Mathematische Logik I — WS 2016/17

Übungsblatt 14 — keine Abgabe — T. Piecha

Aufgabe 1
Geben Sie den Strukturbaum, sämtliche Teilformeln sowie den Rang der folgenden Aussage an:

$$\neg(p_1 \to ((\neg p_3 \land p_1) \lor p_2)) \to p_3$$

Aufgabe 2
Ermitteln Sie mithilfe einer Wahrheitstafel, ob die folgende Aussage allgemeingültig ist:

$$(p_1 \to p_2) \land (p_2 \to p_3) \to (p_1 \to p_3)$$

Aufgabe 3
Die zweistellige aussagenlogische Verknüpfung $\star$ werde durch die Funktion $f_\star$ mit der folgenden Wahrheitstafel interpretiert:

x	y	$f_\star(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Zeigen Sie, dass $\{\star\}$ keine funktional vollständige Menge ist.

Aufgabe 4
Geben Sie eine konjunktive Normalform an für $p \to (\neg q \land p)$.

Aufgabe 5
Zeigen Sie in NK: $\varphi \to (\psi \to \sigma) \vdash \psi \to (\varphi \to \sigma)$.

Aufgabe 6
Erläutern Sie:

(a) Wann heißt eine Aussagenmenge maximal konsistent?

(b) Wie konstruiert man zu einer konsistenten Aussagenmenge eine maximal konsistente Erweiterung?

Aufgabe 7
Zeigen Sie: Eine konsistente Menge aussagenlogischer Formeln Γ ist maximal konsistent genau dann, wenn für jedes φ gilt: entweder $\varphi \in \Gamma$ oder $\neg\varphi \in \Gamma$.

Aufgabe 8
Zeigen Sie: $\varphi \to \psi$ ist genau dann in einer maximal konsistenten Formelmenge enthalten, wenn nicht zugleich φ und $\neg\psi$ darin enthalten sind.

Aufgabe 9
Gegeben sei die Sprache der Signatur $\langle\{1\},\{- \mapsto 2\},\{\leq \mapsto 2\}\rangle$ und eine entsprechende Struktur $\mathfrak{A} = \langle\mathbb{Z}, 1, -, \leq\rangle$. Wir schreiben $\dot{1}$, $\dot{-}$ und $\dot{\leq}$ für $\dot{c}_1$, $\dot{f}_-$ bzw. $\dot{R}_\leq$ und verwenden Infix-Notation. Es sei v eine Variablenbelegung mit $v(x_1) = 1$ und $v(x_2) = 2$.

Bestimmen Sie durch schrittweises Auswerten den Wahrheitswert von

$$\llbracket((x_1 \mathbin{\dot{-}} x_2) \mathbin{\dot{\leq}} (\dot{1} \mathbin{\dot{-}} x_1)) \to \neg(\dot{1} \doteq x_1)\rrbracket^{\mathfrak{A}}_v$$

Aufgabe 10
Formen Sie die folgende Formel schrittweise in eine logisch äquivalente pränexe Normalform um:

$$\neg\forall x\varphi(x) \to \exists x(\varphi(x) \to \forall y\varphi(y))$$

(Die Formel φ sei quantorenfrei.)

Aufgabe 11
Zeigen Sie: $\vDash \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$.

Aufgabe 12
Zeigen Sie in NK: $\vdash \exists x\exists y\varphi(x, y) \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi(x, y)$.

Aufgabe 13
Erläutern Sie:

(a) Was ist eine Theorie?

(b) Was ist eine Henkin-Theorie?

(c) Was besagt der Kompaktheitssatz?
Beweisen Sie ihn mithilfe des Vollständigkeitssatzes.

Aufgabe 14
Leiten Sie den Vollständigkeitssatz aus dem Modellexistenzsatz her.

Aufgabe 15
Es seien T_1 und T_2 Theorien. Zeigen Sie:

(a) $T_1 \cap T_2$ ist ebenfalls eine Theorie.

(b) $T_1 \cup T_2$ ist im allgemeinen keine Theorie. (Geben Sie ein Gegenbeispiel an.)

Aufgabe 16
Es sei T eine vollständige Henkin-Theorie und $\varphi(x)$ eine Formel mit $\mathrm{FV}(\varphi) = \{x\}$.
Zeigen Sie: Falls $\varphi(t) \in T$ für jeden geschlossenen Term t, dann auch $\forall x\varphi(x) \in T$.