeichen von den Objekten, auf die diese Zeichen später verweisen werden. Ist es aus dem Kontext heraus unverwechselbar klar, dass Zeichen gemeint sind, werden die Punkte gelegentlich weggelassen.

Im nächsten Schritt muss festgelegt werden, welche Stelligkeit die Funktions- und Relationszeichen haben. Es wird also festgelegt, wieviele Argumente die Funktions- und Relationszeichen haben.

8.2 DEF (Stelligkeit und Signatur): Die beiden Abbildungen

$$\sigma : K \to \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \tau : L \to \mathbb{N}$$

legen die Stelligkeit der Funktions- und Relationszeichen fest. Dabei hat das Funktionszeichen $\dot{f}_k$ die Stelligkeit $\sigma(k)$ und das Relationszeichen $\dot{R}_l$ die Stelligkeit $\tau(l)$. Das Tupel $\langle I,\, \sigma,\, \tau \rangle$ wird *Signatur* von $\mathfrak{L}$ genannt.

Bemerkung: In Abhängigkeit der Mengen I, K, L und der beiden Funktionen σ und τ wurde tatsächlich eine ganze Klasse von formalen Sprachen eingeführt. Diese Klassen können einfach durch die Signatur unterschieden werden, in der alle wesentlichen strukturellen Informationen über eine Sprache $\mathfrak{L}$ zusammengefaßt sind.

Beispiel (Sprache der Gruppentheorie): Wir illustrieren und motivieren am Beispiel der Gruppentheorie die Definitionen dieses Abschnittes.

(1) Zur Erinnerung: Eine Gruppe besteht aus einer Grundmenge G, einer zweistelligen Verknüpfung, etwa der Addition, und einem neutralem Element. Um über Gruppen reden zu können, wird in der Sprache $\mathfrak{L}_G$ der Gruppentheorie eine Individuenkonstante und ein zweistelliges Funktionszeichen benötigt. Es werden keine Relationszeichen benötigt. Wir definieren also:

$$I =_{\text{def}} \{0\},\ K =_{\text{def}} \{+\} \quad \text{und} \quad L =_{\text{def}} \varnothing$$

I, K und L sind paarweise disjunkt. Damit stehen $\dot{c}_0$ und $\dot{f}_+$ als nichtlogische Zeichen im Alphabet von $\mathfrak{L}_G$ zur Verfügung.

Durch die Festlegung $\sigma(+) =_{\text{def}} 2$ ist σ auf ganz K definiert. Da $L = \varnothing$ gilt, ist τ trivial gegeben.

Damit ist $\dot{f}_+$ ein zweistelliges Funktionszeichen und die Signatur von $\mathfrak{L}_G$ ist durch $\langle I,\, \sigma,\, \tau \rangle$ bestimmt.

(2) Wir erweitern die Sprache $\mathfrak{L}_G$ zu einer reicheren Sprache $\mathfrak{L}_{G'}$:

$$I' =_{\text{def}} I,\ K' =_{\text{def}} \{+, -\} \quad \text{und} \quad L' =_{\text{def}} \{\leq\}$$

Zusätzlich soll gelten:

$$\sigma(-) =_{\text{def}} 1 \quad \text{und} \quad \tau(\leq) =_{\text{def}} 2$$

Damit stehen in der Sprache $\mathfrak{L}_{G'}$ zusätzlich ein einstelliges Funktionszeichen $\dot{f}_-$ und ein zweistelliges Relationszeichen $\dot{R}_\leq$ zur Verfügung.

Bemerkung (Schreiberleichterung): Sind die Stelligkeiten der Funktions- und Relationszeichen aus dem Kontext klar, kann man die Signatur auch einfach durch Auflistung der Zeichenmengen angeben, z.B. im Beispiel (1) durch das Tupel $\langle\, \{+\}, \varnothing, \{0\}\, \rangle$ und im Beispiel (2) durch das Tupel $\langle\, \{+, -\}, \{\leq\}, \{0\}\, \rangle$.

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Signatur für eine Sprache $\mathfrak{L}$ fest gegeben ist, und definieren in Abhängigkeit von der Signatur rekursiv die Terme und Formeln von $\mathfrak{L}$. Ziel ist es, später mit den Termen über Individuen sprechen zu können, mit Fomeln über Wahrheit.

8.3 DEF (Terme): Die Menge TERM aller Terme von $\mathfrak{L}$ ist durch folgende induktive Definition erklärt:

(1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n \in$ TERM.

(2) Für jedes $i \in I$ ist $\dot{c}_i \in$ TERM.

(3) Wenn für $k \in K$ gilt, dass jeder $t_1, \ldots, t_{\sigma(k)} \in$ TERM, dann ist auch $\dot{f}_k(t_1, \ldots, t_{\sigma(k)}) \in$ TERM.

Das Zeichen $\simeq$ wird auch für die syntaktische Gleichheit von Termen verwendet.

Beispiel (Terme):

(1) Folgende Terme gehören etwa zur Sprache $\mathfrak{L}_G$ (und damit auch zu $\mathfrak{L}_{G'}$):

$$\dot{c}_0, \quad x_5, \quad \dot{f}_+(x_1, \dot{c}_0)$$

(2) Wir erlauben zur Lese-Erleichterung eine informelle Notation der Terme. Wir schreiben 0 statt $\dot{c}_0$ und + für $\dot{f}_+$ und notieren zusätzlich Funktionsausdrücke infix. Also sind auch folgende Zeichenreihen Terme:

$$\dot{0}, \quad (\dot{0} \dot{+} x_4) \dot{+} x_3$$

(3) Das einstellige Funktionszeichen $\dot{f}_-$ von $\mathfrak{L}_{G'}$ wird zur Lese-Erleichterung durch einen Strich über dem Argument notiert. Damit gibt es zusätzlich in der Sprache $\mathfrak{L}_{G'}$ etwa folgende Terme:

$$\overline{\overline{\dot{0}}}, \quad \overline{(x_1 \dot{+} \overline{x_2}) \dot{+} \dot{0}}$$

Mithilfe der Terme können nun die Formeln der Sprache $\mathfrak{L}$ rekursiv eingeführt werden. Formeln verweisen auf Wahrheit bzw. Falschheit. In der Definition wird die Sprache $\mathfrak{L}$ mit der Menge aller Formeln dieser Sprache identifiziert. Mit $|\,\mathfrak{L}\,|$ bezeichnen wir die Kardinalität (Größe) der Sprache $\mathfrak{L}$. Haben wir höchstens abzählbar viele nichtlogische Zeichen, dann ist auch $\mathfrak{L}$ abzählbar.

8.4 DEF (Formeln): Die Menge $\mathfrak{L}$ aller Formeln der Sprache $\mathfrak{L}$ ist durch folgende induktive Definition erklärt:

(1) Wenn für $l \in L$ gilt, dass $t_1, \ldots, t_{\tau(l)} \in$ TERM, dann $\dot{R}_l(t_1, \ldots t_{\tau(l)}) \in \mathfrak{L}$.

(2) Wenn $t, s \in$ TERM, dann $(t \doteq s) \in \mathfrak{L}$.

(3) $\bot \in \mathfrak{L}$.

(4) Wenn $\phi \in \mathfrak{L}$, dann auch $\neg\phi \in \mathfrak{L}$.

(5) Wenn $\phi \in \mathfrak{L}$ und $\psi \in \mathfrak{L}$, dann auch $(\phi \circ \psi) \in \mathfrak{L}$.

(6) Wenn $x \in$ VAR und $\phi \in \mathfrak{L}$, dann auch $(\forall x \phi) \in \mathfrak{L}$ und $(\exists x \phi) \in \mathfrak{L}$.

Formeln, die aufgrund der Regeln (1) bis (3) zu $\mathfrak{L}$ gehören, werden *atomare Formeln* oder auch *Atome* genannt; mit ATM $\subset \mathfrak{L}$ wird die Menge aller atomaren Formeln bezeichnet. Möchte man hervorheben, zu welcher Sprache Formeln gehören, spricht man auch von $\mathfrak{L}$-Formeln.

Konvention (Notation):

(1) Analog zur Aussagenlogik verwenden wir auch in der Quantorenlogik Konventionen zur Klammerersparnis.

Neu hinzu kommt, dass Quantoren stärker binden als Junktoren.

(2) Wie schon bei den Funktionszeichen werden wir auch gebräuchliche Relationszeichen (etwa $\leq$) verwenden und, falls diese zweistellig sind, sie auch infix notieren. Etwa: $(\dot{0} \mathrel{\dot{\leq}} x_0)$ für $\dot{\leq}(\dot{0}, x_0)$.

Dabei gilt, dass Relationszeichen stärker binden als Junktoren und Quantoren.

(3) Zuletzt wird üblicherweise darauf verzichtet, Konstanten-, Funktions-, und Relationssymbole ausdrücklich mit einem Punkt zu markieren. Mit dieser Konvention wird die eingangs eigens eingeführte ausdrückliche Unterscheidung von Symbolen der Objektsprache und Gegenständen der Metasprache für Terme und auch für Atomformeln gleich wieder abgeschafft.

Hinweis: Dies ist im Grunde eine äußerst fragwürdige Konvention. In der Praxis ergibt sich das Weglassen der Punkte aber leider schnell von selbst.

Beispiel (Formeln): Einige Formeln der (erweiterten) Gruppentheorie:

- Schreibe $\forall x_0(x_0 + 0 = x_0)$ für $(\forall x_0\, (\dot{+}(x_0, \dot{0}) \doteq x_0))$.
- Schreibe $\neg\forall x_1 \forall x_2(x_1 + x_2 = 0)$ für $\neg(\forall x_1(\forall x_2(\dot{+}(x_1, x_2) \doteq \dot{0})))$.
- Schreibe $\forall x_0(\overline{x_0 + 0} \leq \overline{x_0} + \overline{0})$ für $\forall x_0 \dot{\leq}(\dot{-}(\dot{+}(x_0, \dot{0})), \dot{+}(\dot{-}(x_0), \dot{-}(\dot{0})))$.

Weiterführende Bemerkungen:

(1) Weitere Begriffe: Wie schon in der Aussagenlogik können Begriffe wie *Gliederungsbaum* und *Rang einer Formel* für die Quantorenlogik rekursiv definiert werden.

(2) Induktion: Analog zur Induktion in der Aussagenlogik werden in der Prädikatenlogik Behauptungen über Formeln durch Induktion gezeigt.

Oft ist es aufgrund der komplexeren Definition der Sprache notwendig, zunächst eine Induktion über die Terme und dann erst eine Induktion über die Formeln durchzuführen.

(3) Definitionen: Rekursive Definitionen über dem Bereich der Terme und dem Bereich der Formeln sind analog zur Aussagenlogik möglich.

Freie und gebundene Variablen: In der Prädikatenlogik wird das Konzept der freien und gebundenen Variablen benötigt. Dabei wird das Vorkommen einer Variable x in einer Formel ϕ als gebunden bezeichnet, falls x im Wirkungsbereich eines Quantors vorkommt.

Dabei steht x im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall x$ bzw. $\exists x$, falls in der Teilformel ψ, vor die der Quantor gestellt wurde (also $\forall x\psi \preceq \phi$ bzw. $\exists x\psi \preceq \phi$), die Variable x ungebunden vorkommt. Dieses Vorkommen von ψ in der Formel ϕ wird der Wirkungsbereich des Quantors genannt. Variablen, die in ϕ vorkommen, ohne gebunden zu werden, nennt man frei.

Das Konzept der freien und gebundenen Variablen wird in den folgenden Definitionen präzisiert. In einem ersten Schritt werden die freien Variablen eines Termes definiert, um dann mit diesem Begriff die freien Variablen einer Formel definieren zu können.

8.5 DEF (Freie Variablen eines Terms): Die Menge $\mathrm{FV}(t)$ der *freien Variablen eines Terms* $t \in \mathrm{TERM}$ ist wie folgt rekursiv definiert:

(1) Wenn $t \simeq x$ für $x \in \mathrm{VAR}$, dann $\mathrm{FV}(t) =_{\mathrm{def}} \{x\}$

(2) Wenn $t \simeq \dot{c}_i$ für $i \in I$, dann $\mathrm{FV}(t) =_{\mathrm{def}} \varnothing$

(3) Wenn $t \simeq \dot{f}(t_1, \ldots, t_n)$ mit $t_1, \ldots t_n \in \mathrm{TERM}$, so $\mathrm{FV}(t) =_{\mathrm{def}} \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{FV}(t_k)$.

Eine Variable x *kommt frei in einem Term t vor*, falls $x \in \mathrm{FV}(t)$.

8.6 DEF (Freie Variablen einer Formel): Die Menge $\mathrm{FV}(\phi)$ der *freien Variablen einer Formel* $\phi \in \mathfrak{L}$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von Formeln definiert:

(1) Wenn $\phi \simeq \dot{P}(t_1, \ldots, t_n)$ für Terme $t_1, \ldots, t_n$, dann $\mathrm{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{FV}(t_k)$.

(2) Wenn $\phi \simeq (t \doteq s)$ für Terme t, s, dann $\mathrm{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathrm{FV}(t) \cup \mathrm{FV}(s)$.

(3) Wenn $\phi \simeq \bot$, dann $\mathrm{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \varnothing$.

(4) Wenn $\phi \simeq \neg\psi$, dann $\mathrm{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathrm{FV}(\psi)$.

(5) Wenn $\phi \simeq (\psi \circ \chi)$ für Formeln ψ, χ, dann $\mathrm{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathrm{FV}(\psi) \cup \mathrm{FV}(\chi)$.

(6) Wenn $\phi \simeq \forall x\psi$ oder $\phi \simeq \exists x\psi$ für eine Variable x und Formel ψ, dann $\mathrm{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathrm{FV}(\psi) \backslash \{x\}$.

Eine Variable x *kommt frei in einer Formel ϕ vor*, falls $x \in \mathrm{FV}(\phi)$.

Dem Begriff der freien Variablen wird der Begriff der gebundenen Variablen entgegengesetzt. Da in Termen keine Quantoren vorkommen können, muss in der Definition lediglich auf den Formelaufbau zurückgegriffen werden.

8.7 DEF (Gebundene Variablen einer Formel): Die Menge $\mathrm{BV}(\phi)$ der *gebundenen Variablen einer Formel* $\phi \in \mathfrak{L}$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von Formeln definiert:

(1) Wenn ϕ atomar, dann $\mathrm{BV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \varnothing$.

(2) Wenn $\phi \doteq \neg\psi$, dann $\mathrm{BV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathrm{BV}(\psi)$.

(3) Wenn $\phi \doteq \psi \circ \chi$ für Formeln ψ und χ, dann $\mathrm{BV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathrm{BV}(\psi) \cup \mathrm{BV}(\chi)$.

(4) Wenn $\phi \doteq \forall x\psi$ oder $\phi \doteq \exists x\psi$ für eine Variable x und Formel ψ mit $x \in \mathrm{FV}(\psi)$, dann $\mathrm{BV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathrm{BV}(\psi) \cup \{x\}$.

Eine Variable x *kommt gebunden in einer Formel ϕ vor*, falls $x \in \mathrm{BV}(\phi)$.

Beispiel (Gebundene und freie Variablen): Einige Beispiele aus der Sprache $\mathfrak{L}_G$ sollen die Definitionen illustrieren:

- $\mathrm{FV}(\dot{c}_0) = \mathrm{FV}(0) = \varnothing$
- $\mathrm{FV}(\, x_1 + 0\,) = \{x_1\}$
- Für $\phi \doteq \forall x(x + y = y + x)$ ist: $\mathrm{FV}(\phi) = \{y\}$ und $\mathrm{BV}(\phi) = \{x\}$.
- Für $\phi \doteq \forall x \forall y(x + y = y + x)$ ist: $\mathrm{FV}(\phi) = \varnothing$ und $\mathrm{BV}(\phi) = \{x, y\}$.
- Für $\phi \doteq \forall x(x + y = 0) \wedge \forall y(x + y = 0)$ ist:
  $\mathrm{FV}(\phi) = \{x, y\}$ und $\mathrm{BV}(\phi) = \{x, y\}$.

Mithilfe der freien Variablen wird in der Prädikatenlogik (im Gegensatz zur Aussagenlogik) zwischen Aussagen und Formeln unterschieden.

8.8 DEF (geschlossen/offen):

(1) Ein Term $t \in \mathrm{TERM}$ heißt *geschlossen*, falls keine freien Variablen darin vorkommen ($\mathrm{FV}(t) = \varnothing$).

$\mathrm{TERM}_c =_{\mathrm{def}} \{t : t \text{ geschlossen}\} \subset \mathrm{TERM}$.

(2) Eine Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ heißt *geschlossen*, falls keine freien Variablen darin vorkommen ($\mathrm{FV}(\phi) = \varnothing$). Eine geschlossene Formel heißt auch *Aussage*.

$\mathrm{SENT} =_{\mathrm{def}} \{\phi : \phi \text{ geschlossen}\} \subset \mathfrak{L}$

(3) Terme oder Formeln, die nicht geschlossen sind (also freie Variablen enthalten), heißen *offen*.

§9 Semantik

Nachdem im letzten Abschnitt formale Sprachen $\mathfrak{L}$ eingeführt wurden, kann nun die Bedeutung der Sprachen definiert werden. Während in der Aussagenlogik dafür im Wesentlichen nur die Bewertung aller Formeln benötigt wurde, gestaltet es sich in der Quantorenlogik aufwendiger.

Zunächst muss der Strukturbegriff eingeführt werden. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um eine Menge, in der die nichtlogischen Zeichen von $\mathfrak{L}$ interpretiert werden. Anschließend werden Belegungen von Variablen definiert. Damit können dann Terme zu Individuen und Formeln zu Wahrheitswerten ausgewertet werden. Die Gültigkeit von Formeln wird dann über die Auswertung von Formeln definiert.

Im Folgenden wird wieder – solange nicht anders gesagt – eine Sprache $\mathfrak{L}$ mit Signatur $\langle I, \sigma, \tau \rangle$ vorausgesetzt.

9.1 DEF (Struktur): Das geordnete Paar $\langle A, \Omega \rangle$ heißt $\mathfrak{L}$-Struktur, falls $A \neq \varnothing$ eine nichtleere Menge und Ω eine Abbildung auf ganz $I \,\dot\cup\, K \,\dot\cup\, L$ ist, so dass folgendes gilt:

(1) Für jedes $i \in I$ ist $c_i =_{\text{def}} \Omega(i) \in A$ ein Element von A.

(2) Für jedes $k \in K$ ist $f_k =_{\text{def}} \Omega(k)$ eine $\sigma(k)$-stellige Funktion.
Also: $f_k : A^{\sigma(k)} \to A$.

(3) Für jedes $l \in L$ ist $R_l =_{\text{def}} \Omega(l)$ eine $\tau(l)$-stellige Relation.
Also: $R_l \subseteq A^{\tau(l)}$.

Bemerkungen:

(1) Strukturen werden druch Frakturbuchstaben dargestellt: $\mathfrak{A} =_{\text{def}} \langle A, \Omega \rangle$.

(2) Die Abbildung Ω ist wohldefiniert (funktional), da die Mengen I, K, L paarweise disjunkt sind.

(3) Die Menge A wird *Grundbereich*, *Grundmenge*, *Trägermenge*, *Individuenbereich* oder auch *Universum* genannt.

Für das Universum einer Struktur $\mathfrak{A}$ schreibt man auch $|\mathfrak{A}|$, um den Bezug zur zugrundeliegenden Struktur zu verdeutlichen.

(4) DIe Abbildung Ω legt fest, durch welche Objekte die sprachlichen Zeichen interpretiert werden. Die Bilder von Ω werden *Interpretation der nichtlogischen Zeichen unter* Ω oder auch *ausgezeichnete Objekte* genannt.

Wir verwenden manchmal die Schreibweise $\zeta^{\mathfrak{A}}$ um die Interpretation eines nicht-logischen Zeichens ζ in der Struktur $\mathfrak{A}$ zu bezeichnen.

(5) Häufig notieren wir in Strukturen die ausgezeichneten Objekte anstatt der Abbildung Ω und geben so Ω implizit an.

Wir schreiben also: $\big\langle A, \langle c_i \rangle_{i \in I}, \langle f_k \rangle_{k \in K}, \langle R_l \rangle_{l \in L} \big\rangle$.

Bemerkung (Signatur): Die Signatur der Sprache $\mathfrak{L}$ läßt sich auch anhand einer $\mathfrak{L}$-Struktur feststellen. Jeder Konstanten entspricht ein ausgezeichnetes Element, jedem Funktions- und Relationszeichen eine Funktion bzw. eine Relation gleicher Stellenzahl. Entsprechend werden wir auch von der Signatur einer $\mathfrak{L}$-Struktur sprechen. Verschiedene $\mathfrak{L}$-Strukturen zu einer Sprache $\mathfrak{L}$ sind sich aufgrund ihrer gemeinsamen Signatur ähnlich. Entsprechend wird die Signatur einer $\mathfrak{L}$-Struktur als *Ähnlickeitstyp* bezeichnet. Diese kann als abstraktes Objekt aufgefaßt werden, das beschreibt, was allen $\mathfrak{L}$-Strukturen gemeinsam ist.

Beispiel (Strukturen): Es werden Beispiele für Strukturen zur Sprache $\mathfrak{L}_G$ und $\mathfrak{L}_{G'}$ angegeben:

(1) Die additive Gruppe der Ganzen Zahlen $\mathfrak{Z} =_{\text{def}} \langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ ist zusammen mit dem ausgezeichnetem Element $0 \in \mathbb{Z}$ und der Addition in $\mathbb{Z}$ eine $\mathfrak{L}_G$-Struktur.

Zeichnet man zusätzlich die Abbildung $- : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto -x$ und die zweistellige Relation $\leq$ aus, erhält man mit $\mathfrak{Z}' =_{\text{def}} \langle \mathbb{Z}, 0, +, -, \leq \rangle$ eine $\mathfrak{L}_{G'}$-Struktur zur reicheren Sprache $\mathfrak{L}_{G'}$.

