Peter Schroeder-Heister / Bartosz Więckowski
Seminar: Modallogik
Sommersemester 2003

Übungsblatt 7

1. Zeigen Sie, dass die Modalverknüpfungen $\neg\Diamond\Box\neg\Box\Diamond\neg\Diamond$ und $\neg\Diamond$ in **S5** (= **KT5**) äquivalent sind. (`1 Punkt`)

2. Zeigen Sie, dass das System **KD45** höchstens sechs verschiedene Modalverknüpfungen hat. (`2 Punkte`)

3. Zeigen Sie, dass die Systeme **S5** und **KD45** verschieden sind. (`2 Punkte`)

4. Seien m und n natürliche Zahlen und sei $m < n$. Das Modell $\mathcal{M} = (S, R, V)$ mit

   - $S = \{s_0, ..., s_m, ...s_n\}$ (wobei für alle $s_i, s_j \in S, s_i \neq s_j$);
   - R besteht zwischen Punkten $s \in S$, die identisch oder angrenzend sind (d.h. $s_i R s_j$ gdw $i = j$ oder $i = j + 1$ oder $j = i + 1$);
   - $V(p) = \{s_0, ..., s_m\}$

   ist reflexiv und symmetrisch. Es falsifiziert $\Box^m p \to \Box^n p$. Beweisen Sie die ($\leftarrow$) Richtung für das Schema

   $\Box^m A \leftrightarrow \Box^n A$,

   indem Sie zeigen, dass es ein serielles und transitives Modell gibt, das für jede natürliche Zahl $n > m \geq 0$ eine Instanz der Umkehrung dieses Schemas falsifiziert. Der Beweis zeigt, dass die Anzahl verschiedener Modalverknüpfungen in **KD4** (und in den Systemen, die darin enthalten sind) unendlich groß ist. (`2 Punkte`)

5. Sei $\Gamma \subseteq Fma(\Phi)$. Zeigen Sie

   (a) Wenn $\Gamma \nvdash_{\mathbf{S}} \bot$ und $\Delta \subseteq \Gamma$, dann $\Delta \nvdash_{\mathbf{S}} \bot$. (`2 Punkte`)

   (b) $\Gamma \cup \{A\} \nvdash_{\mathbf{S}} \bot$ gdw $\Gamma \nvdash_{\mathbf{S}} \neg A$. (`2.5 Punkte`)

   (Greifen Sie dabei auf geeignete Theoreme aus Übung 2.2 in [Goldblatt, 1992: 18] zurück.)

6. Sei $\Gamma \subseteq Fma(\Phi)$ eine **S**-maximale Menge. Zeigen Sie:

   (a) $\neg\top \notin \Gamma$ (`2 Punkte`)

   (b) $(A \wedge B) \in \Gamma$ gdw $A \in \Gamma$ und $B \in \Gamma$. (`2.5 Punkte`)

   (Greifen Sie dabei auf geeignete Theoreme aus Übung 2.2 in [Goldblatt, 1992: 18] und aus Übung 2.3 in [Goldblatt, 1992: 19] zurück.)

7. Beweisen Sie, dass Lindenbaums Lemma (wenn $\Gamma \nvdash_{\mathbf{S}} \perp$, dann gibt es ein **S**-maximales Δ, mit $\Gamma \subseteq \Delta$) aus seinem Korollar ($\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} A$ gdw für jede **S**-maximale Menge Δ, mit $\Gamma \subseteq \Delta$, $A \in \Delta$) folgt. (Greifen Sie dabei auf geeignete Theoreme aus Übung 2.2 in [Goldblatt, 1992: 18] und aus Übung 2.3 in [Goldblatt, 1992: 19] zurück.) (`4 Punkte`)

Abgabe in der Sitzung am 2. Juli 2003.