Mathematische Logik I – Übungsaufgaben — Blatt 2

Dr. Michael Arndt — **WS 2015/16**

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen für alle Aussagen ϕ, ψ und χ gelten:

a) $\phi \to \chi, \chi \to \psi \models \phi \to \psi$

b) $\phi \vee \psi \to \chi \mathrel{=\!\!|\!\models} (\phi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)$

Aufgabe 2 (1 Punkt)

Welche der folgenden Behauptungen trifft zu, welche nicht? Bergünden Sie Ihre Einschätzung!

- *Eine Aussage ϕ ist kontradiktorisch genau dann, wenn $\phi \models \bot$.*
- *Eine Aussage ϕ ist tautologisch genau dann, wenn $\bot \models \phi$.*

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es seien $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{PROP}$ und $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$. Beweisen Sie:

Wenn $\Gamma \models \phi$ und $\Delta, \phi \models \psi$, dann $\Gamma, \Delta \models \psi$.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

Es sei $\mathrm{PROP}_{\wedge\vee} \subset \mathrm{PROP}$ die Menge aller Aussagen, in denen als Junktoren nur $\wedge$ und $\vee$ vorkommen (auch kein $\neg$ und kein $\bot$).

a) Geben Sie Belegungen v und w an unter denen jeweils sämtliche Aussagen aus $\mathrm{PROP}_{\wedge\vee}$ mit 0 bzw. mit 1 bewertet werden. Beweisen Sie dies unter Verwendung des geeigneten Induktionsprinzips.

b) Welche Formeln aus $\mathrm{PROP}_{\wedge\vee}$ sind erfüllbar, welche kontingent, welche kontradiktorisch und welche tautologisch? Diskutieren Sie das Ergebnis!

Aufgabe 5 (2 + 2 Punkte)

Geben Sie zu der Formel $(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow \neg(p_1 \to p_2)$ jeweils eine logisch äquivalente Formel an, in der keine anderen als die folgend genannten Junktoren vorkommen:

a) $\{\wedge, \vee, \neg\}$

b) $\{\to, \bot\}$