Mathematische Logik I – Übungsaufgaben **Blatt 8**

Dr. Michael Arndt **WS 2015/16**

Aufgabe 1 (1+1+1+1+1 Punkte)

Gegeben sei die Signatur $\big\langle \{0\},\ \{1 \mapsto 2\},\ \{2 \mapsto 2\} \big\rangle$ und die zugehörige formale Sprache $\mathcal{L}$. Geben Sie eine kurze Begründung an, ob es sich bei den folgenden Ausdrücken um Terme oder Formeln von $\mathcal{L}$ handelt. Dabei gelten die Konventionen zur Klammerersparnis.

a) $\dot{c}_0 \wedge x_1 \to x_0$

b) $\exists x_1 \dot{R}_2(\dot{f}_1(\dot{c}_0, x_1), \dot{f}_1(x_0, \dot{c}_0))$

c) $\forall x_1 \exists x_2 \neg(\dot{f}_1(\dot{f}_1(x_1, \dot{c}_0), x_2) \doteq x_2) \vee \neg\exists x_2 \dot{R}_2(\dot{c}_0, x_2)$

d) $\dot{c}_0 = \dot{f}_1(\dot{c}_0, \dot{c}_0) \vee \dot{c}_0 \neq \dot{f}_1(\dot{c}_0, \dot{c}_0)$

e) $\forall x_0(\dot{R}_2(\dot{f}_1(x_0, \dot{c}_0)) \to \exists x_0 \dot{R}_2(\dot{c}_0, \neg\dot{c}_0))$

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Geben Sie jeweils das formale Alphabet der Sprache folgender Signaturen an. Geben Sie ferner in jedem Fall sowohl eine offene als auch eine geschlossene Formel an, in der alle nichtlogischen Zeichen der Sprache vorkommen. Geben Sie zudem für jede Signatur einen offenen und einen geschlossenen Term an, sofern dies möglich ist.

a) $\big\langle \emptyset,\ \{\pi \mapsto 2, e \mapsto 1\},\ \{0 \mapsto 2, 1 \mapsto 2\} \big\rangle$

b) $\big\langle \emptyset,\ \emptyset,\ \{4 \mapsto 1\} \big\rangle$

c) $\big\langle \{0, 1\},\ \{a \mapsto 1\},\ \emptyset \big\rangle$

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Sprache der Signatur $\big\langle \{1\}, \{+ \mapsto 2\}, \{\leq \mapsto 2\} \big\rangle$ zur Struktur $\mathfrak{A} =_{\text{def}} \langle \mathbb{N}, 1, +, \leq \rangle$. Wir schreiben $\dot{+}$, $\dot{\leq}$, $\dot{1}$ für $\dot{f}_+$, $\dot{R}_\leq$, $\dot{c}_1$ und verwenden Infix-Notation. Sei v eine Belegung mit $x_0 \mapsto 2, x_1 \mapsto 5$. Bestimmen Sie durch schrittweises Auswerten die folgenden Werte:

a) $[\![(x_0 \dot{+} \dot{1}) \dot{+} (\dot{1} \dot{+} x_1)]\!]^{\mathfrak{A}}_v$

b) $[\![\forall x_1(x_1 \dot{\leq} x_0 \to \neg((x_1 \dot{+} \dot{1}) \dot{\leq} x_0)]\!]^{\mathfrak{A}}_v$

c) $[\![\exists x_0(\forall x_1(x_0 \dot{\leq} x_1))]\!]^{\mathfrak{A}}_v$