Detailiert und formal korrekt:

Für $\mathfrak{Z}$:

$$A =_{\text{def}} \mathbb{Z}$$
$$\Omega(0) =_{\text{def}} 0$$
$$\Omega(+) =_{\text{def}} f_+ : A \times A \to A : (x, y) \mapsto x + y$$

Und für $\mathfrak{Z}'$ zusäzlich:

$$\Omega(-) =_{\text{def}} f_- : A \to A : x \mapsto -x$$
$$\Omega(\leq) =_{\text{def}} \{(x, y) : \ x \leq y\} \subset A^2$$

Es ist zu beachten, dass Ω als Argument uninterpretierte Elemente aus den einzelnen Index-Mengen hat und als Bild uns bekannte Elemente, Funktionen und Relationen, die wir hier lediglich gleich notieren.

(2) Die Einheitengruppe der Ganzen Zahlen $\mathfrak{E} =_{\text{def}} \langle \{\pm 1\}, \cdot, 1 \rangle$ ist zusammen mit dem ausgezeichnetem Element 1 und der gewohnten Multiplikation eine $\mathfrak{L}_G$-Struktur.

(3) $\mathfrak{L}_G$-Strukturen müssen keine Gruppen sein. Die Interpretationen der nichtlogischen Zeichen können auch ganz „wild“ gewählt werden. Sie müssen lediglich zur Signatur passen. Etwa:

Als Universum die natürlichen Zahlen: $A =_{\text{def}} \mathbb{N}$

Für das 0-Zeichen die $5 \in \mathbb{N}$: $\Omega(0) =_{\text{def}} 5$

Für das +-Zeichen die Minimumsfunktion:

$\Omega(+) =_{\text{def}} f_+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \mapsto \min(x, y)$

Das Tupel $\mathfrak{W} =_{\text{def}} \langle A, \Omega \rangle$ ist eine $\mathfrak{L}_G$-Struktur.

Bisher sind die Bedeutungen der Namens- und Funktionszeichen definiert worden. Die Bedeutung der Variablen wird durch *Belegungen* festgelegt.

Im Folgenden sei eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ zur Signatur $\langle I, \sigma, \tau \rangle$ gegeben.

9.2 DEF (Belegung):

(1) Eine Abbildung
$$v : \mathrm{VAR} \to A$$
heißt *Belegung der Individuenvariablen in* $\mathfrak{A}$.

(2) Für $a \in A$ und eine Variable $x \in \mathrm{VAR}$ ist $v[x \mapsto a]$ die Belegung w mit:
$$w(y) = \begin{cases} a & \text{falls } y \doteq x \\ v(y) & \text{falls } y \not\doteq x \end{cases}$$
$v[x \mapsto a]$ heißt *Variante* (oder genauer x-*Variante*) von v.

Bemerkungen:

(1) Nachdem die Bedeutungen der nicht-logischen Zeichen und der Variablen festgelegt sind, können die Terme und Formeln ausgewertet werden. Das bedeutet: Man bestimmt diejenigen Individuen, auf die Terme verweisen, und den Wahrheitswert von Formeln.

(2) Die Auswertungen erfolgen immer in Abhängigkeit von einer Belegung in einer vorgegebenen Struktur. Damit spielen Strukturen und Belegungen in der Quantorenlogik eine ähnliche Rolle wie Wahrheitswertzuordnungen in der Aussagenlogik.

9.3 DEF (Auswertung von Termen): Sei $v : \mathrm{VAR} \to A$ eine Belegung der Variablen in $\mathfrak{A}$. Die Auswertung von Termen ist eine Abbildung
$$[\![\cdot]\!]^{\mathfrak{A}}_v : \mathrm{TERM} \to A$$
die wie folgt über den Aufbau von Termen definiert ist:

(1) $[\![x_n]\!]^{\mathfrak{A}}_v =_{\text{def}} v(x_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

(2) $[\![\dot{c}_i]\!]^{\mathfrak{A}}_v =_{\text{def}} c_i$ für jedes $i \in I$

(3) $[\![\dot{f}_k(t_1, \ldots t_{\sigma(k)})]\!]^{\mathfrak{A}}_v =_{\text{def}} f_k([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_v, \ldots [\![t_{\sigma(k)}]\!]^{\mathfrak{A}}_v)$ für jedes $k \in K$

Bemerkungen:

(1) Durch die Definition ist intendiert, dass die jeweiligen Zeichen durch die zugehörige Interpretation in der Struktur ausgewertet werden.

(2) Man beachte, dass innerhalb der Semantik-Klammern Zeichen des Alphabets stehen (angedeutet durch den Punkt über dem jeweiligen Zeichen), rechts des Gleichheitszeichens jedoch von den ausgezeichneten Objekten und Funktionen der Struktur gesprochen wird.

Beispiel (Terme in der Gruppentheorie): Es werden einige Terme in der $\mathfrak{L}_{G'}$-Struktur $\mathfrak{Z}' = \langle \mathbb{Z}, 0, +, -, \leq \rangle$ unter der Belegung $v : \mathrm{VAR} \to \mathbb{Z} : x_n \mapsto n$ schrittweise ausgewertet:

$$\begin{array}{llcl}
(1) & [\![\dot{f}_+(\dot{c}_0, \dot{c}_0)]\!]_v^{\mathfrak{Z}'} & = & f_+\big([\![\dot{c}_0]\!]_v^{\mathfrak{Z}'}, [\![\dot{c}_0]\!]_v^{\mathfrak{Z}'}\big) \\
 & & = & [\![\dot{c}_0]\!]_v^{\mathfrak{Z}'} + [\![\dot{c}_0]\!]_v^{\mathfrak{Z}'} \\
 & & = & 0 + 0 \\
 & & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
(2) & [\![\dot{f}_-(x_1)]\!]_v^{\mathfrak{Z}'} & = & f_-\big([\![x_1]\!]_v^{\mathfrak{Z}'}\big) \\
 & & = & -[\![x_1]\!]_v^{\mathfrak{Z}'} \\
 & & = & -v(x_1) \\
 & & = & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
(3) & [\![\overline{(x_2 \dot{+} \overline{x_3})}]\!] & = & -[\![(x_2 \dot{+} \overline{x_3})]\!] \\
 & & = & -([\![x_2]\!] + [\![\overline{x}_3]\!]) \\
 & & = & -([\![x_2]\!] + (-[\![x_3]\!])) \\
 & & = & -(v(x_2) + (-v(x_3))) \\
 & & = & -(2 + (-3)) \\
 & & = & -(-1) \\
 & & = & 1
\end{array}$$

Bemerkung (Notation): Die ersten beiden Beispiele wurden formal korrekt aufgeschrieben. Für das letzte Beispiel wurde zur Schreiberleichterung die Angabe der Abhängigkeiten der Auswertungsfunktion von der Struktur $\mathfrak{Z}'$ und der Belegung v nicht notiert. Ist die Struktur und die Belegung aus dem Kontaxt heraus offensichtlich, so ist diese Schreiberleichterung unproblematisch.

Mithilfe der Auswertung der Terme können nun die Formeln der Sprache $\mathfrak{L}$ ausgewertet werden. Die Auswertung einer Formel ist immer ein Wahrheitswert.

9.4 DEF (Auswertung von Formeln): Sei $v : \mathrm{VAR} \to A$ eine Belegung der Variablen in $\mathfrak{A}$. Die Auswertung von Formeln ist eine Abbildung

$$[\![\cdot]\!]_v^{\mathfrak{A}} : \mathfrak{L} \to \{0, 1\}$$

die wie folgt über den Aufbau von Formeln definiert ist:

(1) $[\![\dot{R}_l(t_1, \dots t_{\tau(l)})]\!]_v^{\mathfrak{A}} =_{\text{def}} \begin{cases} 0 & \text{falls } \big([\![t_1]\!]_v^{\mathfrak{A}}, \dots [\![t_{\tau(l)}]\!]_v^{\mathfrak{A}}\big) \notin R_l \\ 1 & \text{falls } \big([\![t_1]\!]_v^{\mathfrak{A}}, \dots [\![t_{\tau(l)}]\!]_v^{\mathfrak{A}}\big) \in R_l \end{cases}$

(2) $[\![(t_1 \doteq t_2)]\!]_v^{\mathfrak{A}} =_{\text{def}} \begin{cases} 0 & \text{falls } [\![t_1]\!]_v^{\mathfrak{A}} \neq [\![t_2]\!]_v^{\mathfrak{A}} \\ 1 & \text{falls } [\![t_1]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![t_2]\!]_v^{\mathfrak{A}} \end{cases}$

(3) $[\![\bot]\!]_v^{\mathfrak{A}} =_{\text{def}} 0$

(4) $[\![\neg\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} =_{\text{def}} f_\neg\big([\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}}\big)$

(5) $[\![(\phi \circ \psi)]\!]_v^{\mathfrak{A}} =_{\text{def}} f_\circ\big([\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_v^{\mathfrak{A}}\big)$

(6) $[\![(\forall x\, \phi)]\!]_v^{\mathfrak{A}} =_{\text{def}} \min \big\{[\![\phi]\!]_{v[x\mapsto a]}^{\mathfrak{A}} : a \in |\mathfrak{A}|\big\}$

$[\![(\exists x\, \phi)]\!]_v^{\mathfrak{A}} =_{\text{def}} \max \big\{[\![\phi]\!]_{v[x\mapsto a]}^{\mathfrak{A}} : a \in |\mathfrak{A}|\big\}$

Bemerkungen:

(1) Die Auswertung von Formeln funktioniert analog zur Auswertung von Termen. Entsprechend wird das gleiche Symbol verwendet; die Bemerkungen zur Auswertung von Termen gelten analog.

(2) Einstellige Relationen drücken Eigenschaften von Individuen aus. Nullstellige Relationen spielen in der Quantorenlogik die Rolle von Aussagenvariablen.

(3) Klausel (6) führt den Wahrheitswert einer quantifizierten Formel auf den Wahrheitswert einer offenen Formel zurück. Das stellt den wesentlichen Grund für die Einführung von Belegungen dar. Würden wir Variablen nicht mithilfe von Belegungen eine (künstliche) Bedeutung zuweisen, könnten durch All- oder Existenzquantifikation entstehende Formeln nicht interpretiert werden. Selbst dann nicht, wenn sie keine freien Variablen enthalten.

(4) Im Gegensatz zu anderen Ansätzen (vgl. etwa van Dalen) benötigen wir zur Auswertung der Quantoren keine objektsprachlichen Namen für jedes Objekt des Universums und ersparen uns damit die Betrachtung von Spracherweiterungen. (Um etwa eine quantifizierte Aussage in der additiven Gruppe der reellen Zahlen auszuwerten, muss bei diesem Ansatz die die Sprache $\mathfrak{L}_G$ der Gruppentheorie um Namenszeichen für jede reelle Zahl erweitert werden.)

(5) In der Metasprache müssen wir über die Objekte des Universums sprechen und quantifizieren können, um die Quantoren $\forall$ und $\exists$ auswerten zu können. Diese Auswertungen sind für unendliche Strukturen daher nicht effektiv berechenbar.

Das folgende Koinzidenz-Lemma sagt aus, dass zur Auswertung einer Formel eine Belegung nur auf den freien Variablen der Formel betrachtet werden muss. Insbesondere sind damit die Auswertungen von Aussagen ϕ ($\mathrm{FV}(\phi) = \varnothing$) unter allen Belegungen gleich.

9.5 Lemma (Koinzidenz-Lemma): Für alle Terme t und Formeln ϕ von $\mathfrak{L}$ und allen $\mathfrak{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt: Sind v, w zwei Belegungen, die auf den freien Variablen von t bzw. ϕ übereinstimmen, dann gilt schon:

$$[\![t]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![t]\!]_w^{\mathfrak{A}} \quad \text{bzw.} \quad [\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\phi]\!]_w^{\mathfrak{A}}$$

Beweis.

Zunächst wird die Behauptung für Terme gezeigt:

Dies ist für Individuen-Konstanten $\dot{c}$ und Variablen x trivial.

Sei also $t \simeq \dot{f}(t_1, \ldots, t_n)$ für Terme $t_1, \ldots, t_n$ und seien v, w zwei Belegungen, die auf den freien Variablen von t übereinstimmen.

Insbesondere stimmen die Belegungen jeweils auch auf den freien Variablen von $t_1, \ldots, t_n$ überein und damit kann die IV verwendet werden:

$$[\![t]\!]_v^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}([\![t_1]\!]_v^{\mathfrak{A}}, \ldots, [\![t_n]\!]_v^{\mathfrak{A}}) \stackrel{(IV)}{=} f^{\mathfrak{A}}([\![t_1]\!]_w^{\mathfrak{A}}, \ldots, [\![t_n]\!]_w^{\mathfrak{A}}) = [\![t]\!]_w^{\mathfrak{A}}$$

Damit kann man die Behauptung für beliebige Formeln zeigen:

ϕ atomar: Für $\phi \simeq \perp$ trivial. Für $\phi \simeq \dot{P}(t_1, \ldots, t_n)$ oder $\phi \simeq (t \doteq s)$ verwenden wir die analoge Aussage über Terme.

ϕ komplex: Für aussagenlogische Kombinationen ist die Aussage trivial, da die Auswertung funktional ist. Die interessanten Fälle sind $\phi \simeq (\forall x \psi)$ und $\phi \simeq (\exists x \psi)$, da im Allgemeinen nicht gilt: $\mathrm{FV}(\psi) \subseteq \mathrm{FV}(\phi)$.

Seien also v, w zwei Belegungen, die auf $\mathrm{FV}(\phi)$ übereinstimmen, dann ist:

$$[\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_v = \min\left\{[\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x\mapsto a]} : a \in |\mathfrak{A}|\right\} \overset{(\star)}{=} \min\left\{[\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_{w[x\mapsto a]} : a \in |\mathfrak{A}|\right\} = [\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_w$$

$(\star)$ Wir können hier die IV anwenden, da $v[x \mapsto a]$ und $w[x \mapsto a]$ zwei Belegungen sind, die auf $\mathrm{FV}(\phi) \cup \{x\} = \mathrm{FV}(\psi)$ übereinstimmen.

Damit wurde die Behauptung gezeigt. Q.E.D.

Mithilfe der Auswertung kann nun die Gültigkeit von Formeln definiert werden.

9.6 DEF (Gültigkeit in Strukturen): Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel, $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Menge von Formeln, $\mathfrak{A}$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur und v eine Belegung.

(1) ϕ ist in $\mathfrak{A}$ unter v *gültig* genau dann, wenn $[\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_v = 1$.
Schreibe: $\mathfrak{A} \models_v \phi$. Ist dies nicht der Fall, schreibt man auch: $\mathfrak{A} \not\models_v \phi$.

(2) $\mathfrak{A}$ ist ein *Modell* von ϕ genau gann, wenn $\mathfrak{A} \models_v \phi$ für alle Belegungen v.
Schreibe: $\mathfrak{A} \models \phi$. Ist dies nicht der Fall, schreibt man auch: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

(3) $\mathfrak{A}$ ist ein *Modell* von Γ genau dann, wenn für jedes $\phi \in \Gamma$ gilt: $\mathfrak{A} \models \phi$.
Schreibe: $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Ist dies nicht der Fall, schreibt man auch: $\mathfrak{A} \not\models \Gamma$.

Bemerkungen:

(1) Man sagt auch, dass ϕ bzw. Γ in $\mathfrak{A}$ gültig ist (unabhängig von einer konkreten Belegung), wenn $\mathfrak{A}$ ein Modell für ϕ bzw. Γ ist.

(2) ACHTUNG: $\mathfrak{A} \not\models \phi$ bedeutet *nicht*, dass ϕ unter keiner Belegung in $\mathfrak{A}$ gültig ist, sondern dass ϕ nicht unter allen Belegungen in $\mathfrak{A}$ gültig ist! D.h. es kann trotzdem eine Belegung v geben mit $\mathfrak{A} \models_v \phi$. Damit ist durch $\mathfrak{A} \not\models \phi$ im Allgemeinen *nicht* nicht dasselbe ausgedrückt wie durch $\mathfrak{A} \models \neg\phi$.

Alternative Notation (Belegungen):

(1) Wir schreiben statt $\mathfrak{A} \models_v \phi$ auch: $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$, falls folgendes gilt:
$\mathrm{FV}(\phi) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ und $i_1 < \ldots < i_n$ und $v(x_{i_k}) = a_k$.
D.h.: die k-te freie Variable von ϕ wird durch a_k belegt.

(2) Entsprechend verwenden wir die Vektor-Notation: $\mathfrak{A} \models \phi[\vec{a}]$.

Beispiele (Gültigkeit in Strukturen): Wir betrachten die Sprache $\mathfrak{L}_G$ der Gruppentheorie. In den beiden Beispielen sei stets $\phi \doteq_{\text{def}} (x \doteq x \dotplus x) \in \mathfrak{L}_G$.

(1) $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ ist eine $\mathfrak{L}_G$-Struktur.

Sei v eine Belegung mit $v(x) = 0$. Dann ist $[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{Z}} = 1$, denn in $\mathfrak{Z}$ gilt:

$$[\![x]\!]_v^{\mathfrak{Z}} = v(x) = 0 = 0 + 0 = v(x) + v(x) = [\![x]\!]_v^{\mathfrak{Z}} + [\![x]\!]_v^{\mathfrak{Z}} = [\![x \dotplus x]\!]_v^{\mathfrak{Z}}$$

Also: $\mathfrak{Z} \models_v \phi$.

Für eine Belegung w mit $w(x) = 3$ gilt hingegen:

$$[\![x]\!]_v^{\mathfrak{Z}} = v(x) = 3 \neq 3 + 3 = v(x) + v(x) = [\![x]\!]_v^{\mathfrak{Z}} + [\![x]\!]_v^{\mathfrak{Z}} = [\![x \dotplus x]\!]_v^{\mathfrak{Z}}$$

Damit dann: $[\![x \doteq x \dotplus x]\!]_w^{\mathfrak{Z}} = 0$ und $\mathfrak{Z} \not\models_w \phi$.

Aus letzterem folgt wiederum: $\mathfrak{Z} \not\models (x \doteq x \dotplus x)$.

Das bedeutet: Die offene Formel ϕ ist zwar unter der Belegung v in $\mathfrak{Z}$ gültig, insgesamt ist sie aber in der Struktur $\mathfrak{Z}$ nicht gültig. $\mathfrak{Z}$ ist also kein Modell der Formel.

(2) Auch die „wilde“ Strukur $\mathfrak{W} = \langle \mathbb{N}, 5, \min \rangle$ ist eine $\mathfrak{L}_G$-Struktur.

Sei v eine beliebige Belegung. Es ist $[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{W}} = 1$, da in $\mathfrak{W}$ gilt:

$$[\![x]\!]_v^{\mathfrak{W}} = v(x) = \min\{v(x), v(x)\} = \min\{[\![x]\!]_v^{\mathfrak{W}}, [\![x]\!]_v^{\mathfrak{W}}\} = [\![x \dotplus x]\!]_v^{\mathfrak{W}}$$

Damit gilt unter der Belegung v die Formel ϕ in der Struktur $\mathfrak{W}$, in Zeichen: $\mathfrak{W} \models_v \phi$.

Da die Belegung v beliebig gewählt war, gilt $\mathfrak{W} \models_v \phi$ schon für jede Belegung.

Also: $\mathfrak{W} \models (x \doteq x \dotplus x)$.

Das bedeutet: Die offene Formel ϕ ist unter allen Belegungen v in $\mathfrak{Z}$ gültig. $\mathfrak{Z}$ ist daher ein Modell der Formel.

9.7 Theorem: Seien $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ Formeln. Dann gilt für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$:

(1) Wenn $\mathfrak{A} \models \neg\phi$, dann $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

(2) Es ist $\mathfrak{A} \models \phi$ und $\mathfrak{A} \models \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi$.

(3) Wenn $\mathfrak{A} \models \phi$ oder $\mathfrak{A} \models \psi$, dann $\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi$.

(4) Wenn $\mathfrak{A} \models \phi \rightarrow \psi$, dann mit $\mathfrak{A} \models \phi$ auch $\mathfrak{A} \models \psi$.

(5) Wenn $\mathfrak{A} \models \phi \leftrightarrow \psi$, dann $\mathfrak{A} \models \phi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \psi$.

Bemerkung: Nur Teilaussage (2) formuliert eine Beziehung zwischen den Gültigkeitsbehauptungen in beide Richtungen. Für alle anderen Teilaussagen treffen die Umkehrungen aufgrund der Quantifikation über alle Belegungen im Allgemeinen nicht zu!

Beweis.
Wir zeigen exemplarisch (1) und (2). Der Rest verbleibt als Übungsaufgabe.

(1) Es gelte $\mathfrak{A} \models \neg\phi$.
Damit gilt für jede Belegung v: $\mathfrak{A} \models_v \neg\phi$.
Das bedeutet: $[\![\neg\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1$.
Sei v beliebige Belegung.

$$[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1 - [\![\neg\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1 - 1 = 0$$

Es gilt also für diese Belegung v: $\mathfrak{A} \not\models_v \phi$.
Insgesamt gilt also: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.
Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Gegenbeispiel:
Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur zu einer beliebigen Sprache $\mathfrak{L}$, wobei $A = \{0, 1\}$ zweielementig ist, und sei $\phi \mathrel{\hat{=}_{\mathrm{def}}} (x = y) \in \mathfrak{L}$.
Dann gilt: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.
(Für eine Belegung v mit $v(x) = 1 \neq 0 = v(y)$ ist $[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 0$.)
Ebenso gilt aber: $\mathfrak{A} \not\models \neg\phi$.
(Für eine Belegung w mit $w(x) = 0 = w(y)$ ist $[\![\neg\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 0$.)

(2) Es gelte $\mathfrak{A} \models \phi$ und $\mathfrak{A} \models \psi$ für zwei Formeln ϕ und ψ. Damit gilt für jede Belegung v: $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und $\mathfrak{A} \models_v \psi$.
Das bedeutet: $[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\psi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1$. $(\star)$
Sei v eine beliebige Belegung. Dann gilt:

$$[\![\phi \wedge \psi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} \cdot [\![\psi]\!]_v^{\mathfrak{A}} \overset{(\star)}{=} 1 \cdot 1 = 1$$

Das bedeutet: $\mathfrak{A} \models_v \phi \wedge \psi$.
Da v beliebig gewählt war, gilt: $\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi$.
Gilt hingegen $\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi$, dann gilt für eine beliebige Belegung v:

$$[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} \geq [\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} \cdot [\![\psi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\phi \wedge \psi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1$$

Also gilt insbesondere auch $\mathfrak{A} \models \phi$. Analog erhält man auch: $\mathfrak{A} \models \psi$.
Damit wurden beide Richtungen gezeigt. Q.E.D.

