Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik II

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 1**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Geben Sie Ableitungen an zu:

a) $\neg(\phi \wedge \neg\psi), \phi \vdash \psi$ (1 Punkt)

b) $\neg\phi \vdash (\phi \to \psi) \leftrightarrow \neg\phi$ (1 Punkt)

c) $\vdash [(\phi \to \psi) \to (\phi \to \sigma)] \to [(\phi \to (\psi \to \sigma))]$ (2 Punkte)

d) $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$ (2 Punkte)

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Geben Sie Ableitungen an zu:

a) $\vdash \forall x \forall y \phi(x, y) \to \forall x \phi(x, x)$ (1 Punkt)

b) $\vdash \forall x(\phi \to \psi(x)) \leftrightarrow (\phi \to \forall x \psi(x))$, wobei $x \notin FV(\phi)$ (1 Punkt)

c) $\vdash \neg\forall x \phi(x) \leftrightarrow \exists x \neg\phi(x)$ (1 Punkt)

d) $\vdash \exists x(\phi(x) \to \psi) \leftrightarrow (\forall x \phi(x) \to \psi)$, falls $x \notin FV(\psi)$ (1 Punkt)

e) $\vdash \exists x(\phi \to \psi(x)) \leftrightarrow (\phi \to \exists x \psi(x))$, falls $x \notin FV(\phi)$ (1 Punkt)

f) $\vdash \forall xyz(x \neq y \to x \neq z \vee y \neq z)$ (1 Punkt)

g) $\forall x(x = a \vee x = b \vee x = c) \vdash \forall x \phi(x) \leftrightarrow (\phi(a) \wedge \phi(b) \wedge \phi(c))$, wobei a, b, c Konstanten sind (1 Punkt)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Geben Sie eine rekursive Definition der Funktion *Hyp*, die jeder Ableitung $\mathcal{D}$ deren Menge von Hypothesen $Hyp(\mathcal{D})$ zuordnet.

Aufgabe 4 (4 Punkte – Zusatzaufgabe)

Analog zum Substitutionsoperator für Aussagen wird ein Substitutionsoperator für Ableitungen definiert. $\mathcal{D}[\phi/p]$ erhält man durch Ersetzung jedes Vorkommens von p in jeder Aussage in $\mathcal{D}$ durch ϕ. Geben Sie eine rekursive Definition von $\mathcal{D}[\phi/p]$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}[\phi/p]$ eine Ableitung ist, falls $\mathcal{D}$ eine Ableitung ist, und dass $\Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \Gamma[\phi/p] \vdash \sigma[\phi/p]$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Beweisen Sie das Substitutionstheorem: $\vdash (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2) \to (\psi[\phi_1/p] \leftrightarrow \psi[\phi_2/p])$.

Hinweis: Verwenden Sie Induktion über ψ.

(Aufgaben aus van Dalen, Logic and Structure, 4. Aufl., S. 39f., 96, 98f., 102)