**Maximale Formelvorkommen, Kontraktion/Reduktion**

Welche Formelvorkommen sind maximal?

Normalisieren Sie die folgende Ableitung $\mathcal{D}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge B^{\,(2)}}{A}\,(\wedge\,\mathsf{E})}{\boxed{C \to A}}\,(\to\mathsf{I}) \qquad \dfrac{B \to C^{\,(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge B^{\,(2)}}{A}\,(\wedge\,\mathsf{E}) \quad \dfrac{A \wedge B^{\,(2)}}{B}\,(\wedge\,\mathsf{E})}{\boxed{A \wedge B}}\,(\wedge\,\mathsf{I})}{B}\,(\wedge\,\mathsf{E})}{C}\,(\to\mathsf{E})}{A}\,(\to\mathsf{E})}{(B \to C) \to A}\,(\to\mathsf{I})_{(1)}}{(A \wedge B) \to ((B \to C) \to A)}\,(\to\mathsf{I})_{(2)}$$

$\mathcal{D}$ kontrahiert mit (i) zu

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge B^{\,(2)}}{A}\,(\wedge\,\mathsf{E})}{\boxed{C \to A}}\,(\to\mathsf{I}) \qquad \dfrac{B \to C^{\,(1)} \qquad \dfrac{A \wedge B^{\,(2)}}{B}\,(\wedge\,\mathsf{E})}{C}\,(\to\mathsf{E})}{A}\,(\to\mathsf{E})}{(B \to C) \to A}\,(\to\mathsf{I})_{(1)}}{(A \wedge B) \to ((B \to C) \to A)}\,(\to\mathsf{I})_{(2)}$$

und mit (ii) zu $\mathcal{D}'$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge B^{\,(1)}}{A}\,(\wedge\,\mathsf{E})}{(B \to C) \to A}\,(\to\mathsf{I})}{(A \wedge B) \to ((B \to C) \to A)}\,(\to\mathsf{I})_{(1)}$$

Die Ableitung $\mathcal{D}'$ enthält kein maximales Formelvorkommen, ist also in Normalform.

Statt zuerst mit (i) zu kontrahieren, hätte eine Umformung mit (ii) die Ableitung $\mathcal{D}$ in einem Schritt reduziert.

## Notwendigkeit der Parameterseparierheit

Warum sind in der untenstehenden (linken) Ableitung ($a$ komme in keiner Annahme in $\mathcal{D}'$ vor, von der $P(a,a)$ abhängt) Parameter nicht separiert?

> In der Ableitung sind Parameter nicht separiert, da der Eigenparameter $b$ der ersten ($\forall$ I) nicht nur über dieser Anwendung, sondern auch darunter vorkommt.

Kontrahieren Sie die linke Ableitung, um das maximale Formelvorkommen $\forall z P(z,z)$ (eingerahmt) zu beseitigen.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\left.\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ (\forall\,\mathsf{E})\,\dfrac{\forall x P(x,a)}{P(b,a)}\\ (\forall\,\mathsf{I})\,\dfrac{\phantom{P(b,a)}}{\forall y P(y,a)}\end{array}\right\}\mathcal{D}}{P(a,a)}\,(\forall\,\mathsf{E})}{\boxed{\forall z P(z,z)}}\,(\forall\,\mathsf{I})}{P(b,b)}\,(\forall\,\mathsf{E})
\quad \rhd_1 \quad
\left.\begin{array}{c}\mathcal{D}'[a/b]\\ \dfrac{\forall x P(x,b)}{P(b,b)}\\ \text{↯}\,\dfrac{\phantom{P(b,b)}}{\forall y P(y,b)}\end{array}\right\} = \mathcal{D}[a/b]
\atop
\dfrac{\phantom{\forall y P(y,b)}}{P(b,b)}
$$

Warum ist die resultierende Ableitung *nicht* korrekt?

> Von $P(b,b)$ darf mit ($\forall$ I) nicht zu $\forall y P(y,b)$ übergegangen werden.

Stellen Sie in der linken Ableitung erst Parameterseparierheit her, und kontrahieren Sie diese Ableitung.

$$
\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x,a)}{P(b,a)}}{\forall y P(y,a)}}{P(a,a)}}{\boxed{\forall z P(z,z)}}}{P(b,b)}\end{array}
\quad \overset{\text{Parameter-}}{\underset{\rightsquigarrow}{\text{separierung}}} \quad
\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x,a)}{P(b,a)}}{\forall y P(y,a)}}{P(a,a)}}{\boxed{\forall z P(z,z)}}}{P(c,c)}\end{array}
\quad \rhd_1 \quad
\begin{array}{c}\mathcal{D}'[a/c]\\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x,c)}{P(b,c)}}{\forall y P(y,c)}}{P(c,c)}\end{array}
$$

> Die resultierende Ableitung ist korrekt.