9.8 Theorem: Sind ϕ, ψ $\mathfrak{L}$-Aussagen ($\mathrm{FV}(\phi) = \mathrm{FV}(\psi) = \varnothing$), dann gilt zusätzlich auch:

(1) Wenn $\mathfrak{A} \not\models \phi$, dann $\mathfrak{A} \models \neg\phi$.

(3) Wenn $\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi$, dann $\mathfrak{A} \models \phi$ oder $\mathfrak{A} \models \psi$.

(4) Wenn mit $\mathfrak{A} \models \phi$ auch $\mathfrak{A} \models \psi$, dann $\mathfrak{A} \models \phi \rightarrow \psi$.

(5) Wenn $\mathfrak{A} \models \phi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \psi$, dann $\mathfrak{A} \models \phi \leftrightarrow \psi$.

Beweis.

Es wird die erste Behauptung gezeigt, der Rest verbleibt als Übungsaufgabe.

(1) Es gelte: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

Damit gibt es (mindestens) eine Belegung w, so dass: $\mathfrak{A} \not\models_w \phi$.

Also $[\![\phi]\!]_w^{\mathfrak{A}} = 0$. Damit gilt auch: $[\![\neg\phi]\!]_w^{\mathfrak{A}} = 1 - [\![\phi]\!]_w^{\mathfrak{A}} = 1 - 0 = 1$.

Sei v beliebige Belegung.

Da $\mathrm{FV}(\neg\phi) = \mathrm{FV}(\phi) = \varnothing$ folgt mit dem Koinzidenz-Lemma:

$$[\![\neg\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\neg\phi]\!]_w^{\mathfrak{A}} = 1$$

Da v beliebig gewählt, gilt auch: $\mathfrak{A} \models \neg\phi$.

Q.E.D.

9.9 DEF (Allabschluss): Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ Formel, so dass $\mathrm{FV}(\phi) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ mit $i_1 < \ldots < i_n$. Die Aussage $\forall(\phi) \mathrel{\hat{=}}_{\text{def}} \forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n} \phi \in \mathfrak{L}$ heißt dann der *Allabschluss* von ϕ.

9.10 Lemma (Allabschluss): Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine beliebige Formel. In jeder $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \forall(\phi) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathfrak{A} \models \phi.$$

Beweis.

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\forall(\phi) \mathrel{\hat{=}} \forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n} \phi$. Wir schreiben $\vec{x}$ für $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$.

„$\Rightarrow$“ Sei v eine beliebige Belegung. Es gilt $v(\vec{x}) = \vec{b}$ für ein $\vec{b} \in A^n$.

Aus $\mathfrak{A} \models \forall(\phi)$ folgt: $\mathfrak{A} \models_v \forall(\phi)$. Also: $[\![\forall(\phi)]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1$.

Das bedeutet: für alle $\vec{a} \in A^n$: $[\![\phi]\!]_{v[\vec{x} \mapsto \vec{a}]}^{\mathfrak{A}} = 1$.

(n-fache Auswertung des Allquantors.)

Insbesondere gilt damit auch: $[\![\phi]\!]_{v[\vec{x} \mapsto \vec{b}]}^{\mathfrak{A}} = 1$.

„$\Leftarrow$“ Falls $\mathfrak{A} \not\models \forall(\phi)$, dann gibt es Belegung v und ein $\vec{a} \in A^n$ mit $[\![\phi]\!]_{v[\vec{x} \mapsto \vec{a}]}^{\mathfrak{A}} = 0$.

Damit wurde mit $v[\vec{x} \mapsto \vec{a}]$ eine Belegung gefunden, unter der ϕ mit 0 ausgewertet wurde. Damit gilt schon: $\mathfrak{A} \not\models \phi$. Q.E.D.

9.11 DEF (Erfüllbarkeit): Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel.

(1) Eine Formel ϕ heißt *erfüllbar* (*konsistent*), falls es eine Struktur $\mathfrak{A}$ gibt, in der ϕ gültig ist. D.h.: $\mathfrak{A} \models \phi$.

Ansonsten heißt ϕ *unerfüllbar*.

(2) Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ heißt *erfüllbar*, falls es eine Struktur $\mathfrak{A}$ gibt, sodass jede Formel $\phi \in \Gamma$ in $\mathfrak{A}$ gültig ist. D.h.: $\mathfrak{A} \models \phi$ für jedes $\phi \in \Gamma$.

Ansonsten heißt Γ *unerfüllbar*.

§10 Sätze zur Semantik

In diesem Abschnitt werden folgende Themen behandelt: logische Folgerung, Substitution, Tautologien und Pränexe Normalformen.

10.1 DEF (Eigenschaften von Formeln): Es sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel.

- ϕ heißt *allgemeingültig* oder *tautologisch*, falls für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \phi$. (Jede $\mathfrak{L}$-Struktur ist ein Modell von ϕ.) Schreibe: $\models \phi$.
- ϕ heißt *widersprüchlich* oder *kontradiktorisch*, falls $\models \neg\phi$.

Bemerkung: Hingegen heißt $\not\models \phi$ in der Quantorenlogik lediglich, dass es eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gibt mit $\mathfrak{A} \not\models \phi$. Dies ist nicht hinreichend dafür, dass ϕ eine Kontradiktion ist.

10.2 DEF (AL-Form): Eine Formel ϕ hat die *Aussagenlogische-Form* ψ (*AL-Form* ψ), falls ψ eine AL-Formel ist und ϕ durch geeignete Substitution der Aussagevariablen von ψ entsteht. Es gibt also für ψ mit $\mathrm{ATM}(\psi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ prädikatenlogische Formeln $\phi_1, \ldots \phi_n \in \mathfrak{L}$, so dass folgendes gilt:

$$\phi \simeq \psi[\phi_1, \ldots, \phi_n / p_1, \ldots, p_n]$$

Beispiele (AL-Form):

(1) Jede prädikatenlogische Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ hat trivialerweise die AL-Form p_0, da: $\phi \simeq p_0[\phi/p_0]$.

(2) $\forall x(x \doteq x) \to (\exists x(x \doteq x) \to \forall x(x \doteq x))$ hat unter anderem die AL-Form $p_1 \to p_2$ und auch die AL-Form $p_2 \to (p_1 \to p_2)$.

Die AL-Form einer Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ ist nicht eindeutig gegeben!

10.3 Theorem (Permanenz der AL in der PL): Hat eine Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ die AL-Form einer aussagenlogischen Tautologie ψ, dann ist sie (im Sinne der Prädikatenlogik) allgemeingültig.

Beweis (Skizze).

Es gelte für geeignete Formeln: $\phi \simeq \psi[\phi_1, \ldots, \phi_n / p_1, \ldots, p_n]$.

Sei dann $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathfrak{L}$-Struktur und v eine beliebige Belegung der Variablen in $\mathfrak{A}$. Ferner sei w_v eine aussagenlogische Wahrheitswertzuordnung, die wie folgt definiert ist: $w_v(p_k) =_{\mathrm{def}} [\![\phi_k]\!]_v^{\mathfrak{A}}$ für $1 \leq k \leq n$.

Mit einer leichten Induktion läßt sich zeigen: $[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\psi]\!]_{w_v} = 1$

Da v beliebig gewählt wurde, gilt also: $\mathfrak{A} \models \phi$.

Da $\mathfrak{A}$ beliebig gewählt war, gilt insgesamt: $\models \phi$. Q.E.D.

Beispiel (Permanenz): Die Formel $\forall x\phi \to (\exists x(\psi \to \chi) \to \forall x\phi)$ ist allgemeingültig (für beliebige Formeln $\phi, \psi, \chi \in \mathfrak{L}$), da sie die AL-Form $p \to (q \to p)$ hat und dies eine AL-Tautologie ist.

10.4 DEF (Logische Folgerung): Eine Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ *folgt logisch* aus einer Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$, falls für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ und darin für jede Belegung v gilt:

$$\text{Wenn} \quad \mathfrak{A} \models_v \Gamma, \quad \text{dann} \quad \mathfrak{A} \models_v \phi.$$

Man schreibt: $\Gamma \models \phi$.

Bemerkungen:

(1) Es genügt nicht, solche Strukturen zu betrachten, in denen Γ gültig ist. Insbesondere müssen auch in Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \not\models \Gamma$ Belegungen v betrachtet werden, unter denen gilt: $\mathfrak{A} \models_v \Gamma$.

(2) Die logische Folgerung ist bei uns für Formeln mit freien Variablen so definiert, dass sie für jede einzelne Belegung gilt. Häufig wird der Begriff der logischen Folgerung nur für Aussagen definiert.

(3) Mithilfe des Koinzidenz-Lemmas (9.5) kann die Definition für Aussagen vereinfacht werden:

Es sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Aussage und $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Aussagenmenge. Dann ist $\Gamma \models \phi$ genau dann, wenn für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: Wenn $\mathfrak{A} \models \Gamma$, dann $\mathfrak{A} \models \phi$.

(4) Vergleicht man diese Definition mit der aussagenlogischen Folgerung, wird die Parallele zwischen den Wahrheitswertzuordnungen einerseits und den Strukturen und Belegungen andererseits deutlich.

(5) Ist $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ endlich, dann schreiben wir auch $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$ statt $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \phi$

(6) Sind $\Delta, \Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ zwei Formelmengen und $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel, dann folgt aus $\Delta \subseteq \Gamma$ und $\Delta \models \phi$ schon $\Gamma \models \phi$. (Monotonie der Folgerungsbeziehung.)

10.5 Lemma (Import-Export): Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ Formelmenge, $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ zwei Formeln. Dann gilt: $\Gamma \cup \{\psi\} \models \phi$ genau dann, wenn $\Gamma \models \psi \to \phi$.

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur, v eine Belegung, so dass $\mathfrak{A} \models_v \Gamma$. Falls $\mathfrak{A} \not\models_v \psi$, dann gilt schon $\mathfrak{A} \models_v \psi \to \phi$. Gilt hingegen $\mathfrak{A} \models_v \psi$, dann folgt aus $\Gamma \cup \{\psi\} \models \phi$ zunächst $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und wieder $\mathfrak{A} \models_v \psi \to \phi$.

„$\Leftarrow$“ Analog. Q.E.D.

10.6 DEF (logisch-äquivalent): Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ heißen *logisch-äquivalent*, falls $\phi \models \psi$ und $\psi \models \phi$. Schreibe: $\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \psi$.

Bemerkung: Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ sind genau dann logisch-äquivalent, wenn $\models \phi \leftrightarrow \psi$ gilt.

10.7 Proposition (Eigenschaften von Quantoren): Für alle $\mathfrak{L}$-Formeln ϕ und alle Variablen x gelten folgende Beziehungen:

(1) Dualität von $\forall$ und $\exists$:

$\exists x\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg\forall x\neg\phi$

$\forall x\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg\exists x\neg\phi$

(2) Transposition gleicher Quantoren:

$\forall x\forall y\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \forall y\forall x\phi$

$\exists x\exists y\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \exists y\exists x\phi$

(3) Transposition von $\forall$ vor $\exists$:

$\exists x\forall y\phi \models \forall y\exists x\phi$

Beweis. Verbleibt als Übungsaufgabe. Q.E.D.

Bemerkung: Eigenschaft (3) ist keine logische Äquivalenz, sondern lediglich eine Folgerungsbeziehung! Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, d.h. es gibt Formeln ϕ mit: $\forall x\exists y\phi \not\models \exists y\forall x\phi$.

Im Folgenden soll die Substitution definiert werden. Wieder muss man diese zuerst für Terme definieren, um dann die Definition auf Formeln erweitern zu können. Auf eine exakte (rekursive) Definition, wie in der Aussagenlogik gemacht, wird hier zugunsten der leichteren Lesbarkeit verzichtet.

10.8 DEF (Substitution): Die Substitution ist wie folgt definiert:

(1) Sei $t, s \in$ TERM, x eine Variable: $t[s/x]$ ist derjenige Term, in der jedes Vorkommen von x in t durch s ersetzt wurde.

(2) Sei $\phi \in \mathfrak{L}$, $s \in$ TERM und x eine Variable: $\phi[s/x]$ ist diejenige Formel, in der jedes freie (!) Vorkommen der Variablen x in der Formel ϕ durch den Term s ersetzt wurde.

(3) Sei $\phi \in \mathfrak{L}$, $s_1, \ldots, s_n \in$ TERM und $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden Variablen: $\phi[s_1/x_1, s_2/x_2, \ldots, s_n/x_n]$ ist diejenige Formel, in der simultan alle freien Vorkommen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in der Formel ϕ durch die entsprechenden Terme ersetzt wurden. Schreibe: $\phi[\vec{s}/\vec{x}]$.

(4) Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Formelmenge, $s \in$ TERM und x eine Variable. Dann ist:

$$\Gamma[s/x] =_{\text{def}} \{\phi[s/x];\ \phi \in \Gamma\}$$

Konvention (Notation der Substitution): Es wird für die Substitution eine informelle, suggestive Notation verwendet:

Wird an einer Stelle $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ geschrieben, bedeutet dies, dass in der Formel ϕ die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen können. Wird dann im selben Kontext $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ geschrieben, dann ist damit die simultane Substitution der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ durch die Terme $t_1, \ldots, t_n$ gemeint.

Bemerkungen:

(1) Man beachte, dass bei der Substitution nur freie Vorkommen einer Variablen ersetzt werden. Gebundene Vorkommen der Variablen bleiben unverändert.

(2) Wie schon in der Aussagenlogik unterscheidet sich die mehrfache Hintereinanderausführung von Substitutionen von der simultanen Substitution. Beispiele hierfür lassen sich wie in der Aussagenlogik leicht angeben.

(3) Eine Formel kann bei Substitution ihre Bedeutung wesentlich verändern; dies geschieht, wenn durch die Substitution neue Variablen in den Wirkungsbereich von Quantoren kommen. Betrachte dazu folgende Formel:

$$\phi \simeq_{\text{def}} \exists x(x = 1 + y)$$

Unabhängig von der Belegung der Variablen y gilt diese Formel in den natürlichen Zahlen. Betrachten wir nun verschiedene Substitutionen:

- $\phi[z/y] \simeq \exists x(x = 1 + z)$
  Hier hat sich offenbar an der Wahrheit der Formel nichts geändert.
- $\phi[x/y] \simeq \exists x(x = 1 + x)$
  Diese Formel ist in den natürlichen Zahlen nicht mehr gültig; ihr Wahrheitswert hat sich verändert.

Dies ist problematisch, da eine Substitutionsoperation stets wahrheitskonservierend sein sollte.

Die letzte Bemerkung motiviert zu folgender Definition.

10.9 DEF (Freie Einsetzbarkeit): Ein Term t ist in einer Formel ϕ *frei einsetzbar* für die Variable x, falls einer der folgenden Fälle zutrifft:

(1) ϕ ist atomar;

(2) $\phi \simeq (\psi \circ \chi)$ und t ist sowohl in ψ als auch in χ für x frei einsetzbar;

(3) $\phi \simeq \neg\psi$, und t ist in ψ für x frei einsetzbar;

(4) $\phi \simeq Qy\psi$ für einen Quantor $Q \in \{\forall, \exists\}$, und es gilt:

- $x \notin \mathrm{FV}(\phi)$ <u>oder</u> (!)
- $y \notin \mathrm{FV}(t)$ und t ist frei einsetzbar für x in ψ.

Freie Einsetzbarkeit bedeutet: durch die Substitution gerät keine Variable in den Wirkungsbereich eines Quantors, der diese Variable binden würde.

Konvention: Im Folgenden wird bei Substitutionen immer vorausgesetzt, dass freie Einsetzbarkeit vorliegt.

10.10 Lemma (Überführungslemma): Sei $\phi(x) \in \mathfrak{L}$ beliebige Formel, t ein Term, der in ϕ für die Variable x frei einsetzbar ist. Dann gilt für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung v:

$$[\![\phi(t)]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\phi(x)]\!]_{v[x \mapsto [\![t]\!]_v^{\mathfrak{A}}]}^{\mathfrak{A}}$$

Beweis.

Durch Induktion. Verbleibt als Übung. Q.E.D.

Eng verwandt mit der Substitution ist das Konzept der *gebundenen Umbenennung*. Dabei geht es darum, logisch gleichwertige *Varianten* von Formeln zu konstruieren, in denen die Variablen, die durch Quantoren gebunden sind, umbenannt werden.

10.11 DEF (Variante): Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ beliebige Formel.

(1) Für einen Quantor $Q \in \{\forall, \exists\}$ sei $Qx\, \psi(x)$ eine Teilformel von ϕ und y eine Variable, die in ϕ nicht vorkommt (weder gebunden noch frei).

Die Formel ϕ', die aus ϕ entsteht, indem die Teilformel $Qx\, \psi(x)$ durch die Formel $Qy\, \psi(y)$ ersetzt wurde, heißt *einfache Variante* von ϕ.

Diese Ersetzung von Teilformeln wird *gebundene Umbenennung* genannt.

(2) Entsteht ϕ' durch beliebig häufige Anwendung der gebundenen Umbenennung aus ϕ, so heißt ϕ' *Variante* von ϕ.

(3) Eine Formelmengen $\Gamma' \subseteq \mathfrak{L}$ heißt *Variante* einer Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$, falls sie folgendes erfüllt:

(i) Jede Formel $\phi' \in \Gamma'$ ist Variante einer Formel $\phi \in \Gamma$.

(ii) Für jede Formel $\phi \in \Gamma$ gibt es eine Formel $\phi' \in \Gamma'$, so dass ϕ' eine Variante von ϕ ist.

Bemerkungen (Variante):

(1) Durch die gebundene Umbenennung kann man erreichen, dass zu einer vorgegebenen Formel ϕ und einem Term t eine Variante ϕ' von ϕ gefunden wird, in der t frei einsetzbar ist, dass also alle gebundenen Variablen von ϕ' verschieden sind von den freien Variablen in t.

(2) Variantenbildung ist nicht symmetrisch.

So ist etwa die Formel $\psi \mathrel{\hat{=}}_{\text{def}} \forall x(x \doteq x) \wedge \forall y(y \doteq y)$ eine Variante der Formel $\phi \mathrel{\hat{=}}_{\text{def}} \forall x(x \doteq x) \wedge \forall x(x \doteq x)$.

Da aber bei der Varianten-Bildung nur neue Variablen zugelassen sind und jeweils nur ein Vorkommen eines Quantors ersetzt wird, kann ϕ keine Variante von ψ sein.

(3) Ist eine Formel $\psi \in \mathfrak{L}$ Variante einer Formel $\phi \in \mathfrak{L}$, dann sind ϕ und ψ logisch-äquivalent. (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen natürlich nicht.)

(4) VORSICHT: Die Variante Γ' einer Formelmenge Γ muss nicht die gleiche Kardinalität haben wie die ursprüngliche Menge!

So ist z.B. $\{\phi' \in \mathfrak{L} : \phi' \text{ ist Variante von } \forall x(x \doteq x)\}$ eine unendlich große Variante der einelementigen Menge $\{\forall x(x \doteq x)\}$.

Ebenfalls kann die Variante einer Menge echt kleiner als die ursprüngliche Menge werden, falls in der ursprünglichen Menge verschiedene Varianten einer Formel enthalten sind. So ist $\{\forall x(x \doteq x)\}$ eine Variante der Menge $\{\forall x(x \doteq x), \forall y(y \doteq y)\}$.

Im Folgenden werden pränexe Normalformen von Formeln diskutiert. Um die Beweise zu vereinfachen, wird ab hier angenommen, dass neben den beiden Quantoren $\forall$ und $\exists$ lediglich $\bot$ und $\rightarrow$ als Junktoren in der Sprache vorkommen. Die anderen Junktoren werden als abkürzende Schreibweisen verstanden.

Zur Konstruktion einer PNF zu einer beliebigen Formel werden einige logische Äquivalenzen benötigt:

10.12 Theorem (Logische Äquivalenzen): Seien $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ beliebige Formeln, x eine Variable mit $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:

(1) $\forall x(\psi \rightarrow \phi) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\psi \rightarrow \forall x\phi)$

(2) $\exists x(\psi \rightarrow \phi) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\psi \rightarrow \exists x\phi)$

(3) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\exists x\phi \rightarrow \psi)$

(4) $\exists x(\phi \rightarrow \psi) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\forall x\phi \rightarrow \psi)$

Beweis.

Wir zeigen exemplarisch (1), der Rest verbleibt als Übung.

Sei dazu $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ beliebige Struktur, v beliebige Belegung. Es ist zu zeigen:

$$\mathfrak{A} \models_v \forall x(\psi \rightarrow \phi) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathfrak{A} \models_v \psi \rightarrow \forall x\phi.$$

„$\Rightarrow$“ Es gelte also: $\mathfrak{A} \models_v \forall x(\psi \rightarrow \phi)$. Angenommen $\mathfrak{A} \not\models_v \psi \rightarrow \forall x\phi$.

Dann muss gelten: $\mathfrak{A} \models_v \psi$, und es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \not\models_{v[x\mapsto a]} \phi(x)$.

Da $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$ gilt mit dem Koinzidenz-Lemma: $\mathfrak{A} \models_{v[x\mapsto a]} \psi$

Damit wurde aber ein $a \in A$ gefunden mit: $\mathfrak{A} \not\models_{v[x\mapsto a]} \psi \rightarrow \phi$

Daher gilt: $\mathfrak{A} \not\models_v \forall x(\psi \rightarrow \phi)$ WIDERSPRUCH!

„$\Leftarrow$“ Es gelte nun $\mathfrak{A} \models_v \psi \rightarrow \forall x\phi$. Angenommen $\mathfrak{A} \not\models_v \forall x(\psi \rightarrow \phi)$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit: $\mathfrak{A} \not\models_{v[x\mapsto a]} (\psi \rightarrow \phi)$. $(\star)$

Damit gilt insbesondere: $\mathfrak{A} \models_{v[x\mapsto a]} \psi$.

Und mit Koinzidenz-Lemma auch: $\mathfrak{A} \models_v \psi$.

Nach Voraussetzung muss also auch gelten: $\mathfrak{A} \models_v \forall x\phi$

Nach $(\star)$ gilt aber: $\mathfrak{A} \not\models_{v[x\mapsto a]} \phi$. WIDERSPRUCH!

Damit wurden beide Richtungen der Äquivalenz gezeigt. Q.E.D.

