Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik I — Blatt 2

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2012/13**

Aufgabe 1 (2 + 2 + 3 Punkte)

Prüfen Sie mithilfe von Wahrheitstafeln, ob die folgenden Formeln und Formelschemata Tautologien, Kontradiktionen oder kontingente Formeln sind.

(a) $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$

(b) $((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi$

(c) $(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_3) \to (p_2 \vee p_3))$

(Halten Sie sich beim Aufbau der Wahrheitstafeln an das Beispiel auf S. 15 im Skript; beachten Sie insbesondere eine sinnvolle Reihenfolge der Zeilen.)

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Zeigen Sie: $\varphi \wedge \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Aufgabe 3 (1 + 2 + 2 Punkte)

Es sei $\mathrm{PROP}_{\wedge,\vee}$ die Menge aller Formeln, in denen als Junktoren nur $\wedge$ und $\vee$ vorkommen können.

(a) Geben Sie eine induktive Definition der Menge $\mathrm{PROP}_{\wedge,\vee}$ an.

(b) Geben Sie zwei Belegungen v bzw. w an, so dass alle Formeln aus $\mathrm{PROP}_{\wedge,\vee}$ mit 0 bzw. mit 1 bewertet werden. Zeigen Sie dies mit dem zugehörigen Induktionsprinzip.

(c) Welche Formeln aus $\mathrm{PROP}_{\wedge,\vee}$ sind erfüllbar, welche kontingent, welche kontradiktorisch und welche tautologisch?

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \sigma$, dann $\varphi \models \sigma$.

(b) $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1$ genau dann, wenn $[\![\varphi]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Geben Sie eine exakte rekursive Definition der simultanen Substitution an, d. h. definieren Sie rekursiv: $\varphi[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_n/p_n]$.

Aufgabe 6 (5 Zusatzpunkte)

Beweisen Sie: $\varphi_1 \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \varphi_2 \implies \varphi_1[\psi/p] \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \varphi_2[\psi/p]$.

Abgabe der Aufgaben am 15.11. nach der Vorlesung oder als PDF.