Mathematische Logik I — WS 2016/17

Übungsblatt 9 — **Abgabe am 23.12.** — **T. Piecha**

Aufgabe 1 (7 Punkte)

(a) Definieren Sie Strukturbäume für Terme. (2 Punkte)

(b) Erweitern Sie die Definition von Strukturbaum aus der Aussagenlogik für quantorenlogische Formeln. (2 Punkte)

(c) Geben Sie unter Verwendung von (a) und (b) einen vollständigen Strukturbaum an für:

$$(\forall x_0(\dot{+}(x_0, \dot{c}_0) \doteq x_0)) \wedge (\exists x_1 \neg(\forall x_2(\dot{+}(x_1, x_2) \doteq \dot{c}_0)))$$ (3 Punkte)

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Betrachten Sie die Signatur $\langle\{3\}, \{1 \mapsto 2\}, \{2 \mapsto 2\}\rangle$ und die zugehörige formale Sprache $\mathscr{L}$. Geben Sie eine kurze Begründung an, ob es sich bei den folgenden Ausdrücken um Terme oder Formeln von $\mathscr{L}$ handelt (es gelten die Konventionen zur Klammerersparnis):

(a) $\dot{c}_1 \wedge x_1 \to x_0$ (1 Punkt)

(b) $\exists x_0 \dot{R}_2(\dot{f}_1(x_0, x_0), \dot{f}_1(x_0, x_0))$ (1 Punkt)

(c) $x_0 = c_3 \neq x_0 = \dot{f}_1(c_3, c_3)$ (1 Punkt)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Alphabet für Sprachen $\mathscr{L}$ folgender Signaturen an. Geben Sie zusätzlich jeweils sowohl eine offene als auch eine geschlossene Formel an, in der alle nichtlogischen Zeichen der Sprache vorkommen. Bestimmen Sie außerdem für jede Signatur einen offenen und einen geschlossenen Term, sofern vorhanden.

(a) $\langle\varnothing, \{\pi \mapsto 2, \pi^2 \mapsto 1\}, \{0 \mapsto 2, 1 \mapsto 2\}\rangle$ (2 Punkte)

(b) $\langle\varnothing, \varnothing, \{4 \mapsto 1\}\rangle$ (2 Punkte)

(c) $\langle\{0, 1\}, \{2 \mapsto 1\}, \varnothing\rangle$ (2 Punkte)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die Sprache $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}}$ der Peano-Arithmetik, die aus der Konstanten $\dot{0}$, dem einstelligen Funktionszeichen $\dot{f}_s$ und den beiden zweistelligen Funktionszeichen $\dot{+}$ und $\dot{\times}$ besteht.

Drücken Sie die folgenden Eigenschaften in $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}}$ aus. Setzen Sie dabei voraus, dass $\dot{0}$ als Null, $\dot{f}_s$ als Nachfolgerfunktion, $\dot{+}$ als Addition und $\dot{\times}$ als Multiplikation auf den natürlichen Zahlen gelesen werden kann. Das Gleichheitszeichen $\doteq$ wird als Gleichheit zwischen natürlichen Zahlen gelesen. (Geben Sie $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}}$-Formeln an, die als einzige freie Variablen x und y bzw. nur x enthalten.)

(a) x ist echt kleiner als y (1 Punkt)

(b) x teilt y (1 Punkt)

(c) x ist eine Primzahl (2 Punkte)