Bemerkung: Aus Äquivalenz (4) folgt, dass die Formel $\exists x(\phi(x) \rightarrow \forall y\phi(y))$ allgemeingültig ist. Das erscheint auf den ersten Blick paradox. Man mache sich semantisch klar, warum diese Formel allgemeingültig ist.

10.13 DEF (PNF): Eine Formel ϕ heißt *Pränexe Normalform* (PNF), falls sie der Form $\phi \doteq Q_1 x_{k_1} \dots Q_n x_{k_n} \psi$ ist, wobei die Q_i beliebige Quantoren und ψ eine quantorenfreie Formel sind. Der Quantorenblock wird auch *Präfix* und die Formel ψ als *Kern* oder *Matrix* von ϕ bezeichnet.

10.14 Theorem (Existenz einer PNF): Zu jeder Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ gibt es eine logisch-äquivalente Formel $\psi \in \mathfrak{L}$, so dass ψ eine pränexe Normalform ist und dieselben freien Variablen wie ϕ hat $(\mathrm{FV}(\phi) = \mathrm{FV}(\psi))$.

Beweis.

Um die Behauptung zu beweisen, werden die Äquivalenzen aus Theorem 10.12 verwendet. Dazu muss allerdings sichergestellt werden, dass die Variablenbedingung stets erfüllt ist. Dies erreicht man durch geeignete Varianten der zu betrachtenden Formeln. Der Beweis erfolgt durch Induktion über den Formelaufbau.

ϕ ist atomar: Dann ist ϕ bereits in PNF.

IV: Zu ψ und χ gibt es geeignete Formeln ψ' und χ' in PNF.

$\phi \doteq \psi \rightarrow \chi$: Mit der IV erhalten wir geeignete ψ' und χ' in PNF. Es gilt also:

$$\psi' \doteq Q_1 1 x_1 \dots Q_n x_n \psi'' \quad \text{und} \quad \chi' \doteq Q_{n+1} x_{n+1} \dots Q_{n+m} x_{n+m} \chi''$$

für geeignete $n, m \in \mathbb{N}$ und $\psi'', \chi'' \in \mathfrak{L}$ quantorenfrei.

Seien $y_1, \dots, y_{n+m}$ paarweise verschiedene, neue Variablen, die alle nicht in $\phi' \doteq \psi' \rightarrow \chi'$ vorkommen. (Solche Variablen gibt es, da die Formel endlich lang ist und unendlich viele Variablen zur Verfügung stehen.)

Insbesondere gilt für $1 \leq i \leq n+m$ damit: $\quad y_i \notin \mathrm{FV}(\phi') \quad (\star)$

Sei ϕ''' das Resultat der gebundenen Umbenennung der Quantoren $Q_i x_i$ in $Q_i y_i$ in der Formel ϕ''.

Nun können alle Quantoren von ϕ''' der Reihe nach mit Theorem 10.13 vor die Formel gezogen werden, da aufgrund von $(\star)$ die Variablenbedingung erfüllt ist.

Das Resultat $\widetilde{\phi}$ hat dieselben freien Variablen wie ϕ, beide Formeln sind logisch-äquivalent und $\widetilde{\phi}$ ist eine PNF.

$\phi \doteq Qx\psi$ für $Q \in \{\forall, \exists\}$: Dann ist die Formel $Qx\psi'$ in PNF.

Ebenfalls gilt $\mathrm{FV}(\phi) = \mathrm{FV}(Qx\psi')$ und $\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} Qx\psi'$.

Q.E.D.

Bemerkungen (PNF):

(1) Die PNF zu einer Formel ϕ ist nicht eindeutig bestimmt. Es kommt auf die Umbenennung der gebundenen Variablen an; auf die Reihenfolge, in der die einzelnen Quantoren nach vorne gezogen werden, und schließlich kann man die innere Formel ψ auch durch logisch-äquivalente Formeln ersetzen.

(2) Der Satz deutet nur an, wie man zu einer gegebenen Formel ϕ eine PNF findet. Zum Zwecke eines Verfahrens ist sinnvoller, als ersten Schritt alle gebunden Variablen wie im Fall $\rightarrow$ umzubenennen. Weitere Umbenennungen sind dann nicht mehr notwendig, und die Quantoren können schrittweise aus den einzelnen Teilformeln herausgezogen werden.

(3) Verwendet man weitere Junktoren in der Sprache, kann man diese entweder alle durch $\rightarrow$ und $\perp$ ausdrücken. Ansonsten würden weitere logische Äquivalenzen benötigt werden, mittels derer die Quantoren aus den Teilformeln herausgezogen werden können.

§11 Quantorenlogisches Natürliches Schließen

Der Kalkül des Natürlichen Schließens wird in diesem Abschnitt auf die Quantorenlogik erweitert. Es werden formal wieder mehrere verschiedene Kalküle eingeführt, die sich durch die verwendeten Schlussregeln unterscheiden. Diese bezeichnen wir aber alle als Kalkül des Natürlichen Schließens.

Vorbemerkungen:

(1) *Erweiterung des aussagenlogischen Kalküls:* Der Kalkül aus der Aussagenlogik wird hier erweitert. Das bedeutet, dass alle Schlussregeln für Junktoren aus der Aussagenlogik unverändert übernommen werden.

Sätze, in denen lediglich über Junktoren gesprochen wurde, können aus der Aussagenlogik direkt in die Prädikatenlogik übertragen werden und bleiben damit hier erhalten.

(2) *Unterschiedliche Kalküle:* Die verschiedenen Kalküle werden alle für formale Sprachen $\mathfrak{L}$ mit beliebiger Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$ definiert. Je nachdem, welche logischen Zeichen in der Sprache vorkommen und für welche Zeichen Schlussregeln im Kalkül existieren, werden die verschiedenen Kalküle benannt:

(a) NK′*:* Für formale Sprachen mit den Junktoren $\wedge$, $\rightarrow$ und $\perp$ und dem Quantor $\forall$. Nur für diese logischen Zeichen gibt es Schlussregeln im Kalkül. Das Gleichheitszeichen gehört zwar zur Sprache, aber es gibt keine Schlussregeln für die Identität im Kalkül.

Die Junktoren $\vee$ und $\leftrightarrow$ und der Existenzquantor ($\exists$) werden, als Abkürzungen verstanden. (Hier gilt etwa: $\exists x\phi \simeq_{\text{def}} \neg\forall x \neg\phi$).

(b) NK*:* Für formale Sprachen mit den Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ und $\perp$ und den Quantoren $\exists$ und $\forall$. Wieder stehen im Kalkül für all diese logischen Zeichen Schlussregeln zur Verfügung. Das Gleichheitszeichen gehört zwar zur Sprache, aber es gibt keine Schlussregeln für die Identität im Kalkül.

Zu beachten ist: Die Junktoren $\vee$ und $\leftrightarrow$ und der Quantor $\exists$ sind im Rahmen dieses Kalküls keine (!) Abkürzungen, sondern gehören genuin zur formalen Sprache dazu.

So gilt etwa: $\exists x\phi \not\simeq \neg\forall x \neg\phi$

(c) $\text{NK}'_{\doteq}$*:* Wie NK′, wobei zusätzlich Regeln für die Identität zum Kalkül gehören.

(d) $\text{NK}_{\doteq}$*:* Wie NK, wobei zusätzlich Regeln für die Identität zum Kalkül gehören.

In einigen Sätzen zum Kalkül NK′ – dort wird noch einmal darauf hingewiesen – wird auch die Konjunktion zur Vereinfachung des Beweises als abkürzende Schreibweise interpretiert.

(3) *Merkregel:* Als grobe Regel läßt sich festhalten: Gehören die Schlussregeln bzgl. eines logischen Zeichens (hier Junktor oder Quantor) zum

betrachteten Kalkül, dann wird das Zeichen als zur Sprache gehörend aufgefaßt. In diesem Fall muss die gegenseitige Ableitbarkeit zwischen Formel und gewohnter Abkürzung – die in diesem Fall keine ist – bewiesen werden.

Stehen die Regeln im Kalkül nicht zur Verfügung, dann handelt es sich um echte Abkürzungen. In diesem Fall ist die gegenseitige Ableitbarkeit trivial. Das Gelten der gewohnten Schlußregeln hingegen muss bewiesen werden.

(4) *Weitergehende Definitionen:* Die auf den Schlussregeln eines Kalküls aufbauenden Definitionen (etwa: Ableitung, Hypothesenmenge oder Ableitbarkeit) müssen für jeden neuen Kalkül in Abhängigkeit der dort vorhandenen Schlussregeln separat definiert werden.

Diese Definitionen erfolgen völlig schematisch in Analogie zu den entsprechenden Definitionen in der Aussagenlogik. Entsprechend werden diese Definitionen hier nicht mehr explizit angegeben, sondern nur implizit vorausgesetzt.

(5) *Notation von Ableitungen:* Gelegentlich wird im Folgenden aus Platzgründen bei konkreten Ableitungen auf die Notation der verwendeten Schlussregel verzichtet; diese läßt sich dann aber leicht aus dem Kontext ergänzen.

Gelegentlich wird ein Schlussstrich mit ($\triangleq$) markiert. Dies geschieht, um im Aufschrieb der Ableitung zwischen verschiedenen Schreibweisen einer Formel (etwa abkürzende und explizite Schreibweise) zu wechseln. Das erleichtert das Lesen der Ableitung und verdeutlicht das Geschehen. Tatsächlich wird aber der Kalkül nicht (!) um eine Regel $\triangleq$ erweitert und in der Ableitung findet an dieser Stelle kein Schluss statt. Es handelt sich lediglich um eine Leseerleichterung.

Vorbemerkung (Schlussregeln): Die Schlussregeln für Quantoren erfordern eine gewisse Vorsicht beim Umgang mit den Variablen. Näheres steht bei den einzelnen Regeln. Die Regeln werden jeweils zweimal angegeben: links in informeller und rechts in „offizieller“ Notation.

11.1 DEF (Regeln für Quantoren): Für die Quantoren gelten folgende Regeln:

(1) Einführung des Allquantors:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \phi(y)\end{array}}{\forall x \phi(x)}\ (\forall I) \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \phi[y/x]\end{array}}{\forall x \phi}\ (\forall I)$$

Damit die Regel anwendbar ist, darf y in keiner Annahme, von der ϕ abhängt, frei vorkommen.

D.h. für alle $\chi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ muss gelten: $y \notin \mathrm{FV}(\chi)$.

Beispiel: Sei $\mathfrak{D}$ eine Ableitung, in der y nicht frei in Hyp($\mathfrak{D}$) vorkommt.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ y \doteq z\end{array}}{\forall x(x \doteq z)}\ (\forall I)$$

Die quantifizierte Formel gibt vor, wie die Formel ϕ aussieht. Im diesem Fall ist $\phi \simeq (x \doteq z)$ und man schließt von $\phi(y)$ auf $\forall x \phi(x)$.

(2) Beseitigung des Allquantors:

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)}\ (\forall E) \qquad\qquad \frac{\forall x \phi}{\phi[t/x]}\ (\forall E)$$

Damit die Regel anwendbar ist, muss t in der Formel $\phi(x)$ frei einsetzbar für x sein.

(3) Einführung des Existenzquantors:

$$\frac{\phi(t)}{\exists x \phi(x)}\ (\exists I) \qquad\qquad \frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi}\ (\exists I)$$

Damit die Regel anwendbar ist, muss t in der Formel $\phi(x)$ frei einsetzbar für x sein.

Beispiel:

$$\frac{\forall y(z \doteq y \rightarrow y \doteq z)}{\exists x \forall y(x \doteq y \rightarrow y \doteq x)}\ (\exists I)$$

In der Formel $\phi(x) \simeq_{\text{def}} \forall y(x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$ ist der Term $t \simeq z$ frei einsetzbar für x. Entsprechend darf man von der Prämisse $\phi(z)$ aus schließen.

Anstatt von $\phi(z)$ hätte man auch von $\phi(x)$ aus schließen können, da in $\phi(x)$ auch x frei einsetzbar ist.

(4) Beseitigung des Existenzquantors:

$$\dfrac{\exists x \phi(x) \qquad \begin{array}{c}[\phi(y)]\\ \mathfrak{D}\\ \psi\end{array}}{\psi}\ (\exists E) \qquad\qquad \dfrac{\exists x \phi \qquad \begin{array}{c}[\phi[y/x]]\\ \mathfrak{D}\\ \psi\end{array}}{\psi}\ (\exists E)$$

Damit die Regel anwendbar ist, darf die Variable y weder in ψ noch in den offenen Annahmen von $\mathfrak{D}$ – abgesehen von ϕ selbst – frei vorkommen. D.h. für alle $\chi \in \big(\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \backslash \{\phi(y)\}\big) \cup \{\psi\}$ muss gelten: $\quad y \notin \text{FV}(\chi)$.

11.2 DEF (Die Kalküle NK und NK′): Der Kalkül NK umfasst neben den Regeln der Junktorenlogik nun auch die Regeln für die Quantoren $\forall$ und $\exists$.

Der Kalkül NK′ umfasst folgende Schlussregeln:

- den Schlussregeln für die Junktoren $\wedge, \rightarrow$ und RAA;
- den Schlussregeln für den Quantor $\forall$.

Semantisch kann der Existenzquantor durch den Allquantor und die Negation ausgedrückt werden. Hier wird im Folgenden dieser Zusammenhang im Kalkül des Natürlichen Schließens diskutiert. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) NK*:* Der Existenzquantor gehört genuin zum Alphabet der formalen Sprache und hat eigene Schlussregeln. Auf dieser Grundlage wird im Kalkül NK gezeigt: $\exists x\phi \dashv\vdash \neg\forall x\neg\phi$ und $\forall x\phi \dashv\vdash \neg\exists x\neg\phi$.

(2) NK′*:* Im anderen Fall ist der Existenzquantor eine abkürzende Schreibweise. Hier stehen die Schlussregeln für den Existenzquantor im Kalkül NK′ nicht zur Verfügung und müssen entsprechend bewiesen werden.

11.3 Theorem (Genuiner Existenzquantor): Gehört der Existenzquantor genuin zur Sprache $\mathfrak{L}$ und stehen seine Schlussregeln zur Verfügung, dann gilt für beliebige $\mathfrak{L}$-Formeln ϕ und Variablen x im Kalkül NK:

(1) $\exists x\phi \dashv\vdash \neg\forall x\neg\phi$

(2) $\forall x\phi \dashv\vdash \neg\exists x\neg\phi$

Beweis. Wir zeigen exemplarisch die erste Aussage.

Wir müssen dazu zwei Ableitungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ angeben, in der aus der linken Formel die rechte Formel bzw. umgekehrt abgeleitet wird.

$$\text{„}\vdash\text{“:} \quad \mathfrak{D}_1 \mathrel{\hat{=}}_{\text{def}} \quad \dfrac{\dfrac{\exists x\phi(x) \qquad \dfrac{[\phi(x)]^1 \qquad \dfrac{[\forall x\neg\phi(x)]^2}{\neg\phi(x)}\,(\forall E)\;(\star)}{\bot}\,(\neg E)}{\bot}\,(\exists E{:}1)\;(\star)}{\neg\forall x\neg\phi(x)}\,(\neg I{:}2)$$

$$\text{„}\dashv\text{“:} \quad \mathfrak{D}_2 \mathrel{\hat{=}}_{\text{def}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi(x)]^1}{\exists x\phi(x)}\,(\exists I)\;(\star) \qquad [\neg\exists x\phi(x)]^2}{\bot}\,(\neg E)}{\neg\phi(x)}\,(\neg I{:}1)}{\forall x\neg\phi(x)}\,(\forall I)\;(\star\star) \qquad \neg\forall x\neg\phi(x)}{\bot}\,(\neg E)}{\exists x\phi(x)}\,(\text{RAA}{:}2)$$

Da die Nebenbedingungen an die verwendeten Terme und Formeln jeweils bei $(\star)$ eingehalten werden und insbesondere bei $(\star\star)$ die Formel $\phi(x)$ schon gelöscht ist, ist die erste Behauptung gezeigt. Q.E.D.

11.4 Theorem (Existenzquantor als Abkürzung): Ist der Existenzquantor eine abkürzende Schreibweise, dann sind die Schlussregeln für den Existenzquantor gültig.

Es gilt also im Kalkül NK′:

(1) Sei $\phi(x)$ eine $\mathfrak{L}$-Formel, so dass ein Term t frei in ϕ für eine Variable x einsetzbar ist. Dann gilt: $\phi(t) \vdash \exists x \phi(x)$

(2) Sei $\phi(x)$ eine $\mathfrak{L}$-Formel. Desweiteren sei $\Gamma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathfrak{L}$ Formelmenge mit: y ist eine Variable, die in keiner Formel $\psi \in \Gamma \cup \{\sigma\}$ frei vorkommt und es gilt $\Gamma, \phi(x) \vdash \sigma$ vermöge einer Ableitung $\mathfrak{D}_\sigma$.

Dann gilt auch: $\Gamma, \exists x \phi(x) \vdash \sigma$.

Beweis.

(1) Betrachte folgende Ableitung:

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\dfrac{\dfrac{\phi(t) \qquad \dfrac{[\forall x \neg\phi(x)]^1}{\neg\phi(t)}\,{\scriptstyle(\forall E)\ (\star)}}{\perp}\,{\scriptstyle(\neg E)}}{\neg\forall x \neg\phi(x)}\,{\scriptstyle(\neg I:1)}}{\overline{}\ {\scriptstyle(\triangleq)} \atop \exists x \phi(x)}$$

(2) Betrachte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\phi(y)]^1 \\ \mathfrak{D}_\chi \\ \chi\end{matrix} \qquad [\neg\chi]^2}{\perp}\,{\scriptstyle(\neg E)}}{\neg\phi(y)}\,{\scriptstyle(\neg I:1)}}{\forall x \neg\phi(x)}\,{\scriptstyle(\forall I)\ (\star)} \qquad \begin{matrix}\exists x \phi(x) \\ \overline{}\ {\scriptstyle(\triangleq)} \\ \neg\forall x \neg\phi(x)\end{matrix}}{\dfrac{\perp}{\chi}\,{\scriptstyle(\mathrm{RAA}:2)}}$$

Es ist zu beachten, dass nach Voraussetzung jeweils bei $(\star)$ die Nebenbedingungen an die verwendeten Terme und Formeln bei den Schlussregeln eingehalten wurden. Q.E.D.

Bemerkung: Die letzten beiden Theoreme zeigen, dass wir in der Praxis nicht unterscheiden müssen, ob der Existenz-Quantor genuin zur Sprache gehört oder nicht. Wir werden jeweils von dem Fall ausgehen, der einfacheres Arbeiten verspricht. So werden wir bei Induktionen über Formel- und Beweisaufbau zumeist von Abkürzungen ausgehen, bei konkreten Ableitungen die Schlußregeln dennoch verwenden.

Ebenfalls gilt Theorem 10.12 analog, wenn man „$\dashv\models$“ durch „$\dashv\vdash$“ ersetzt und auf NK′ bzw. NK bezieht. Wir zeigen im Folgenden exemplarisch einen der Fälle; der Rest verbleibt als Übung.

Beispiel: Für alle Formeln $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ mit $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$ gilt im Kalkül NK:

$$\psi \to \exists x \phi(x) \vdash \exists x(\psi \to \phi(x))$$

Beweis.

Betrachte dazu folgende Ableitung im Kalkül NK:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi]^1 \qquad [\neg\psi]^2}{\bot}\,(\neg E)}{\phi(x)}\,(RAA)}{\psi \to \phi(x)}\,(\to I{:}1)}{\exists x(\psi \to \phi(x))}\,(\exists I)\ (\dagger) \qquad [\neg\exists x(\psi \to \phi(x))]^4}{\bot}\,(\neg E)}{\psi}\,(\mathrm{RAA{:}2}) \qquad \psi \to \exists x\phi(x)}{\exists x \phi(x)}\,(\to E) \qquad \dfrac{\dfrac{[\phi(x)]^3}{\psi \to \phi(x)}\,(\to I)}{\exists x(\psi \to \phi(x))}\,(\exists I)\ (\dagger)}{\exists x(\psi \to \phi(x))}\,(\exists E{:}3)\ (\star) \qquad [\neg\exists x(\psi \to \phi(x))]^4}{\bot}\,(\neg E)}{\exists x(\psi \to \phi(x))}\,(\mathrm{RAA{:}4})$$

Bei ($\dagger$) ist die Existenzeinführung erlaubt, da x frei einsetzbar ist für x; bei ($\star$) ist zu beachten, dass x nicht frei vorkommt.

Q.E.D.

Im Folgenden wird der Kalkül so erweitert, dass die Eigenschaften der Identität (oder Gleichhiet) verwendet werden können.

11.5 DEF (Regeln für die Identität): Für das Gleichheitszeichen gelten folgende Regeln:

(1) Reflexivität:

$$\frac{}{t \doteq t}\ (IR_1)$$

Dabei ist t ein beliebiger Term.

Bemerkung: Das ist die einzige Schlussregel im Kalkül des Natürlichen Schließens, die keine Prämissen hat. Damit kann diese Regel als ein Axiom (genauer: Axiom-Schema) angesehen werden.

Damit ist die folgende Ableitung zulässig, um $\vdash \forall x(x \doteq x)$ zu zeigen:

$$\frac{\frac{}{x \doteq x}\ (IR_1)}{\forall x(x \doteq x)}\ (\forall I) \quad (\star)$$

($\star$) Alleinführung erlaubt, da es keine offenen Annahmen gibt, in denen x frei vorkommt.

(2) Symmetrie:

$$\frac{t \doteq s}{s \doteq t}\ (IR_2)$$

Dabei sind t, s beliebige Terme.

(3) Transitivität:

$$\frac{s \doteq r \qquad r \doteq t}{s \doteq t}\ (IR_3)$$

Dabei sind t, s, r beliebige Terme.

(4) Einsetzbarkeit (Substitutivität) in Terme:

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \ldots \quad t_n \doteq s_n}{t[\vec{t}/\vec{z}] \doteq t[\vec{s}/\vec{z}]}\ (IR_4)$$

Dabei sind $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n$ beliebige Terme.

(5) Einsetzbarkeit (Substitutivität) in Formeln (in informeller Notation):

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \ldots \quad t_n \doteq s_n \qquad \phi(\vec{t})}{\phi(\vec{s})}\,(IR_5)$$

Dabei sind $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n$ Terme, so dass die freie Einsetzbarkeit in der Formel ϕ gegeben ist. Es wird aber nicht vorausgesetzt, dass der Term t_i an jedem freien Vorkommen durch s_i ersetzt wird.

