Mathematische Logik I — WS 2016/17

Übungsblatt 10 — **Abgabe am 13.1.** — **T. Piecha**

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Wir betrachten die durch folgende Signaturen gegebenen Sprachen $\mathscr{L}$ (vgl. Übungsblatt 9, Aufgabe 3):

(a) $\langle \varnothing, \{\pi \mapsto 2, \pi^2 \mapsto 1\}, \{0 \mapsto 2, 1 \mapsto 2\}\rangle$ (1 Punkt)

(b) $\langle \varnothing, \varnothing, \{4 \mapsto 1\}\rangle$ (1 Punkt)

(c) $\langle \{0, 1\}, \{2 \mapsto 1\}, \varnothing\rangle$ (1 Punkt)

Geben Sie jeweils eine $\mathscr{L}$-Struktur an.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Gegeben sei die Sprache der Signatur $\langle \{1\}, \{+ \mapsto 2\}, \{\leq \mapsto 2\}\rangle$ und eine entsprechende Struktur $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, 1, +, \leq\rangle$. Wir schreiben $\dot{1}$, $\dot{+}$ und $\dot{\leq}$ für $\dot{c}_1$, $\dot{f}_+$ bzw. $\dot{R}_\leq$ und verwenden Infix-Notation.
Es sei v eine Belegung mit $v(x_0) = 2$ und $v(x_1) = 4$. Bestimmen Sie durch schrittweises Auswerten den Wert von:

(a) $[\![((\dot{1} \dot{+} \dot{1}) \dot{+} x_0) \dot{+} x_1]\!]^{\mathfrak{A}}_v$ (2 Punkte)

(b) $[\![((x_0 \dot{+} x_1) \dot{\leq} (\dot{1} \dot{+} x_1)) \vee ((\dot{1} \dot{+} \dot{1}) \dot{\leq} x_0) \to \neg(\dot{1} \dot{\leq} x_0)]\!]^{\mathfrak{A}}_v$ (3 Punkte)

(c) $[\![(\exists x_0(\forall x_1(x_0 \dot{\leq} x_1)))]\!]^{\mathfrak{A}}_v$ (3 Punkte)

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Die Sprache $\mathscr{L}$ umfasse ein einstelliges Funktionszeichen $\dot{f}$ und ein zweistelliges Funktionszeichen $\dot{g}$. Wir betrachten drei $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ über der Menge $\mathbb{N}$. Dabei interpretieren wir $\dot{g}$ überall durch die Addition; $\dot{f}$ interpretieren wir (für $n \in \mathbb{N}$)

– in $\mathfrak{A}_1$ durch die Abbildung $n \mapsto 3$,

– in $\mathfrak{A}_2$ durch die Abbildung $n \mapsto \max(n^2 + 2, 18)$ und

– in $\mathfrak{A}_3$ durch die Abbildung $n \mapsto n \bmod 6$.

Überprüfen Sie, welche der beiden Formeln φ und ψ in welchen Strukturen gültig sind:

(a) $\varphi :\simeq \forall x \exists y(\dot{f}(\dot{g}(x, y)) \doteq \dot{f}(x))$ (3 Punkte)

(b) $\psi :\simeq \exists y \forall x(\dot{f}(\dot{g}(x, y)) \doteq \dot{f}(x))$ (3 Punkte)

Wenden Sie dazu zunächst die Klauseln für die Quantoren an (s. Definition 9.4 (6)). Zur Auswertung von $\dot{f}(\dot{g}(x, y)) \doteq \dot{f}(x)$ darf verkürzt argumentiert werden.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Zeigen Sie für Formeln $\varphi, \psi \in \mathscr{L}$, dass für jede $\mathscr{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$ und $\mathfrak{A} \models \varphi$, dann $\mathfrak{A} \models \psi$.