Diesem wird die formale Notation gerecht:

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \ldots \quad t_n \doteq s_n \qquad \phi[\vec{t}/\vec{z}]}{\phi[\vec{s}/\vec{z}]}\,(IR_5)$$

Man muss eine Formel ϕ rekonstruieren, so dass $\phi[\vec{t}/\vec{z}]$ zur Prämisse wird und $\phi[\vec{s}/\vec{z}]$ zur Konklusion. Dabei können in ϕ durchaus schon einige Terme t_i vorkommen. Das sind gerade diejenigen, die nicht ersetzt werden.

Es muss natürlich beachtet werden, dass die verwendeten Terme t_i für die Variablen z_i frei einsetzbar sind.

11.6 Proposition (Redundanz von Regeln): Die Schlussregeln (IR_2) und (IR_3) sind durch Anwendungen von (IR_1) und (IR_5) herleitbar.

Beweis.

(1) Redundanz von (IR_2):

Seien t und s beliebige Terme, x eine Variable, die nicht in t vorkommt.

Setze $\phi(x) \doteq_{\text{def}} (x \doteq t)$.

Die Terme t und s sind in ϕ frei einsetzbar für x und es gilt:

$$\phi(t) \simeq \phi[t/x] \simeq (t \doteq t) \quad \text{und} \quad \phi(s) \simeq \phi[s/x] \simeq (s \doteq t)$$

Die Behauptung folgt mit folgendem Ableitungsbaum:

$$\frac{t \doteq s \qquad \dfrac{}{\phi(t)}\,(IR_1)}{\phi(s)}\,(IR_5) \quad \simeq \quad \frac{t \doteq s \qquad \dfrac{}{t \doteq t}\,(IR_1)}{s \doteq t}\,(IR_5)$$

(2) Redundanz von (IR_3):

Seien t, s, r beliebige Terme, x eine Variable, die nicht in r vorkommt.

Setze $\phi(x) \doteq_{\text{def}} (x \doteq r)$.

Die Terme s und t sind in ϕ frei einsetzbar für x und es gilt:

$$\phi(t) \simeq \phi[t/x] \simeq (t \doteq r) \quad \text{und} \quad \phi(s) \simeq \phi[s/x] \simeq (s \doteq r)$$

Die Behauptung folgt mit folgendem Ableitungsbaum:

$$\frac{\dfrac{s \doteq r}{r \doteq s}\,(IR_2) \qquad \phi(r)}{\phi(s)}\,(IR_5) \quad \simeq \quad \frac{\dfrac{s \doteq r}{r \doteq s}\,(IR_2) \qquad r \doteq t}{s \doteq t}\,(IR_5)$$

Q.E.D.

Bemerkung: Die Regel (IR_1) kann auf Terme t beschränkt werden, die entweder eine Variable x oder eine Konstante c sind. Für aus Funktionszeichen zusammengesetzte Terme t ergibt sich $\vdash t \doteq t$ mit der Regel (IR_4). (Induktionsbeweis!) Würde man zudem bei (IR_4) Konstanten als 0-stellige Funktionszeichen zulassen, dann kann die Regel (IR_1) auf Variablen x eingeschränkt werden.

11.7 DEF (Die Kalküle $\mathrm{NK}_{\doteq}$ und $\mathrm{NK}'_{\doteq}$): Der Kalkül NK umfasst neben den Regeln der Junktorenlogik und den Regeln für die Quantoren nun auch die Schlussregeln für die Identität.

Der Kalkül, der aus folgenden Schlussregeln besteht, wird mit $\mathrm{NK}'_{\doteq}$ bezeichnet:

(1) Schlussregeln für die Junktoren $\wedge, \rightarrow$ und die RAA;

(2) Schlussregeln für den Quantor $\forall$;

(3) Schlussregeln für die Identität.

Nun soll – wie schon in der Aussagenlogik – die Korrektheit des Kalküls bewiesen werden. Zur Vereinfachung des Beweises gehen wir davon aus, dass insbesondere auch der Junktor $\wedge$ eine abkürzende Schreibweise ist.

11.8 Theorem (Korrektheit von NK'): Für jede Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ und jede Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ gilt:

$$\text{Wenn} \quad \Gamma \vdash \phi, \quad \text{dann} \quad \Gamma \models \phi.$$

Beweis.

Betrachte zunächst folgende Aussage:

$$\text{Für jede Ableitung } \begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \phi\end{array} \text{ gilt:} \quad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \qquad (*)$$

Zeige $(*)$ durch Induktion über den Aufbau von Beweisen:

$\mathfrak{D} \triangleq \phi$: Damit $\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$, und die Aussage gilt trivialerweise.

IV: Die Behauptung $(*)$ gelte für die Ableitungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$.

$$\mathfrak{D} \triangleq \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1\\ \phi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathfrak{D}_2\\ \phi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi}\,(\rightarrow E) \qquad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \cup \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2)$$

Zu zeigen ist: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \psi$.

Sei $\mathfrak{A}$ beliebige $\mathfrak{L}$-Struktur, v eine Belegung mit: $\mathfrak{A} \models_v \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

Nach IV gilt: $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und $\mathfrak{A} \models_v \phi \rightarrow \psi$.

Damit gilt schon: $\mathfrak{A} \models_v \psi$.

Also gilt für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung v:

$$\text{Wenn} \quad \mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathfrak{D}), \quad \text{dann} \quad \mathfrak{A} \models_v \psi.$$

Damit gilt aber schon: $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \psi$.

$$\mathfrak{D} \doteq \dfrac{\begin{matrix}[\phi] \\ \mathfrak{D}_1 \\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi}\,(\to I) \qquad \text{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$$

Angenommen $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \not\models \phi \to \psi$. Dann gibt es eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ und eine Belegung v mit: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathfrak{D})$ und $\mathfrak{A} \not\models_v \phi \to \psi$.

Damit gilt insbesondere: $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und $\mathfrak{A} \not\models_v \psi$.

Mit $\text{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \subseteq \text{Hyp}(\mathfrak{D}) \cup \{\phi\}$ folgt daraus: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$.

Aus der IV folgt damit: $\mathfrak{A} \models_v \psi$ Widerspruch!

Also doch: $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \to \psi$.

$$\mathfrak{D} \doteq \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1 \\ \phi(y)\end{matrix}}{\forall x \phi(x)}\,(\forall I) \qquad \text{Hyp}(\mathfrak{D}) = \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$$

Angenommen $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \not\models \forall x \phi(x)$.

Das bedeutet, dass es eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ und eine Belegung v gibt mit: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathfrak{D})$ und $\mathfrak{A} \not\models_v \forall x \phi(x)$.

Aus letzterem folgt, dass es ein $a \in A$ gibt mit: $[\![\phi(x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto a]} = 0$.

Mit Überführungslemma: $[\![\phi(y)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[y \mapsto a]} = 0$. $(\star)$

Aufgrund der Schlussregeln gilt für jedes $\chi \in \text{Hyp}(\mathfrak{D})$: $y \notin \text{FV}(\chi)$.

Mit $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) = \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ gilt $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(D_1)$; und mit dem Koinzidenzlemma folgt daraus: $\mathfrak{A} \models_{v[y \mapsto a]} \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$. Also mit IV: $\mathfrak{A} \models_{v[y \mapsto a]} \phi(y)$

Das ist aber ein Widerspruch zu $(\star)$.

$$\mathfrak{D} \doteq \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1 \\ \forall x \phi(x)\end{matrix}}{\phi(t)}\,(\forall E) \qquad \text{Hyp}(\mathfrak{D}) = \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$$

Nach IV gilt: $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \forall x \phi(x)$.

Sei t beliebiger Term, der für x frei einsetzbar ist in $\phi(x)$.

Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur und v eine Belegung mit: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathfrak{D})$.

Nach IV gilt: $\mathfrak{A} \models_v \forall x \phi(x)$.

Also $[\![\phi(x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto a]} = 1$ für jedes $a \in A$. Insbesondere für $a = [\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_v \in A$.

Mit dem Überführungs-Lemma gilt damit: $1 = [\![\phi(x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto [\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_v]} = [\![\phi(t)]\!]^{\mathfrak{A}}_v$

Damit gilt schon: $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi(t)$.

Insgesamt wurde damit $(*)$ gezeigt.

Zeige nun die eigentliche Aussage: Es gelte nun $\Gamma \vdash \phi$. Also gibt es eine Ableitung $\mathfrak{D}$, die dies zeigt. Insbesondere gilt dann auch: $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \vdash \phi$.

Nach $(\star)$ gilt: $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$. Aus $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \Gamma$ folgt schließlich: $\Gamma \models \phi$.

Damit ist die Korrektheit des Kalküls gezeigt. q.e.d.

Bemerkungen:

(1) Der Kalkül NK ist ebenfalls korrekt.

(2) Die Kalküle $\text{NK}_{\doteq}$ und $\text{NK}'_{\doteq}$ sind ebenfalls korrekt, da die Axiome und Regeln für die Gleichheit aufgrund der „inhaltlichen" (metasprachlichen) Identität auch semantisch gültig sind.

Zum Abschluss des Paragraphen soll noch der Substitutionssatz vorgestellt werden. Eine ausführliche Diskussion findet sich im Anhang.

11.9 Substitutionssatz (für NK$'$): Es sei $\Gamma \subset \mathfrak{L}$ eine Formel-Menge, $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel und t ein beliebiger Term, der für eine Variable x frei einsetzbar ist in ϕ. Dann gilt:

$$\text{Wenn} \quad \Gamma \vdash_{\text{NK}'} \phi, \quad \text{dann} \quad \Gamma[t/x] \vdash_{\text{NK}'} \phi[t/x].$$

Beweis. Hier ohne Beweis, vgl. Anhang A. q.e.d.

Bemerkung: Das Theorem ist auch für die Kalküle NK, $\text{NK}_{\doteq}$ und $\text{NK}'_{\doteq}$ gültig.

§12 Vollständigkeit

Wie schon in der Aussageblogik umfaßt der weite Begriff der Vollständigkeit sowohl die Korrektheit als auch die eigentliche Vollständigkeit eines Kalküls. Ziel dieses Abschnittes ist die Vollständigkeit des Kalküls $\mathrm{NK}_{\doteq}$ zu zeigen. Dafür wird zunächst der Theorie-Begriff benötigt. Damit gelingt es, die Existenz von Modellen für widerspruchsfreie Aussagenmengen zu zeigen. Daraus folgt dann die eigentliche Vollständigkeit des Kalküls. Der Abschnitt endet mit einigen direkten Konsequenzen der Vollständigkeit.

Voraussetzung (Sprache): In diesem Abschnitt wird zur Vereinfachung der Beweise eine formale Sprache $\mathfrak{L}$ lediglich mit den Junktoren $\perp$ und $\to$ und dem Quantor $\forall$ vorausgesetzt. Die anderen Junktoren und der Existenzquantor werden als abkürzende Schreibweise verstanden. Die Signatur der Sprache bleibt beliebig.

Analog zu den (maximal)-konsistenten Mengen der Aussagenlogik werden jetzt in der Quantorenlogik (vollständige) Theorien eingeführt:

12.1 DEF (Theorie): Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Menge von Aussagen(!).

(1) Γ ist *deduktiv abeschlossen* (*unter Ableitbarkeit abgeschlossen*), falls für jede Aussage $\phi \in \mathfrak{L}$ gilt:

$$\text{Wenn } \Gamma \vdash \phi, \text{ dann } \phi \in \Gamma.$$

Eine deduktiv abgeschlossene Menge Γ heißt *Theorie*.

(2) Eine Theorie Γ heißt *widerspruchsfrei* (*konsistent*), falls $\perp \notin \Gamma$.

(3) Eine Theorie Γ heißt *vollständig*, falls für jede Aussage $\phi \in \mathfrak{L}$ gilt:

$$\phi \in \Gamma \quad \text{oder} \quad \neg\phi \in \Gamma$$

(4) Die Menge $\mathrm{Ded}(\Gamma) =_{\mathrm{def}} \{\phi \in \mathfrak{L} : \Gamma \vdash \phi \text{ und } \mathrm{FV}(\phi) = \varnothing\}$ ist der *deduktive Abschluss von* Γ.

Bemerkungen: Sei $T \subseteq \mathfrak{L}$ eine Theorie.

(1) Es gilt $T = \mathrm{Ded}(T)$. Umgekehrt folgt aus $T = \mathrm{Ded}(T)$ bereits, dass T eine Theorie ist, da $\mathrm{Ded}(\Gamma)$ für jede Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Theorie ist.

Letzteres erlaubt einen etwas lockeren Sprachgebrauch, bei dem Aussagenmengen Γ mit ihren Theorien $T_\Gamma =_{\mathrm{def}} \mathrm{Ded}(\Gamma)$ identifiziert werden.

(2) Ist $\perp \in T$, dann gilt schon $T = \mathrm{SENT}$. Es gibt also genau eine widersprüchliche Theorie. Diese ist nach Definition vollständig.

(3) Die Widerspruchsfreiheit von T läßt sich auch wie folgt charakterisieren: es gibt eine Aussage $\phi \in \mathfrak{L}$ mit $\phi \notin T$.

(4) Es gibt widerspruchsfreie Theorien T, die nicht vollständig sind.

12.2 DEF (Axiomatisierung): Eine Aussagen-Menge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ heißt *Axiomatisierung* einer Theorie T, falls gilt: $T = \mathrm{Ded}(\Gamma)$.

Bemerkung: Jede Theorie T ist aufgrund ihrer deduktiven Abgeschlossenheit eine triviale Axiomatisierung ihrer selbst.

Beispiel (Gruppentheorie): Die Gruppentheorie G wird in der Sprache $\mathfrak{L}_G$ durch die Menge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ axiomatisiert, die folgende Aussagen enthält:

(1) Assoziativität: $\forall x \forall y \forall z ((x \dot{+} y) \dot{+} z \doteq x \dot{+} (y \dot{+} z))$

(2) Neutral-Element: $\forall x (x \dot{+} \dot{0} \doteq x)$

(3) Inverses-Element: $\forall x \exists y (x \dot{+} y \doteq \dot{0})$

Die resultierende Theorie $G =_{\mathrm{def}} \{\phi \in \mathfrak{L}_G : \Gamma \vdash \phi \text{ und } \mathrm{FV}(\phi) = \varnothing\}$ ist widerspruchsfrei und unvollständig. So läßt sich etwa die Kommutativität aus den Axiomen nicht ableiten.

Ein rein syntaktischer Beweis dieser Aussage übersteigt aber den Rahmen dieser Vorlesung. Die Behauptungen wie gewohnt durch die Angabe von geeigneten Strukturen zu beweisen (eine kommutative und eine nicht-kommutative Gruppe würde hier genügen), ist an dieser Stelle nicht erlaubt. Dazu fehlt noch die Gleichwertigkeit von Ableitbarkeit und Folgerung (genauer: die eigentliche Vollständigkeit des Kalküls). Diese zeigen wir im Folgenden.

Dazu benötigen wir, dass jede widerspruchsfreie Theorie T ein Modell besitzt. Das bedeutet: man muss zu einer Theorie T eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ finden, in der T gültig ist. Also: $\mathfrak{A} \models T$. Um dies zu erreichen, werden sogenannte Henkin-Theorien betrachtet.

12.3 DEF (Henkin-Theorie): Eine Theorie $T \subseteq \mathfrak{L}$ heißt *Henkin-Theorie*, falls es zu jeder Existenz-Aussage $\exists x \phi(x) \in \mathfrak{L}$ (d.h. nicht nur in der T selbst!) eine Individuen-Konstante $\dot{c}$ (im Alphabet von $\mathfrak{L}$) gibt, so dass die Aussage $(\exists x \phi(x) \to \phi(\dot{c})) \in T$.

Bemerkungen:

(1) Die Konstante $\dot{c}$ wird auch *Zeuge* (engl. *witness*) der Existenzaussage $\exists x \phi(x)$ genannt.

(2) Der Zeuge $\dot{c}$ einer Eigenschaft $\phi(x)$ muss diese nicht besitzen. Es gilt: $T \vdash \phi(\dot{c})$ nur, falls $T \vdash \exists x \phi(x)$.

Es läßt sich zeigen, dass vollständige Henkin-Theorien Modelle besitzen. Dementsprechend ist das Ziel, eine gegebene Theorie zu "Henkinisieren". Das heißt, die Theorie in einer erweiterten Sprache zu einer Henkin-Theorie zu erweitern. Diese resultierende Theorie wird dann in einem weiteren Schritt vervollständigt.

Notation (Spracherweiterung): Sei $\mathfrak{L}$ eine formale Sprache und I eine Indexmenge. Dann bezeichnet $\mathfrak{L} \sqcup \{\dot{c}_i : i \in I\}$ die Sprache $\mathfrak{L}'$, die aus $\mathfrak{L}$ entsteht, indem das Alphabet von $\mathfrak{L}$ um die Konstanten aus $\{\dot{c}_i : i \in I\}$ erweitert wird.

12.4 Konstruktion (Henkin-Sprache): Schrittweise wird die Sprache $\mathfrak{L}$ durch neue Konstanten zur Henkin-Sprache $\mathfrak{L}_H$ erweitert. Damit sollen genügend Konstanten zur Sprache $\mathfrak{L}$ hinzugefügt werden, um aus einer gegebenen Theorie T eine Henkin-Theorie zu konstruieren.

- $\mathfrak{L}_0 =_{\text{def}} \mathfrak{L}$
- Sei $\mathfrak{L}_n$ schon konstruiert.
  $\mathfrak{L}_{n+1} =_{\text{def}} \mathfrak{L}_n \sqcup \{\dot{c}_\phi : \exists x \phi(x) \in \mathfrak{L}_n \text{ und } \mathrm{FV}(\phi) = \{x\}\}$,
  wobei die $\dot{c}_\phi$ neue Konstanten sind, die in $\mathfrak{L}_n$ nicht vorkommen.
- $\mathfrak{L}_H =_{\text{def}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{L}_n$

Bemerkungen:

(1) Die Iteration in der Konstruktion ist notwendig, da in jedem Schritt neue Aussagen entstehen, die bezeugt werden müssen.

(2) Die Kardinalität der Henkin-Sprache $\mathfrak{L}_H$ ist gleich der Kardinalität der ursprünglichen Sprache $\mathfrak{L}$.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass man (geeignete) Beweise in der reicheren Sprache $\mathfrak{L}_H$ zurückführen kann auf Beweise in der ursprüngliche Sprache $\mathfrak{L}$.

12.5 Lemma (Konstanten-Ersetzung): Sei $\mathfrak{D}$ eine $\mathfrak{L}_H$-Ableitung und x eine Variable, die in der gesamten Ableitung weder gebunden noch ungebunden vorkommt. Ersetzt man in der Ableitung in jeder Formel jedes Vorkommen einer Konstanten $\dot{c}$ durch die Variable x, dann ist das Resultat der Ersetzung $\mathfrak{D}[x/\dot{c}]$ eine $\mathfrak{L}$-Ableitung.

Beweis. Durch Induktion über den Aufbau von Ableitungen.

$\mathfrak{D} \triangleq \phi$ Trivial. $\phi[x/\dot{c}]$ ist gültige Ableitung.

IV: Es gelte Behauptung für Ableitungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$.

$$\mathfrak{D} \triangleq \frac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1 & \quad & \mathfrak{D}_2 \\ \phi & \quad & \phi \to \psi\end{matrix}}{\psi}$$

Sei x eine Variable, die nicht in $\mathfrak{D}$ vorkommt. Damit kommt x weder in $\mathfrak{D}_1$ noch in $\mathfrak{D}_2$ vor und die IV ist anwendbar.

Da die Konklusion von $\mathfrak{D}_1[x/\dot{c}]$ die Formel $\phi[x/\dot{c}]$ und die Konklusion von $\mathfrak{D}_2[x/\dot{c}]$ die Formel $\phi[x/\dot{c}] \to \psi[x/\dot{c}]$ ist, gilt:

(MP) ist anwendbar und $\mathfrak{D}[x/\dot{c}]$ ist wieder eine Ableitung.

$\mathfrak{D}$ entsteht durch Anwendung einer anderen Regel: Analog zum Fall eben.

Damit wurde die Behauptung gezeigt. Q.E.D.

12.6 DEF (Erweiterung einer Theorie): Seien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ zwei Sprachen erster Stufe. Seien $T \subseteq \mathfrak{L}$ und $T' \subseteq \mathfrak{L}'$ zwei Theorien.

(1) T' heißt *Erweiterung* von T, falls $T \subseteq T'$.

(2) T' heißt *konservative* Erweiterung von T, falls zusätzlich $T' \cap \mathfrak{L} = T$.

Bemerkung: Der Begriff der Theorie ist aufgrund ihrer deduktiven Abgeschlossenheit sprachabhängig. Das bedeutet: Eine Theorie $T \subseteq \mathfrak{L}$ ist in einer erweiterten Sprache $\mathfrak{L}'$ keine Theorie mehr. Ist etwa $\dot{c}$ eine Konstante, die in $\mathfrak{L}$ nicht vorkommt, gilt damit $(\dot{c} \doteq \dot{c}) \notin T$. Da aber $T \vdash_{\mathfrak{L}'} \dot{c} \doteq \dot{c}$ gilt, ist $T \subseteq \mathfrak{L}'$ nicht mehr deduktiv abgeschlossen.

12.7 Konstruktion (Henkin-Theorie): In der Henkin-Sprache $\mathfrak{L}_H$ kann man zu einer Theorie T eine Henkintheorie durch $T_{(H)}$ axiomatisieren:

$$T_{(H)} =_{\text{def}} T \cup \{\exists x \phi(x) \to \phi(\dot{c}_\phi) : \exists x \phi(x) \in \mathfrak{L}_H \text{ und } \mathrm{FV}(\phi) = \{x\}\}$$

12.8 Lemma (Konservativität): Oben konstruiertes $T_{(H)}$ axiomatisiert eine konservative Henkin-Erweiterung von T.

Beweis.

Nach Konstruktion axiomatisiert $T_{(H)}$ eine Henkin-Theorie. Damit muss nur noch die Konservativität gezeigt werden. Es ist also für jedes $\chi \in \mathfrak{L}$ zu zeigen: Wenn $T_{(H)} \vdash_{\mathfrak{L}_H} \chi$, dann $T \vdash_{\mathfrak{L}} \chi$.

Es gelte $T_{(H)} \vdash_{\mathfrak{L}_H} \chi$ für eine beliebige Formel $\chi \in \mathfrak{L}$. Damit gibt es eine Ableitung $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{L}_H$ mit Endformel χ.

Seien $\dot{c}_1, \ldots, \dot{c}_n$ alle neuen Konstanten von $\mathfrak{L}_H$, die irgendwo in $\mathfrak{D}$ vorkommen. Ersetzt man diese durch Variablen $x_1, \ldots, x_n$, die alle nicht in $\mathfrak{D}$ vorkommen, so ist $\mathfrak{D}' \simeq_{\text{def}} \mathfrak{D}[\vec{x}/\vec{c}]$ nach n-facher Anwendung des Lemmas 12.5 (Konstanten-Ersetzung) eine gültige Ableitung. Für $\mathfrak{D}'$ gilt:

(1) In $\mathfrak{D}'$ kommen nur Formeln aus $\mathfrak{L}$ vor. Also ist $\mathfrak{D}'$ eine Ableitung in $\mathfrak{L}$.

(2) Die Endformel ist χ, da $\chi[\vec{x}/\vec{c}] = \chi$.

(3) Für jede Formel $\psi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}')$ gilt entweder

$$\psi \in T \quad \text{oder} \quad \psi \simeq \exists x \phi(x) \to \phi(y)$$

wobei y in keiner anderen Formel $\psi' \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}') \backslash \{\psi\}$ vorkommt.

(Jede Existenz-Aussage hat einen eigenen Zeugen!)

Da $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}')$ endlich ist, gibt es also $n \in \mathbb{N}$, so dass folgendes gilt:

$$\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}') = N \uplus M \quad (\star)$$

wobei $N \subseteq T$ und $M = \{\exists x \phi_k \to \phi_k(y_k) : 1 \leq k \leq n\}$ mit $T \cap M = \varnothing$.

Durch sukzessive Elimination von Annahmen $\psi \in M$, läßt sich zeigen: $N \vdash \chi$.

Sei $\psi \mathrel{\hat{=}} \exists x\phi(x) \to \phi(y) \in M$ beliebig, $X =_{\text{def}} (N \uplus M)\backslash\{\psi\}$.

Mit Einführung der Implikation folgt aus ($\star$): $X \vdash \psi \to \chi$.

Also: $X \vdash (\exists x\phi(x) \to \phi(y)) \to \chi$.

Da y nun in keiner Annahme vorkommt, folgt: $X \vdash \forall y\big((\exists x\phi(x) \to \phi(y)) \to \chi\big)$.

Da $\forall y(\sigma \to \tau) \vdash \exists y\sigma \to \tau$, gilt auch: $X \vdash \exists y\big(\exists x\phi(x) \to \phi(y)\big) \to \chi$.

Daraus und aus $\vdash \exists y(\exists x\phi(x) \to \phi(y))$ ergibt sich mit ($\to E$): $X \vdash \chi$.

Damit ist ψ aus der Annahmenmenge eliminiert. Durch Iteration der Elimination erhält man: $N \vdash \chi$. Da $N \subseteq T$, ist die Konservativität gezeigt. Q.E.D.

12.9 Korollar (Widerspruchsfreiheit): T ist genau dann konsistent, wenn $T_{(H)}$ konsistent ist.

Beweis. Direkte Folge aus der Konservativität von $T_{(H)}$. Q.E.D.

12.10 Proposition (Lemma von Lindenbaum): Jede widerspruchsfreie Theorie $T \subseteq \mathfrak{L}$ läßt sich zu einer vollständigen widerspruchsfreien Theorie $T' \subseteq \mathfrak{L}$ erweitern.

Beweis.

Wir setzen im Beweis voraus, dass die Menge der Prädikatzeichen, Funktionszeichen und Individuen-Konstanten in der Sprache $\mathfrak{L}$ abzählbar sind. ($*$)

Damit ist die Sprache $\mathfrak{L}$ selbst abzählbar und der Beweis verläuft analog zum Beweis in der Aussagenlogik, dass konsistente Mengen immer in einer maximalkonsistenten Menge enthalten sind:

(1) Konstruktion einer neuen Aussagenmenge: Man folgt der Abzählung der Sprache und nimmt diejenigen Aussagen in die Menge auf, die die Konsistenz erhalten.

(2) Nachweis der Vollständigkeit und Konsistenz der resultierenden Menge.

(3) Nachweis der deduktiven Abgeschlossenheit der resultierenden Menge.

Setzt man ($*$) nicht voraus, benötigt man das mit dem Auswahlaxiom äquivalente Zornsche Lemma. Vgl. dazu van Dalen, S.106. (Eine genaue Behandlung beider Fälle findet man in: Ebbinghaus/Flum.)

Q.E.D.

12.11 Lemma: Sei T_H die Vervollständigung einer widerspruchsfreien Henkin-Theorie $T_{(H)}$. Dann ist T_H selbst eine Henkin-Theorie.

Beweis.

Trivial, da schon in $T_{(H)} \subseteq T_H$ alle notwendigen Aussagen $\exists x\, \phi(x) \to \phi(\dot{c})$ für ein $\dot{c}$ enthalten sind. Q.E.D.

12.12 Theorem (Modell-Existenz-Satz): Sei $T_H \subseteq \mathfrak{L}_H$ eine vollständige, widerspruchsfreie Henkin-Erweiterung einer Theorie $T \subseteq \mathfrak{L}$. Dann hat T_H ein Modell, und damit hat auch schon T ein Modell.

Beweis.

Zunächst wird ein geeignetes Termmodell $\mathfrak{A}$ konstruiert:

Sei dazu X die Menge aller geschlossenen Terme von $\mathfrak{L}_H$. Auf X wird eine zweistellige Relation $\sim$ definiert:

$$t \sim s \quad \Leftrightarrow_{\text{def}} \quad T_H \vdash t \doteq s$$

Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation (Übungsaufgabe) und die Äquivalenzklasse von t bezüglich $\sim$ wird mit $\overline{t} = \{s : s \in X \text{ und } t \sim s\}$ bezeichnet.

Das Universum A von $\mathfrak{A}$ sei die Menge aller Äquivalenz-Klassen bezüglich $\sim$:

$$A =_{\text{def}} \{\overline{t};\ t \in X\} = {}^{X}\!/_{\sim} \neq \varnothing$$

A ist nicht leer, da es in $\mathfrak{L}_H$ die Konstante $\dot{c}_{(x \doteq x)}$ als Zeugen für $\exists x(x \doteq x)$ gibt, und wohldefiniert, da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Auf dem Universum müssen nun die Interpretationen der nichtlogischen Zeichen ausgezeichnet werden. Zu einem nichtlogischen Zeichen ζ des Alphabets von $\mathfrak{L}_H$ bezeichnen wir mit $\zeta^{\mathfrak{A}}$ seine Interpretation im Grundbereich A.

(1) Interpretation der Konstanten:

Sei c Konstante: $c^{\mathfrak{A}} =_{\text{def}} \overline{c}$

Dies ist wohldefiniert, da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. (Jede Konstante c liegt in einer Äquivalenz-Klasse und diese sind disjunkt!)

(2) Interpretation der Funktions-Zeichen:

Sei f ein n-stelliges Funktions-Zeichen:

$$f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A : \langle \overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n} \rangle \mapsto \overline{f(t_1, \ldots, t_n)}$$

Zu zeigen ist, dass $f^{\mathfrak{A}}$ eine wohldefinierte Funktion ist. D.h.:

$$\text{Wenn} \quad t_1 \sim s_1, \ldots, t_n \sim s_n, \quad \text{dann} \quad f^{\mathfrak{A}}(\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_n}).$$

Dies verbleibt als Übungsaufgabe.

Daraus ergibt sich für alle geschlossenen Terme t: $[\![t]\!]^{\mathfrak{A}} = \overline{t}$.

(3) Interpretation der Relations-Zeichen:

$$\langle \overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n} \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \quad \Leftrightarrow_{\text{def}} \quad T \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$$

Wieder ist die Wohldefiniertheit zu zeigen.

Damit wurde eine Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ mit einem geeigneten Ähnlichkeits-Typ zur Sprache $\mathfrak{L}_H$ konstruiert.

Nun ist zu zeigen, dass $\mathfrak{A}$ tatsächlich ein Modell der Theorie T_H ist ($\mathfrak{A} \models T_H$).

Wir zeigen durch Induktion über dem Formelaufbau die etwas stärkere Aussage, dass für jede Formel $\phi \in \mathfrak{L}_H$ gilt:

$$T_H \vdash \phi \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathfrak{A} \models \phi.$$

$\phi \simeq \bot$: Nach Voraussetzung gilt: $T_H \nvdash \bot$.
Nach Definition von Strukturen gilt: $\mathfrak{A} \not\models \bot$

$\phi \simeq (t \doteq s)$: Unterscheide 2 Fälle:

1. *Fall:* $\mathrm{FV}(t \doteq s) = \varnothing$.

   Belegungen können in diesem Fall vernachlässigt werden, da $(t \doteq s)$ eine Aussage ist.

   $\mathfrak{A} \models t \doteq s$ gdw. $[\![t \doteq s]\!]^{\mathfrak{A}} = 1$ gdw. $[\![t]\!]^{\mathfrak{A}} = [\![s]\!]^{\mathfrak{A}}$
   gdw. $\overline{t} = \overline{s}$ gdw. $T_H \vdash t \doteq s$

   Die letzte Äquivalenz gilt aufgrund der Definition von $\sim$.

2. *Fall:* $\mathrm{FV}(t \doteq s) \neq \varnothing$. Sei etwa $\mathrm{FV}(t \doteq s) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

   „$\Rightarrow$" Es gelte: $\mathfrak{A} \not\models t \doteq s$.
   D.h. es gibt eine Belegung v mit: $[\![t \doteq s]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 0$.
   Dann gibt es Terme $t_1, \ldots, t_n \in X$ mit: $v(x_1) = \overline{t_1}, \ldots, v(x_n) = \overline{t_n}$.
   Daher: $\mathfrak{A} \not\models (t \doteq s)[\vec{t}/\vec{x}]$.
   Nach dem ersten Fall gilt: $T_H \nvdash (t \doteq s)[\vec{t}/\vec{x}]$ $(*)$
   Angenommen $T_H \vdash t \doteq s$. Damit gibt es eine Ableitung $\mathfrak{D}$ von $(t \doteq s)$.
   In $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq T_H$ sind nur Aussagen. Damit kommen die Variablen $x_1, \ldots x_n$ in keiner Annahme offen vor.
   Damit gilt: $T_H \vdash \forall (t \doteq s)$
   Nach geeigneter Beseitigung der Allquantoren erhält man wiederum:
   $T_H \vdash (t \doteq s)[\vec{t}/\vec{x}]$ WIDERSPRUCH zu $(*)$.
   Also doch: $T_H \nvdash t \doteq s$.

   „$\Leftarrow$" Es gelte: $T_H \nvdash t \doteq s$.
   Dann: $T_H \nvdash \forall (t \doteq s)$.
   Angenommen $T_H \vdash \forall (t \doteq s)$, dann auch $T_H \vdash t \doteq s$.
   Also: $T_H \nvdash \forall (t \doteq s)$.
   Da T_H vollständig ist: $T_H \vdash \neg \forall (t \doteq s)$.
   Dann: $T_H \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n \neg (t \doteq s)$.
   Da T_H Henkin-Theorie, gibt es geeignete Konstanten $\dot{c}_1, \ldots, \dot{c}_n$ mit:
   $T_H \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n \neg (t \doteq s) \to \neg (t \doteq s)[\vec{c}/\vec{x}]$
   Mit $(\to E)$ folgt: $T_H \vdash \neg (t \doteq s)[\vec{c}/\vec{x}]$.
   Mit dem 1. Fall folgt: $\mathfrak{A} \models \neg (t \doteq s)[\vec{c}/\vec{x}]$.
   Also: $\mathfrak{A} \not\models t \doteq s$.

   $\phi \simeq P(t_1, \ldots, t_n)$: Wieder müssen 2 Fälle betrachtet werden; diese lassen sich analog zu $\phi \simeq (t \doteq s)$ beweisen.

   IV: Angenommen, die Behauptung gilt für alle ψ mit kleinerem Rang.

   $\phi \simeq (\phi \to \psi)$: Behauptete Äquivalenz ist trivial.

   $\phi \simeq \forall x \psi$: $\mathfrak{A} \models \forall x \psi$
   gdw. für jede Belegung v und jedes $t \in X$ gilt: $[\![\psi(x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto \overline{t}]} = 1$
   gdw. $\mathfrak{A} \models \psi(x)$
   gdw. $T_H \vdash \psi(x)$
   gdw. $T_H \vdash \forall x \psi(x)$
   Letzte Äquivalenz gilt, da T_H eine Aussagenmenge ist.

Damit ist die Behauptung gezeigt. Insbesondere gilt also: $\mathfrak{A} \models T_H$ und $\mathfrak{A} \models T$.

Läßt man die Interpretation der neuen Individuenkonstanten weg, erhält man aus $\mathfrak{A}$ eine Struktur $\mathfrak{A}'$ mit zu $\mathfrak{L}$ passendem Ähnlichkeitstyp. Für diese Struktur gilt ebenfalls: $\mathfrak{A}' \models T$. Q.E.D.

12.13 Korollar (Erfüllbarkeit): Ist eine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ konsistent, dann ist Γ erfüllbar.

Beweis.

Sei Γ konsistent. Dann ist $T = \{\phi \in \mathfrak{L} : \Gamma \vdash \phi \text{ und } \mathrm{FV}(\phi) = \varnothing\}$ eine konsistente Theorie. T läßt sich kanonisch zu der Henkin-Theorie $T_{(H)}$ erweitern, die ihrerseits in einer vollständigen Henkin-Theorie T_H liegt. Damit gibt es ein Modell $\mathfrak{A}$ von T_H. Durch Weglassen der Interpretation der neuen Konstanten erhält man eine Struktur $\mathfrak{A}'$ geeigneter Signatur. Da $\Gamma \subseteq T \subseteq T_H$ ist, gilt: $\mathfrak{A}' \models \Gamma$.

Q.E.D.

12.14 Theorem (Vollständigkeit für Aussagenmengen): Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Aussagenmenge, $\phi \in \mathfrak{L}$ beliebige Formel. Dann gilt:

$$\Gamma \vdash \phi \quad \text{genau dann, wenn} \quad \Gamma \models \phi.$$

„$\Rightarrow$" Die Korrektheit wurde sogar für beliebige Formelmengen bewiesen.

„$\Leftarrow$" Es gelte: $\Gamma \models \phi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \forall(\phi)$

Aus letzterem folgt: $\Gamma \cup \{\neg\forall(\phi)\}$ ist nicht erfüllbar.

Mit dem Korollar zur Erfüllbarkeit: $\Gamma \cup \{\neg\forall(\phi)\}$ ist nicht konsistent.

Das bedeutet: $\Gamma, \neg\forall(\phi) \vdash \perp$.

Mit Anwendung der RAA erhält man: $\Gamma \vdash \forall(\phi)$.

Mit endlich vielen Allbeseitigungen schließlich: $\Gamma \vdash \phi$.

Q.E.D.

Der Vollständigkeit läßt sich in einem zweiten Schritt auch auf beliebige Formelmengen ausweiten:

12.15 Theorem (Vollständigkeit für Formelmengen): Für alle Formelmengen $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ und Formeln $\phi \in \mathfrak{L}$ gilt:

$$\Gamma \vdash \phi \quad \text{genau dann, wenn} \quad \Gamma \models \phi.$$

Beweis.

Wieder genügt, „$\Leftarrow$" zu zeigen.

Es gelte also: $\Gamma \models \phi$.

Das bedeutet: Für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle Belegungen v mit $[\![\Gamma]\!]^{\mathfrak{A}}_v = 1$ gilt, dass $[\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_v = 1$.

Ohne Einschränkung nehmen wir an: In $\Gamma \cup \{\phi\}$ kommt keine Variable x_n sowohl gebunden als auch frei vor. (Man kann etwa jede Formel $\psi \in \Gamma \cup \{\phi\}$ in eine logisch äquivalente Formel umformen, so dass gebundene Variablen ungerade Inizes und freie Variablen gerade Indizes haben.)

Sei $N =_{\text{def}} \bigcup\{\text{FV}(\psi) : \psi \in \Gamma\} \cup \text{FV}(\phi)$ die Menge aller freien Variablen, die in $\Gamma \cup \{\phi\}$ vorkommen.

Wir betrachten eine Spracherweiterung $\mathfrak{L}^+$ von $\mathfrak{L}$, so dass es in $\mathfrak{L}^+$ für jedes $x_n \in \text{VAR}$ ein neues Namenszeichen d_n gibt.

Γ^* sei diejenige Aussagenmenge in $\mathfrak{L}^+$, die entsteht, wenn man in jeder Formel $\psi \in \Gamma$ jede freie Variable x_n durch d_n ersetzt; analog ϕ^*.

Zeige: $\Gamma^* \models \phi^*$.

Sei $\mathfrak{A}^* = \langle M, \ldots \rangle$ eine $\mathfrak{L}^+$-Struktur mit $\mathfrak{A}^* \models \Gamma^*$ und $\mathfrak{A}$ diejenige $\mathfrak{L}$-Struktur, die entsteht, wenn man die Interpretation der neuen Namenszeichen wegläßt.

Betrachte die Belegung $v : \text{VAR} \to M : x_n \mapsto v(x_n) =_{\text{def}} d^{\mathfrak{A}^*}$.

Aus $\mathfrak{A}^* \models \Gamma^*$ und dem Überführungslemma folgt: $\mathfrak{A} \models_v \Gamma$.

Da $\Gamma \models \phi$, auch: $\mathfrak{A} \models_v \phi$.

Daraus folgt aber wieder: $\mathfrak{A}^* \models \phi^*$.

Damit haben wir eine Aussagenmenge Γ^* mit $\Gamma^* \models \phi^*$ und aus dem Vollständigkeitssatz für Aussagenmengen folgt: $\Gamma^* \vdash \phi^*$.

Das bedeutet: Es gibt eine Ableitung $\mathfrak{D}^*$ mit $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \Gamma^*$ und Endformel ϕ^*.

Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass in $\mathfrak{D}^*$ keine Variable $y_n \in N$ vorkommt. (Das ist nicht ganz trivial, kann aber mit den Techniken, die im Anhang zum Substitutionstheorem vorgestellt werden, bewiesen werden.)

Sei $\mathfrak{D}$ derjenige Baum, der entsteht, wenn man nun in der Ableitung $\mathfrak{D}^*$ alle neuen Konstanten d_n wieder durch Variablen x_n ersetzt.

Da keine Variable aus N in $\mathfrak{D}^*$ vorkommt, ist $\mathfrak{D}$ eine Ableitung, die Endformel von $\mathfrak{D}$ ist ϕ und $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \Gamma$.

Damit gilt aber schon: $\Gamma \vdash \phi$. Q.E.D.

12.16 Theorem (Kompaktheitssatz): Für jede Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ ist äquivalent:

(1) Γ ist widerspruchsfrei.

(2) Γ ist erfüllbar.

(3) Γ ist endlich erfüllbar (jede endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ ist erfüllbar).

Beweis.

(1) gdw. (2): Mit dem Vollständigkeits-Satz trivial.

(2) gdw. (3): Γ erfüllbar gdw. $\Gamma \not\models \bot$ gdw. $\Gamma \nvdash \bot$

gdw. für jedes endliche $\Delta \subseteq \Gamma$ gilt: $\Delta \nvdash \bot$

gdw. für jedes endliche $\Delta \subseteq \Gamma$ gilt: $\Delta \not\models \bot$ Q.E.D.

12.17 Theorem (Endlichkeitssatz): Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ Formelmenge und $\phi \in \mathfrak{L}$ Formel. Wenn $\Gamma \models \phi$, dann gibt es eine endliche Menge $\Delta \subseteq \Gamma$ mit $\Delta \models \phi$.

Beweis.

Wenn $\Gamma \models \phi$, dann $\Gamma \vdash \phi$.

Dann gibt es nach dem vorherigen Theorem ein endliches $\Delta \subseteq \Gamma$ mit: $\Delta \vdash \phi$.

Dann aber auch: $\Delta \models \phi$.

Q.E.D.

§13 Modelltheorie

Zum Abschluss der Vorlesung werden noch einige modelltheoretische Sätze vorgestellt. Zunächst wird ein wenig Terminologie eingeführt. Anschließend wird die Endlichkeit diskutiert und zuletzt werden die Sätze von Löwenheim-Skolem bewiesen.

13.1 DEF: Sei $\mathfrak{L}$ formale Sprache erster Stufe.

(1) Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Aussagenmenge.

$$\mathrm{MOD}(\Gamma) =_{\mathrm{def}} \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \Gamma\}$$

ist die (echte) Klasse aller Modelle von Γ.

(2) Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von Strukturen, $\phi \in \mathfrak{L}$ Formel.

$$\mathfrak{K} \models \phi \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \quad \text{für alle } \mathfrak{A} \in \mathfrak{K} : \mathfrak{A} \models \phi$$

(3) Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von Strukturen.

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{K}) =_{\mathrm{def}} \{\phi \in \mathfrak{L} : \mathfrak{K} \models \phi \text{ und } \mathrm{FV}(\phi) = \varnothing\}$$

ist die von $\mathfrak{K}$ induzierte Theorie.

13.2 Theorem: Seien $\Delta, \Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ Aussagenmengen und $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ Klassen von Strukturen. Es gelten folgende Zusammenhänge:

(1) $\mathfrak{K} \subseteq \mathrm{MOD}(\Gamma)$ genau dann, wenn $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{K})$.

(2) Wenn $\Delta \subseteq \Gamma$, dann $\mathrm{MOD}(\Gamma) \subseteq \mathrm{MOD}(\Delta)$;
und wenn $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L}$, dann $\mathrm{Th}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{K})$.

(3) $\mathrm{MOD}(\Delta \cup \Gamma) = \mathrm{MOD}(\Delta) \cap \mathrm{MOD}(\Gamma)$.
und $\mathrm{Th}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{L}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{K}) \cap \mathrm{Th}(\mathfrak{L})$.

(4) $\mathrm{MOD}(\Delta \cap \Gamma) \supseteq \mathrm{MOD}(\Delta) \cup \mathrm{MOD}(\Gamma)$;
und $\mathrm{Th}(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{L}) \supseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{K}) \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{L})$.

Beweis. Verbleibt als Übungsaufgabe. Q.E.D.

Im Folgenden werden wir uns mit der Endlichkeit und Unendlichkeit von Strukturen beschäftigen und prüfen, inwieweit diese Eigenschaften in der Logik erster Stufe ausgedrückt werden können.

13.3 Theorem: Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Aussagenmenge in einer Sprache $\mathfrak{L}$ erster Stufe. Besitzt Γ endliche Modelle und ist die Kardinalität dieser Modelle unbeschränkt, dann besitzt Γ auch ein unendliches Modell.

Beweis.

Für jedes $1 < n \in \mathbb{N}$ sei: $\lambda_n \triangleq_{\text{def}} \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{1 \leq k, l \leq n, k \neq l} x_k \neq x_l \in \mathfrak{L}$

(λ_n bedeutet: *Es gibt mindestens n Elemente im Universum.*)

Offensichtlich gilt für jede Struktur $\mathfrak{A}=\langle A, \ldots \rangle$:

$$\mathfrak{A} \models \lambda_n \quad \Leftrightarrow \quad |A| \geq n$$

Ferner gilt für jedes $1 < n \in \mathbb{N}$:

$$\mathfrak{A} \models \lambda_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \lambda_n$$

Sei $\Gamma' =_{\text{def}} \Gamma \cup \{\lambda_n;\ 1 < n \in \mathbb{N}\}$ und $\Delta \subseteq \Gamma'$ eine endliche Teilmenge von Γ'.

Offensichtlich gibt es ein minimales $1 < n \in \mathbb{N}$ so, dass $\lambda_n \notin \Delta$.

Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von Γ mit $|A| \geq n$. (Eine solche Struktur gibt es, da die Kardinalität der endlichen Modelle unbeschränkt ist.)

Für diese Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \Delta$.

Damit kann man den Kompaktheits-Satz anwenden und erhält: Γ' ist erfüllbar.

Angenommen Γ' hätte endliche Modelle. Etwa $\mathfrak{A}=\langle A, \ldots \rangle$ mit $|A| = n$ für ein $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Dann gilt aber: $\mathfrak{A} \not\models \lambda_{n+1}$. WIDERSPRUCH zu $\lambda_{n+1} \in \Gamma'$.

Damit hat Γ' ein unendliches Modell $\mathfrak{A}$.

Aus $\Gamma \subseteq \Gamma'$ folgt: $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Damit hat Γ ein unendliches Modell. Q.E.D.

13.4 Korollar: Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von Strukturen, die endliche Strukturen unbeschränkter Kardinalität enthält. Dann gibt es keine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ mit:

$$\text{MOD}(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in \mathfrak{K};\ \mathfrak{A} \text{ ist endlich}\}$$

Beweis.

Angenommen doch. Dann hätte Γ beliebig große endliche Modelle. Damit hätte Γ auch ein unendliches Modell $\mathfrak{A} \notin \text{MOD}(\Gamma)$. WIDERSPRUCH Q.E.D.

Bemerkung: Das Korollar zeigt, dass es keine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ gibt, so dass $\text{MOD}(\Gamma) = \{\mathfrak{A} :\ \mathfrak{A} \text{ ist endlich}\}$. Das bedeutet, dass *Endlichkeit* nicht in der Logik erster Stufe formuliert werden kann, also dass *Endlichkeit* keine erststufige Eigenschaft ist.

13.5 DEF (Endliche Axiomatisierbarkeit): Eine Klasse $\mathfrak{K}$ von Strukturen heißt (endlich) axiomatisierbar, falls es eine (endliche) Aussagenmenge Γ gibt, die $\mathfrak{K}$ axiomatisiert. D.h.: $\mathfrak{K} = \text{MOD}(\Gamma)$.

13.6 Lemma: Eine Klasse $\mathfrak{K}$ von Strukturen ist genau dann endlich axiomatisierbar, wenn $\mathfrak{K}$ und das Komplement $\mathfrak{K}^c$ axiomatisierbar sind.

Beweis.

„$\Rightarrow$“ $\mathfrak{K}$ ist endlich axiomatisierbar.

Das bedeutet: $\mathfrak{K} = \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\}) = \text{MOD}(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n)$ für endlich viele Aussagen $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathfrak{L}$.

Damit gilt:

$\mathfrak{K}^c = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \notin \mathfrak{K}\} = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \not\models \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n\}$
$= \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \neg(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n)\} = \text{MOD}(\neg(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n))$

und $\mathfrak{K}^c$ ist endlich axiomatisiert.

Damit sind $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^c$ insbesondere auch axiomatisierbar.

„$\Leftarrow$“ Sei $\mathfrak{K} = \text{MOD}(\Gamma)$ und $\mathfrak{K}^c = \text{MOD}(\Delta)$ für zwei Aussagenmengen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathfrak{L}$.

Dann ist: $\text{MOD}(\Gamma \cup \Delta) = \text{MOD}(\Gamma) \cap \text{MOD}(\Delta) = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}^c = \varnothing$.

Damit ist $\Gamma \cup \Delta$ unerfüllbar und nach dem Vollständigkeitssatz auch inkonsistent.

Dann gibt es Aussagen $\phi_1, \dots \phi_n \in \Gamma$ und $\psi_1, \dots, \psi_m \in \Delta$ mit:

$$\phi_1, \dots \phi_n, \psi_1, \dots \psi_m \vdash \bot$$

Wieder mit dem Vollständigkeitssatz folgt:

$\varnothing = \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \cup \{\psi_1, \dots, \psi_m\})$
$= \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\}) \cap \text{MOD}(\{\psi_1, \dots, \psi_m\})$

Da $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq \Gamma$, gilt: $\mathfrak{K} = \text{MOD}(\Gamma) \subseteq \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\})$.

Analog: $\mathfrak{K}^c = \text{MOD}(\Delta) \subseteq \text{MOD}(\{\psi_1, \dots, \psi_n\})$.

Sei nun $\mathfrak{A} \in \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\})$ beliebig.

Dann gilt: $\mathfrak{A} \notin \text{MOD}(\{\psi_1, \dots, \psi_n\})$.

Also: $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{K}^c = \text{MOD}(\Delta) \subseteq \text{MOD}(\{\psi_1, \dots, \psi_n\})$.

Also: $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K} = \text{MOD}(\Gamma)$.

Damit gezeigt:

$$\mathfrak{K} = \text{MOD}(\Gamma) = \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\})$$

Also ist $\mathfrak{K}$ endlich axiomatisiert. Q.E.D.

13.7 Korollar: Die Klasse aller unendlichen Mengen ist axiomatisierbar, nicht aber endlich axiomatisierbar.

Beweis.

Die Aussagenmenge $\{\lambda_n : 1 < n \in \mathbb{N}\}$ (wobei die Aussagen λ_n wie oben definiert sind) axiomatisiert unendliche Mengen. Gäbe es eine endliche Axiomatisierung dieser Klasse, dann könnte man nach Lemma 13.6 die Klasse aller endlichen Mengen axiomatisieren. Widerspruch q.e.d.

Zum Abschluss dieses Paragraphen werden noch die Sätze von Löwenheim und Skolem vorgestellt. Diese machen Aussage über die Existenz von Strukturen in einer vorgegebenen (unendlichen) Kardinaltität. Dazu wird zunächst eine direkte Folge des Modell-Existenz-Satzes vorgestellt.

13.8 Korollar (Modell-Existenz-Satz): Sei $\mathfrak{L}$ eine formale Sprache erster Stufe, für die gilt:

$$|\{\zeta :\ \zeta \text{ ist Relations-, Funktions- oder Konstantensymbol von } \mathfrak{L}\}| = \kappa \geq \aleph_0$$

für eine Kardinalzahl κ und $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Aussagenmenge.

Wenn $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ konsistent ist, dann hat Γ ein Modell $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ mit $|A| \leq \kappa$.

Beweis.

$|\,\mathfrak{L}\,| = \kappa$ und damit $|\,\mathfrak{L}_H\,| = \kappa$ und auch $|X| = \kappa$, wobei X die Menge aller geschlossenen Terme von $\mathfrak{L}_H$ ist.

Damit gilt für den Grundbereich von $\mathfrak{A}$, konstruiert wie im Satz von Henkin: $|A| \leq \kappa$. (Durch Äquivalenzklassenbildung kann sich die Kardinalität echt verkleinern.) q.e.d.

13.9 Theorem (Löwenheim-Skolem – Abwärts-Aussage): Sei $\mathfrak{L}$ formale Sprache mit der Kardinalität $|\,\mathfrak{L}\,| = \kappa$ und $\lambda > \kappa$ eine Kardinalzahl.

Besitzt eine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ ein Modell der Kardinalität λ, dann besitzt Γ für jede Kardinalzahl κ' mit $\kappa \leq \kappa' \leq \lambda$ ein Modell der Kardinalität κ'.

Beweis.

Füge zur Sprache $\mathfrak{L}$ eine Menge $\{c_i;\ i \in I\}$ neuer Individuen-Konstanten hinzu. Dabei sei $|I| = \kappa'$, die Konstanten paarweise verschieden ($c_i \neq c_j$ für $i \neq j$) und $\mathfrak{L}'$ die resultierende Sprache.

Sei $\Gamma' =_{\text{def}} \Gamma \cup \{c_i \neq c_j;\ i, j \in I \text{ und } i \neq j\}$, was eine konservative Erweiterung von Γ in der erweiterten Sprache $\mathfrak{L}'$ ist.

Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ ein Modell von Γ der Kardinalität λ, d.h. $|\mathfrak{A}| = \lambda$.

$\mathfrak{A}'$ sei diejenige Struktur, die aus $\mathfrak{A}$ resultiert, wenn zusätzlich κ' viele Individuen aus A ausgezeichnet werden. (Diese Konstruktion ist möglich, da $|\mathfrak{A}| = \lambda > \kappa'$.)

Es gilt: $\mathfrak{A}' \models \Gamma$ und $\mathfrak{A}' \models c_i \neq c_j$ für alle $i \neq j \in I$.

Damit gilt: $\mathfrak{A}' \models \Gamma'$.

Nach dem Korollar zum Modell-Existenz-Satz hat nun Γ' ein Modell $\mathfrak{B}'$ mit der Kardinalität der Sprache. Also $|\mathfrak{B}'| = |\,\mathfrak{L}'\,| = \kappa'$.

Sei nun $\mathfrak{B}$ diejenige Struktur, die aus $\mathfrak{B}'$ entsteht, indem man die Auszeichnung der Individuen-Konstanten c_i wegläßt.

$\mathfrak{B}$ hat dieselbe Signatur wie $\mathfrak{L}$ und ist ein Modell von $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ als Theorie in der ursprünglichen Sprache $\mathfrak{L}$, und es gilt: $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}'| = \kappa'$. Q.E.D.

Beispiel (Skolems Paradoxon): Wenn die Mengenlehre (etwa ZF) widerspruchsfrei ist und damit überhaupt Modelle besitzt, dann besitzt sie schon ein abzählbares Modell. (Die Sprache $\mathfrak{L}_{\mathrm{ZF}}$ ist nämlich abzählbar.)

Damit muss man den *Blick von Innen* vom *Blick von Außen* bei diesem Modell unterscheiden. So sind etwa Bijektionen, die von außen existieren, innerhalb des Modelles nicht notwendigerweise existent, da die Theorie ihre Existenz nicht beweist.

13.10 Theorem (Löwenheim-Skolem – Aufwärts-Aussage): Sei $\mathfrak{L}$ eine formale Sprache mit der Kardinalität $|\,\mathfrak{L}\,| = \kappa$ und $\lambda \geq \kappa$ eine Kardinalzahl.

Besitzt eine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ ein Modell der Kardinalität λ, dann besitzt Γ für jede Kardinalzahl μ mit $\mu \geq \lambda$ ein Modell der Kardinalität μ.

Beweis.

Wie in der Abwärts-Aussage fügen wir der Sprache $\mathfrak{L}$ eine Menge $\{c_i;\ i \in I\}$ neuer Individuen-Konstanten hinzu. Dabei sei $|I| = \mu$, die Konstanten paarweise verschieden ($c_i \neq c_j$ für $i \neq j$) und $\mathfrak{L}'$ die resultierende Sprache.

Wir betrachten wieder $\Gamma' =_{\mathrm{def}} \Gamma \cup \{c_i \neq c_j;\ i, j \in I \text{ und } i \neq j\}$ als konservative Erweiterung von Γ in der erweiterten Sprache $\mathfrak{L}'$.

Wir zeigen für jede endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma'$, dass Δ ein Modell besitzt:

Sei dazu $\Delta \subseteq \Gamma'$ beliebige endliche Teilmenge. Damit enthält Δ höchstens die neuen Individuen-Konstanten $c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

$$\Delta \subseteq \Gamma \cup \{c_{i_p} \neq c_{i_q};\ p \neq q \leq k\} =: \Gamma_0$$

Klar ist: Jedes Modell von Γ_0 ist auch ein Modell von Δ.

Wir betrachten das Modell $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ von Γ mit der Kardinalität λ. Daraus erhalten wir eine Struktur $\mathfrak{A}'$, indem wir zusätzlich k viele Individuen aus A auszeichnen.

Es gilt: $\mathfrak{A} \models \Gamma_0$. Damit auch schon: $\mathfrak{A} \models \Delta$.

Damit hat jede endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma'$ ein Modell und mit dem Kompaktheitssatz folgt nun, dass Γ' erfüllbar ist und ein Modell $\mathfrak{B}'$ hat. D.h.: $\mathfrak{B}' \models \Gamma'$

Da $\mathfrak{B}' \models c_i \neq c_j$ für jedes $i \neq j \in I$, gilt: $|\mathfrak{B}'| \geq \mu = |I|$.

Mit der Abwärts-Aussage läßt sich nun das Ergebnis verbessern:

Wir erhalten ein Modell $\mathfrak{B}''$ von Γ' mit $|\mathfrak{B}''| = |\,\mathfrak{L}'\,| = \mu$.

Diese Struktur ist ebenfalls ein Modell von $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Durch das Weglassen der Interpretationen der neuen Individuen-Konstanten erhält man schließlich ein Modell $\mathfrak{B}$ von Γ mit geeigneter Signatur (für die ursprüngliche Sprache $\mathfrak{L}$). Da lediglich die Auszeichnungen weggelassen wurden, der Grundbereich aber unverändert bleibt, gilt zudem: $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}''| = \mu$. Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) Die Aufwärts-Aussage liefert z.B. Nicht-Standard-Modelle der Arithmetik.

(2) Das Beweisverfahren der Löwenheim-Skolem-Theoreme besteht darin, die Sprache geeignet zu erweitern und aus den Termen der Sprache ein geeignetes Termmodell gemäß dem Modell-Existenz-Lemma zu „konstruieren“.

III Anhang

Anhang A: Substitutionssatz (R. Gazzari)

In diesem Anhang wird der Substitutionssatz bewiesen. Dafür sind vorbereitend neue Begrifflichkeit und einige Hilfssätze nötig.

Es wird im Folgenden eine formale Sprache $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\rightarrow, \bot, \forall)$ mit genau den logischen Zeichen $\rightarrow$, $\bot$, $\forall$ und $=$ vorausgesetzt.

1.1 DEF (Quantifizierte Variablen): Für eine $\mathfrak{L}$-Formel ϕ ist die *Menge* $\mathrm{QV}(\phi)$ *ihrer quantifizierten Variablen* wie folgt rekursiv über dem Aufbau von Formeln definiert:

(1) $\mathrm{QV}(\phi) = \varnothing$ für atomare Formeln.

(2) $\mathrm{QV}(\phi \circ \psi) = \mathrm{QV}(\phi) \cup \mathrm{QV}(\psi)$ für zusammengesetzte Formeln.

(3) $\mathrm{QV}(\forall x \phi) = \mathrm{QV}(\phi) \cup \{x\}$ für quantifizierte Formeln.

Bemerkungen:

(1) Der Begriff der quantifizierten Variabel unterscheidet sich vom Begriff der gebundenen Variablen. Dort wurde vorausgesetzt, dass die quantifizierte Variable frei im Kern einer Formel vorkommt und damit tatsächlich gebunden wird. Hier wird auf diese Voraussetzung verzichtet.

(2) Kanonisch läßt sich die Definition auf die Menge $\mathrm{QV}(\mathfrak{D})$ der quantifizierten Variablen einer Ableitungen $\mathfrak{D}$ fortsetzen.

Wiederholung (Variante):

(1) Eine Formel ψ heißt *einfache Variante einer Formel* ϕ, falls ein Vorkommen eines Quantors gebunden umbenannt wurde.

Man wählt bei der gebundenen Umbenennung immer neue Variablen; insbesondere kann man also keine Variablen wählen, die frei in der Formel vorkommen.

(2) Eine Formel ψ heißt *Variante einer Formel* ϕ, falls ψ in endlich vielen Schritten (auch keine) durch einfache gebundene Umbenennung aus ϕ entstanden ist. Falls $\phi \neq \psi$, dann heißt ψ auch *echte Variante*.

(3) Eine Formelmenge Δ heißt *Variante einer Formelmenge* Γ, falls sie das Folgende erfüllt:

(a) Jedes $\psi \in \Delta$ ist eine Variante einer Formel $\phi \in \Gamma$.

(b) Zu jeder Formel $\phi \in \Gamma$ gibt es eine Variante $\psi \in \Delta$.

Bemerkungen (Varianten): Varianten haben einige leicht nachvollziehbare Eigenschaften. Sei ϕ eine $\mathfrak{L}$-Formel:

(1) Ist ϕ' Variante von ϕ, dann gilt: $\mathrm{FV}(\phi) = \mathrm{FV}(\phi')$

(Bei der gebundenen Umbenennung kann man nur neue Variablen wählen, also auch keine bisher freie Variable gebunden werden. Damit bleibt die Menge der freien Variablen bei gebundener Umbenennung invariant.)

(2) Wurde ein Quantor in einer Variante ϕ' von ϕ ersetzt, dann kann der neue Quantor keine Variable $x \in \mathrm{FV}(\phi)$ binden. Formal:

$$\text{Wenn} \quad x \in \mathrm{QV}(\phi') \cap \mathrm{FV}(\phi), \quad \text{dann} \quad x \in \mathrm{QV}(\phi).$$

(3) Es ist möglich, dass eine in ϕ quantifizierte Variable $x \in \mathrm{QV}(\phi)$ in einer Variante ϕ' an einer anderen Stelle quantifiziert wird.

(Falls $x \notin \mathrm{FV}(\phi)$, kann man erst alle Vorkommen von x beliebig umbenennen; anschließend kann man an beliebiger Stelle eine gebundene Variable in x umbenennen.)

(4) Quantorenfreie Formeln haben keine echten Varianten.

(5) Der Begriff der Variante definiert auf der Menge aller Formeln und auf der Menge aller Formelmengen eine Relation V_F bzw. V_M. Diese Relationen sind nicht symmetrisch:

(Kommt in einer Formel ϕ eine Variable x mehrmals quantifiziert vor, dann gibt es eine Variante ϕ', in der all diese Vorkommen umbenannt sind. Für jede Variante ϕ'' dieser Formel kommt x höchstens einmal vor. Damit ist ϕ keine Variante von ϕ'.

Für Formelmengen betrachte die Mengen $\{\phi\}$, $\{\phi'\}$ und $\{\phi''\}$.)

1.2 DEF (Einfache Ableitung): Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ Formel, ϕ' eine Variante von ϕ. Eine Ableitung $\mathfrak{D}$ für $\phi \vdash \phi'$ heißt *einfach*, falls sie das Folgende erfüllt:

(1) *Allbeseitigung:* Für jede Allbeseitigung

$$\frac{\forall x \psi(x)}{\psi(t)}$$

in der Ableitung $\mathfrak{D}$ gilt: $x \in \mathrm{QV}(\phi)$ und t muss eine neue Variable y sein ($t \doteq y$), die bisher noch überhaupt nicht in der Ableitung vorkommt.

(2) *Alleinführung:* Für jede Alleinführung

$$\frac{\psi(y)}{\forall x\, \psi(x)}$$

in der Ableitung $\mathfrak{D}$ gilt: y ist eine der neuen Variablen, die an einer einzigen Stelle eingeführt wurden, und $x \in \mathrm{QV}(\phi')$.

(3) *Annahmen:* Keine der neuen Variablen kommt in einer Annahme (weder offen noch gelöscht) vor.

Bemerkung (Einfache Ableitung): Einfache Ableitungen haben entscheidende Vorteile, die ein leichtes Zusammensetzen von Ableitungen zu neuen Ableitungen erleichtern:

Setzt man über eine bestehende Ableitung eine neue Ableitung, können bei den Alleinführungen in der unteren Ableitung Probleme entstehen; es können neue offene Annahmen mit neuen freien Variablen hinzukommen, die eine Alleinführung verbieten.

In einfachen Ableitungen sind die Variablen, die allquantifiziert werden, unter Kontrolle. Sie können ohne Probleme derart umgenannt werden, dass das Resultat immer noch eine geeignete Ableitung ist und zudem die Variablenkonflikte vermieden werden.

Einfache Ableitung $\mathfrak{D}$ für $\phi \vdash \phi'$ erfüllen zudem: $\mathrm{QV}(\mathfrak{D}) = \mathrm{QV}(\phi) \cup \mathrm{QV}(\phi')$.

1.3 Lemma (Einfache Ableitbarkeit von Varianten): Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel und ϕ' eine Variante von ϕ, dann gibt es einfache Ableitungen $\mathfrak{D}_\phi$ und $\mathfrak{D}_{\phi'}$ mit:

$$\phi \vdash \phi' \quad \text{vermöge } \mathfrak{D}_\phi \quad \text{und} \quad \phi' \vdash \phi \quad \text{vermöge } \mathfrak{D}_{\phi'}$$

Beweis. Durch Induktion über dem Aufbau von ϕ.

ϕ atomar: ϕ ist quantorenfrei. Also gilt für jede Variante ϕ' von ϕ: $\phi \simeq \phi'$.

Damit folgt aber die gegenseitige Ableitbarkeit vermöge der trivialen Ableitung $\mathfrak{D}_\phi \simeq_{\mathrm{def}} \mathfrak{D}_{\phi'} \simeq_{\mathrm{def}} \phi$.

Da in $\mathfrak{D}_\phi$ weder Alleinführung noch Allbeseitigung vorkommen, ist $\mathfrak{D}_\phi$ (und damit auch $\mathfrak{D}_{\phi'}$) trivialerweise einfach.

IV: Für σ und τ gelte die Behauptung.

$\phi \simeq \sigma \to \tau$: Sei ϕ' eine Variante von ϕ. Dann gibt es Varianten σ' und τ' von σ und τ, so dass $\phi' \simeq \sigma' \to \tau'$.

Sei n der größte Index einer Variablen in den durch die IV garantierten, einfachen Ableitungen $\mathfrak{D}_\sigma$, $\mathfrak{D}_{\sigma'}$, $\mathfrak{D}_\tau$ und $\mathfrak{D}_{\tau'}$.

Ersetze in der ganzen Ableitung $\mathfrak{D}_\tau$ jedes Vorkommen jeder Variable x_m, die bei einer Allbeseitigung entsteht, durch die Variable x_{m+n+1}. Verfahre analog bei $\mathfrak{D}_{\tau'}$. Man mache sich klar, dass durch das Ersetzen zwei neue, einfache Ableitungen entstehen, die immer noch $\tau \vdash \tau'$ und $\tau' \vdash \tau$ belegen.

Wir nennen die beiden neuen Ableitungen wieder $\mathfrak{D}_\tau$ und $\mathfrak{D}_{\tau'}$.

Betrachte zunächst den folgenden Baum:

$$\mathfrak{D}_\phi \quad \simeq_{\mathrm{def}} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\sigma']^1}{\sigma}\,(IV{:}\mathfrak{D}_{\sigma'}) \qquad \cfrac{\phi}{\sigma \to \tau}\,(\simeq)}{\tau}}{\tau'}\,(IV{:}\mathfrak{D}_\tau)}{\sigma' \to \tau'}\,(1)}{\phi'}\,(\simeq)$$

Die doppelten Linien stehen für Teilableitungen, die durch die IV gegeben sind.

Wir zeigen, dass durch das Ersetzen der Variablen in $\mathfrak{D}_\tau$ sichergestellt ist, dass alle Alleinführungen in $\mathfrak{D}_\tau$ weiterhin erlaubt sind und damit die angegebenen Bäume tatsächlich Ableitungen sind:

Angenommen nicht, dann muss an einer Stelle eine Nebenbedingung bei einer Alleinführung gebrochen sein. In $\mathfrak{D}_{\sigma'}$ kann dies jedenfalls nach IV nicht sein. Damit gibt es in $\mathfrak{D}_\tau$ eine Stelle mit:

$$\frac{\psi(y)}{\forall x\,\psi(x)}$$

Dabei kommt y in irgendwelchen momentan offenen Annahmen ρ frei vor. ρ kann aber nach IV nicht zu $\mathfrak{D}_\tau$ gehören. Also ist $\rho \in \{\sigma', \phi\}$.

Da y nicht frei in τ vorkommen kann (wieder mit IV), gilt sogar, dass $\rho \in \{\sigma', \sigma\}$. Damit ist $y \in \mathrm{FV}(\sigma) = \mathrm{FV}(\sigma')$. Das ist aber aufgrund des Ersetzens der neuen Variablen in $\mathfrak{D}_\tau$ nicht möglich.

Analog argumentiert man, dass der folgende Baum eine Ableitung ist:

$$\mathfrak{D}_{\phi'} \quad \simeq_{\text{def}} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\sigma]^1}{\sigma'}\,(IV{:}\mathfrak{D}_\sigma) \qquad \cfrac{\phi'}{\sigma' \to \tau'}\,(\simeq)}{\tau'}}{\tau}\,(IV{:}\mathfrak{D}_{\tau'})}{\sigma \to \tau}\,(1)}{\phi}\,(\simeq)$$

So, wie die Variablen in $\mathfrak{D}_\tau$ und $\mathfrak{D}_{\tau'}$ ersetzt wurden, ist es sichergestellt, dass $\mathfrak{D}_\phi$ und $\mathfrak{D}_{\phi'}$ einfach sind.

Damit ist der Fall $\sigma \to \tau$ gezeigt.

$\phi \simeq \forall x\sigma$. Sei ϕ' eine Variante von ϕ. Dann ist ϕ' von folgender Form: $\forall y\sigma'$.

Die IV garantiert zwei Ableitungen $\mathfrak{D}_{\sigma(x)}$ und $\mathfrak{D}_{\sigma'(x)}$. Ersetzt man jedes freie Vorkommen von x in beiden Ableitungen durch eine neue Variable z, die weder in $\mathfrak{D}_{\sigma(x)}$ noch in $\mathfrak{D}_{\sigma'(x)}$ vorkommt, und für die zusätzlich gilt, dass $x \neq z \neq y$, so erhält man wieder zwei einfache Ableitungen. Diese bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}_{\sigma(z)}$ und $\mathfrak{D}_{\sigma'(z)}$

Betrachte die folgenden Bäume:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x\sigma}{\sigma(z)}}{\sigma'(z)}\,(IV{:}\mathfrak{D}_{\sigma(z)})}{\forall y\sigma'} \quad ; \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall y\sigma'}{\sigma'(z)}}{\sigma(z)}\,(IV{:}\mathfrak{D}_{\sigma'(z)})}{\forall x\sigma}$$

Beide angegebenen Bäume sind Ableitungen, da durch die Wahl von z insbesondere gilt: $z \notin \mathrm{FV}(\forall x\sigma) = \mathrm{FV}(\forall y\sigma')$. Da zusätzlich z weder in $\forall x\sigma$ noch in $\forall y\sigma'$ vorkommt, sind beide Ableitungen einfach.

Insgesamt wurde die Behauptung gezeigt. q.e.d.

1.4 DEF (frei): Sei x eine Variable und t ein Term.

(1) Eine $\mathfrak{L}$-Formel ϕ heißt *frei über x und t*, falls weder über x noch über die Variablen von t in ϕ quantifiziert wird:

$$\mathrm{QV}(\phi) \cap (\{x\} \cup \mathrm{FV}(t)) = \varnothing$$

(2) Eine Ableitung $\mathfrak{D}$ wird *frei über x und t* genannt, falls alle Formeln, die in $\mathfrak{D}$ vorkommen, frei sind.

(3) Eine $\mathfrak{L}$-Formel ψ heißt *freie Variante über x und t zu einer $\mathfrak{L}$-Formel ϕ*, falls die Formel ψ eine Variante von ϕ ist und zudem auch frei ist.

(4) Eine Formelmenge Δ heißt *freie Variante* von einer Formelmenge Γ, falls Δ eine Variante von Γ ist und alle Formeln $\phi \in \Delta$ frei sind.

Konvention: Im Folgenden seien die Variable v und der Term s fest gewählt. „Frei“ wird abkürzend für „frei über v und s“ verwendet.

1.5 Korollar (Einfache Ableitbarkeit für Substitute): Für jede $\mathfrak{L}$-Formel ϕ und allen freien Varianten ϕ^* von ϕ gilt:

Falls s frei einsetzbar ist für v in ϕ, dann gibt es zwei einfache Ableitungen $\mathfrak{D}_\phi$ und $\mathfrak{D}^*_\phi$ mit:

$$\phi[s/v] \vdash \phi^*[s/v] \text{ vermöge } \mathfrak{D}_\phi \quad \text{und} \quad \phi^*[s/v] \vdash \phi[s/v] \text{ vermöge } \mathfrak{D}^*_\phi$$

Beweis.

Man mache sich (durch eine einfache Induktion über dem Aufbau von ϕ) klar, dass $\phi^*[s/v]$ freie Variante von $\phi[s/v]$ ist. Q.E.D.

1.6 Lemma (Substituierbarkeit in freien Ableitungen): Sei $\mathfrak{D}$ eine freie Ableitung. Dann ist $\mathfrak{D}[s/v]$ auch eine Ableitung.

Beweis.

Einfache Induktion über dem Aufbau von freien Ableitungen. Q.E.D.

1.7 Lemma (Existenz freier Ableitungen): Für jede Ableitung $\mathfrak{D}$ mit einer Endformel ϕ und für jede freie Variante ϕ^* von ϕ gilt:

Es gibt eine freie Ableitung $\mathcal{F}$ mit Endformel ϕ^* so, dass $\mathrm{Hyp}(\mathcal{F})$ freie Variante von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ ist.

Beweis. Durch Induktion über dem Aufbau von Ableitungen.

$\mathfrak{D} \simeq \phi$: Damit gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \{\phi\}$.

Sei ϕ^* beliebige freie Variante von ϕ.

Betrachte $\mathcal{F} \simeq_{\mathrm{def}} \phi^*$.

Offensichtlich ist $\mathrm{Hyp}(\mathcal{F})$ freie Variante von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$, Endformel von $\mathcal{F}$ ist ϕ^* und $\mathcal{F}$ ist frei.

IV: Die Behauptung gelte für die Ableitungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$.

$$\mathfrak{D} \simeq \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \\ \phi & \phi \to \psi\end{matrix}}{\psi} \qquad \text{Es gilt:}\quad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \cup \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2)$$

Sei ψ^* eine freie Variante von ψ. Dann gibt es eine freie Variante ϕ^* von ϕ, so dass die Formel $\phi^* \to \psi^*$ eine freie Variante von $\phi \to \psi$ ist. (Warum?)

Die IV garantiert freie Ableitungen $\mathfrak{D}_1^*$ und $\mathfrak{D}_2^*$. Betrachte:

$$\mathcal{F} \quad \simeq_{\mathrm{def}} \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1^* & \mathfrak{D}_2^* \\ \phi^* & \phi^* \to \psi^*\end{matrix}}{\psi^*}$$

$\mathrm{Hyp}(\mathcal{F}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1^*) \cup \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2^*)$.

Mit der IV folgt leicht, dass $\mathrm{Hyp}(\mathcal{F})$ freie Variante von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ ist und die Endformel von $\mathcal{F}$ ist ψ^*. Offensichtlich ist $\mathcal{F}$ auch frei.

$$\mathfrak{D} \simeq \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1 \\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi} \qquad \text{Es gilt:}\quad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1).$$

Sei also $(\phi \to \psi)^*$ eine beliebige freie Variante von $\phi \to \psi$. Dann ist $(\phi \to \psi)^* \simeq \phi^* \to \psi^*$ für geeignete freie Varianten ϕ^* und ψ^*. (Warum?)

Die IV garantiert hier eine freie Ableitung $\mathfrak{D}_1^*$ mit Endformel ψ^*, wobei $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1^*)$ freie Variante von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ ist.

Betrachte die folgende Ableitung:

$$\mathcal{F}_0 \quad \simeq_{\mathrm{def}} \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1^* \\ \psi^*\end{matrix}}{\phi^* \to \psi^*}\,(\star)$$

Bei $(\star)$ wird keine (!) offene Annahme ϕ^* gelöscht.

$\mathrm{Hyp}(\mathcal{F}_0) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1^*)$. Falls $\mathrm{Hyp}(\mathcal{F}_0)$ eine freie Variante von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ ist, ist $\mathcal{F}_0$ die gesuchte Ableitung.

Ansonsten muss das Folgende gelten:

Jedenfalls gibt es für jedes $\sigma \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ nach IV eine freie Variante $\sigma^* \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1^*) = \mathrm{Hyp}(\mathcal{F}_0)$. Also muss es Formeln $\sigma \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{F}_0)$ geben, die keine Varianten von Formeln $\tau \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ sind.

Für diese Formeln σ gilt wieder mit IV, dass sie Varianten von Formeln $\tau \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ sind. Entsprechend müssen diese Formeln τ in $\mathfrak{D}$ im letzten Schritt gelöscht worden sein. Damit ist jede dieser Formeln τ der Form ϕ. Das bedeutet: Jedes störende σ (es können mehrere verschiedene sein), ist eine freie Variante von ϕ.

Damit sind die σ alle auch Varianten von ϕ^*, der freien Variante von ϕ.

Der Satz über einfache Ableitbarkeiten von Varianten gewährleistet eine einfache Ableitung $\mathfrak{D}_\sigma$ für $\phi^* \vdash \sigma$.

Aus der Einfachheit folgt mit der Freiheit von ϕ^* und σ, dass in $\mathfrak{D}_\sigma$ weder über v noch über die freien Variablen von s quantifiziert wird. Damit ist jedes $\mathfrak{D}_\sigma$ eine freie Ableitung.

Nun entstehe die Ableitung $\mathcal{F}$ aus der Ableitung $\mathcal{F}_0$, indem über jede der störenden Formeln σ die Teilableitung $\mathfrak{D}_\sigma$ gesetzt wird. Zudem werden alle Vorkommen von ϕ^* als offene Annahme bei der letzten Implikationseinführung gelöscht.

Damit gilt für jede Formel $\sigma \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{F})$: σ ist eine freie Variante einer Formel $\tau \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$. Insbesondere ist also $\mathrm{Hyp}(\mathcal{F})$ eine freie Variante von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ und $\mathcal{F}$ hat die Endformel $(\phi \to \psi)^*$. Da alle $\mathfrak{D}_\sigma$ frei sind, ist auch $\mathcal{F}$ frei.

$$\mathfrak{D} \doteq \cfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1\\ \phi(x)\end{array}}{\forall y : \phi(y)} \qquad \text{Es gilt:} \quad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1).$$

Sei $(\forall y : \phi(y))^*$ beliebige freie Variante von $\forall y : \phi(y)$.

Dann ist $(\forall y : \phi(y))^* \doteq \forall z : \phi^*(z)$ für eine geeignete Variable z und eine geeignete freie Variante $\phi^*(x)$ von $\phi(x)$.

Nach IV gibt es eine freie Ableitung $\mathfrak{D}_1^*$ für $\phi^*(x)$ mit $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1^*)$ freie Variante von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

Die Nebenbedingungen für $\mathfrak{D}$ verlangen, dass x nicht frei in den offenen Annahmen von $\mathfrak{D}$ vorkommt. Da Varianten dieselben freien Variablen haben, wie die ursprüngliche Formel, gilt:

$$\text{Für jedes } \psi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1^*) : \quad x \notin \mathrm{FV}(\psi)$$

Damit ist eine Allquantor-Einführung für x in $\mathfrak{D}_1^*$ erlaubt. Da $\forall z : \phi^*(z)$ freie Variante von $\forall y \phi(y)$ ist, ist die folgende Ableitung frei:

$$\mathcal{F} \quad \doteq_{\mathrm{def}} \quad \cfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1^*\\ \phi^*(x)\end{array}}{\forall z : \phi^*(z)}$$

$\mathrm{Hyp}(\mathcal{F}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1^*)$ ist nach IV freie Variante von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

$$\mathfrak{D} \doteq \cfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1\\ \forall x : \phi(x)\end{array}}{\phi(t)} \qquad \text{Es gilt:} \quad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1).$$

Sei $\phi^*(t)$ beliebige freie Variante von $\phi(t)$.

Damit ist auch $\phi^*(x)$ freie Variante von $\phi(x)$ und t ist frei einsetzbar für x in ϕ.

Es gibt eine Variable z, so dass $\forall z : \phi^*(z)$ freie Variante von $\forall x : \phi(x)$ ist.

Damit gibt es geeignete Ableitung $\mathfrak{D}_1^*$ mit $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1^*)$ ist freie Variante von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

Betrachte:

$$\mathcal{F} \quad \simeq_{\text{def}} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1^* \\ \forall z : \phi^*(z)\end{array}}{\phi^*(t)}$$

$\mathcal{F}$ ist freie Ableitung mit Endformel $\phi^*(t)$ und Hyp($\mathcal{F}$) ist freie Variante von Hyp($\mathfrak{D}$).

Insgesamt wurde die Behauptung gezeigt.

Q.E.D.

1.8 Theorem (Substitutionssatz): Sei $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathfrak{L}$ Formelmenge. Ist in jeder Formel $\psi \in \Gamma \cup \{\phi\}$ ein Term s frei einsetzbar für eine Variable v, dann gilt:

$$\Gamma \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Gamma[s/v] \vdash \phi[s/v]$$

Beweis.

$\Gamma \vdash \phi$ bedeutet: Es gibt eine endliche Teilmenge $\Sigma \subseteq \Gamma$ und eine Ableitung $\mathfrak{D}$ mit Endformel ϕ und Hyp($\mathfrak{D}$) $= \Sigma$.

Sei $\phi^\star$ beliebige freie Variante ϕ. (Es gibt immer freie Varianten!)

Mit dem Satz über die Existenz freier Ableitungen gibt es eine freie Ableitung $\mathcal{F}$ mit der freien Endformel ϕ^* so, dass Hyp($\mathcal{F}$) freie Variante von Hyp($\mathfrak{D}$) ist.

Da nach Voraussetzung in jedes $\sigma \in$ Hyp($\mathfrak{D}$) der Term s für die Variable v frei einsetzbar ist, sind Hyp($\mathcal{F}$)$[s/v] = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ und Hyp($\mathfrak{D}$)$[s/v]$ Varianten.

Mit dem Satz über einfache Ableitbarkeit gibt es für jedes $\psi_k \in$ Hyp($\mathcal{F}$)$[s/v]$ eine Formel $\sigma_k \in$ Hyp($\mathfrak{D}$)$[s/v]$ und eine einfache Ableitung $\mathfrak{D}_k$ für: $\sigma_k \vdash \psi_k$

Desweiteren ist auf $\mathcal{F}$ der Satz über Substituierbarkeit in freien Ableitungen anwendbar. Es gilt also vermöge $\mathcal{F}[s/v]$:

$$\text{Hyp}(\mathcal{F})[s/v] \vdash \phi^\star[s/v]$$

Ebenfalls ist $\phi^*[s/v]$ eine Variante von $\phi[s/v]$, da s für v frei einsetzbar ist in ϕ. Also vermöge $\mathfrak{D}_\phi$ auch: $\phi^*[s/v] \vdash \phi[s/v]$ einfach.

Betrachte nun folgenden Baum:

$$\dfrac{\dfrac{\sigma_1}{\psi_1}\,(\mathfrak{D}_1) \qquad \ldots \qquad \dfrac{\sigma_n}{\psi_n}\,(\mathfrak{D}_n)}{\begin{array}{c}\mathcal{F}[s/v] \\ \dfrac{\phi^*[s/v]}{\phi[s/v]}\,(\mathfrak{D}_\phi)\end{array}}$$

Für jedes $1 \leq k \leq n$ gilt: σ_k und ψ_k sind Varianten voneinander. Insbesondere haben sie dieselben freien Variablen. Damit kann in $\mathcal{F}[s/v]$ kein Variablenkonflikt entstehen. Also ist der Baum bis $\phi^*[s/v]$ tatsächlich eine Ableitung. Sei m größter Index aller Variablen in diesem Teilbaum bis $\phi^*[s/v]$.

Ersetze im Teilbaum $\mathfrak{D}_\phi$ – es gilt: $\mathfrak{D}_\phi$ ist eine einfache Ableitung – jede neu eingeführte freie Variable x_l durch x_{l+m+1}. Nenne das Resultat der Ersetzung

$\mathcal{G}$. Durch die Ersetzung der Variablen ist gewährleistet, dass $\mathcal{G}$ eine Ableitung ist. $\text{Hyp}(\mathcal{G}) \subseteq \text{Hyp}(\mathfrak{D})[s/v] \subseteq \Gamma[s/v]$ und die Endformel von $\mathcal{G}$ ist $\phi[s/v]$.

Damit gilt $\Gamma[s/v] \vdash \phi[s/v]$ und der Substitutionssatz ist bewiesen. q.e.d.

Bemerkung (Freiheit und Substitutionssatz): Die beiden Begriffe „Freie Einsetzbarkeit“ und „Freiheit“ sind eng verwandt. Freie Varianten garantieren eine freie Einsetzbarkeit. Während die freie Einsetzbarkeit minimale Anforderungen gewährleistet, dass durch die Substitution die Wahrheit der Formel invariant bleibt, hat der stärkere Begriff der Freiheit den Vorteil, dass man dadurch leichter über Ableitungen argumentieren kann. Das wurde im Substitutionssatz ausgenutzt.

Wir haben Prämissen mit freier Einsetzbarkeit in freie Formeln umgeformt; für diese konnten wir die benötigte Ableitbarkeit beweisen. Anschließend wurde das Ergebnis wieder geeignet zu einer Formel mit lediglich freier Einsetzbarkeit umgeformt.

Wesentlich zum Erfolg der Umformungen haben zwei Tatsachen beigetragen: zum Einen haben Varianten dieselben freien Variablen, zum anderen erfolgen die Umformungen durch einfache Ableitungen. Letzteres wurde erst dadurch möglich, dass im Kalkül sowohl bei der Alleinführung als auch bei der Allbeseitigung eine Umbenennung der Variablen erlaubt ist.

Bemerkung (Sprachen mit Parametern): Gelegentlich werden in der Beweistheorie formale Sprachen betrachtet, in denen schon beim Sprachaufbau die quantifizierten Variablen strikt von den freien unterschieden werden. Letztere werden dann Parameter genannt. (Etwa: x_n für die quantifizierten Variablen und a_n für die freien.) Dies würde den Beweis des Substitutionssatzes vereinfachen:

Man könnte oben auf die Einführung von einfachen Ableitungen, in denen künstlich diese Unterscheidung von freien und quantifizierten Variablen erzwungen wird, verzichten. Ebenfalls sind die Variablenbedingungen im Kalkül trivial erfüllt – keine freie Variable kann quantifiziert werden, freie Einsetzbarkeit ist immer gewährleistet. Dies vereinfacht das Zusammensetzen von Teilableitungen und macht syntaktische Beweise wesentlich einfacher.

Bemerkung (Unterschied zu v. Dalen): Im Kalkül bei v. Dalen ist lediglich bei der Allbeseitigung eine Umbenennung der Variablen erlaubt, nicht aber bei der Alleinführung.

(1) *Problemfall:* Damit gilt im Kalkül nach v. Dalen aufgrund der Variablenbedingung bei der Alleinführung:

$$x \doteq y \wedge \forall v \forall w (v \doteq w) \nvdash x \doteq y \wedge \forall x \forall y (x \doteq y)$$

(2) *Vollständigkeit des Kalküls:* V. Dalen beweist für seinen Kalkül die Vollständigkeit. Dies ist kein Widerspruch, da er sich dabei nur auf Aussagen bezieht. Dort ist der schwächere Kalkül tatsächlich vollständig.

Index

Definitionen und Begriffe

Wichtige Sätze