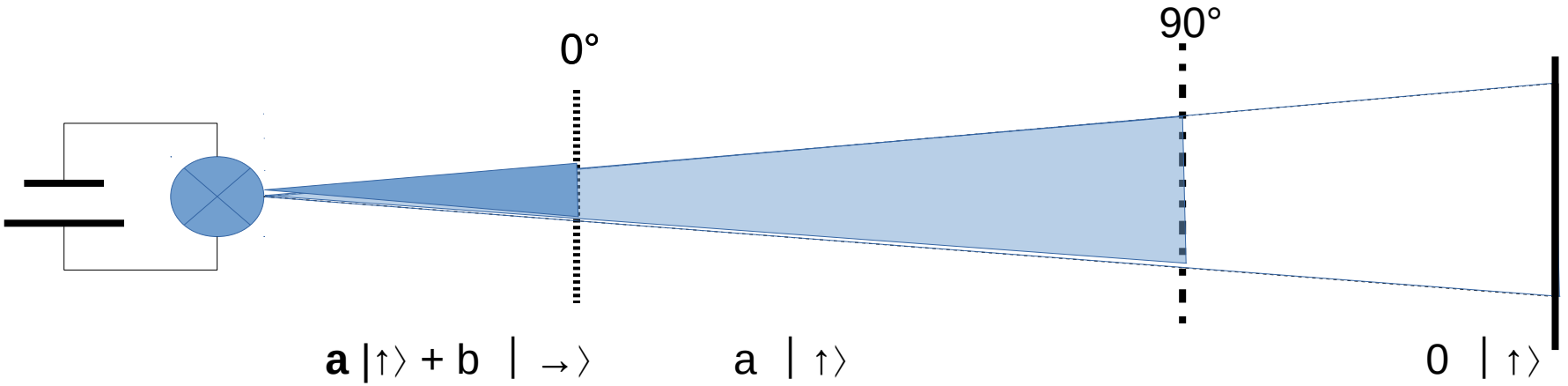
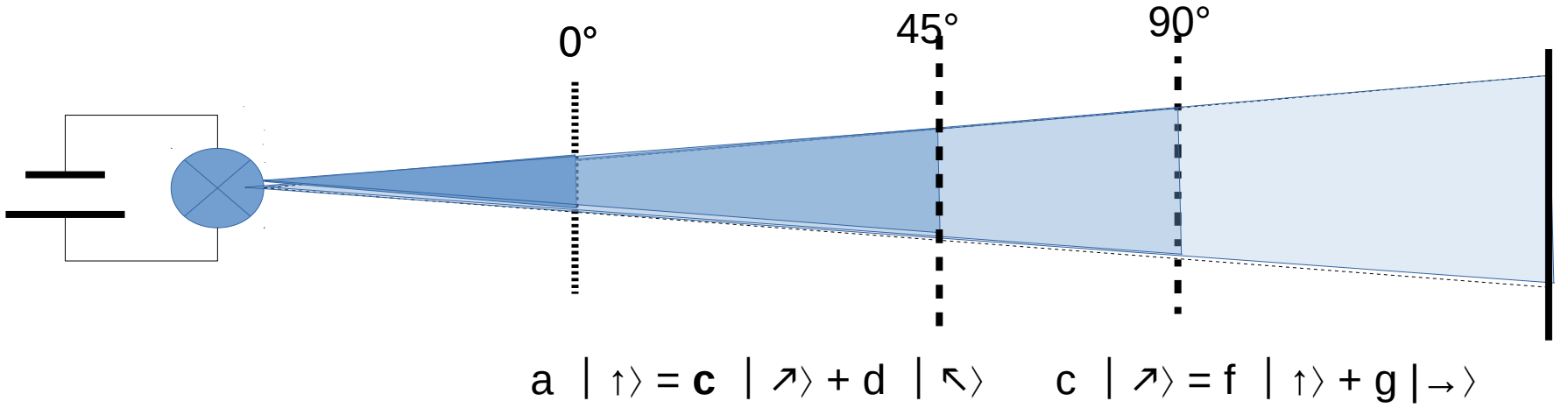
Themen zur Computersicherheit

Quantencomputer und Kryptographie
-- Eine kurze Einführung --

PD Dr. Reinhard Bündgen
buendgen@de.ibm.com

Quantenmechanik der Polarisation





Superposition

Quantenbits (Qubits)

Ket Notation

$x \in \{ a|0\rangle + b|1\rangle \mid$

$a, b \in \mathbf{C} \wedge a^2 + b^2 = 1 \}$

a und b heißen Amplitude

Spezielle Zustände

- $|+\rangle = 2^{-1/2} (|0\rangle + |1\rangle)$
- $|-\rangle = 2^{-1/2} (|0\rangle - |1\rangle)$
- $|i\rangle = 2^{-1/2} (|0\rangle + i\,|1\rangle)$
- $|-i\rangle = 2^{-1/2} (|0\rangle - i\,|1\rangle)$

Orthonormalbasen

- Standardbasis: $\{|0\rangle, |1\rangle\}$
- Hadamard Basis: $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

Bloch Sphäre

$x \in \{ (a,b,c) \mid$

$a, b, c \in \mathbf{R} \wedge a^2 + b^2 + c^2 = 1 \}$

Ket -> Bloch

- $|0\rangle \mapsto (0, 0, 1)$
- $|1\rangle \mapsto (0, 0, -1)$
- $|+\rangle \mapsto (1, 0, 0)$
- $|-\rangle \mapsto (-1, 0, 0)$
- $|i\rangle \mapsto (0, 1, 0)$
- $|-i\rangle \mapsto (0, -1, 0)$

Notation
- **C**: komplexe Zahlen
- **R**: Reelle Zahlen

Operationen auf Qubits

Operationen auf Qubits können durch unitäre Matrizen beschrieben werden.

- A unitär wenn $(A^*)^T = A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad x = x_0 \mid 0\rangle + x_1 \mid 1\rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = (ax_0 + bx_1) \mid 0\rangle + (cx_0 + dx_1) \mid 1\rangle$$

Beispiel: Hadamardmatrix

$$H = 1 / \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H \mid 0\rangle = H\,(1,0)^T = 2^{-1/2}\,(\mid 0\rangle + \mid 1\rangle)$$

$$H \mid 1\rangle = H\,(0,1)^T = 2^{-1/2}\,(\mid 0\rangle - \mid 1\rangle)$$

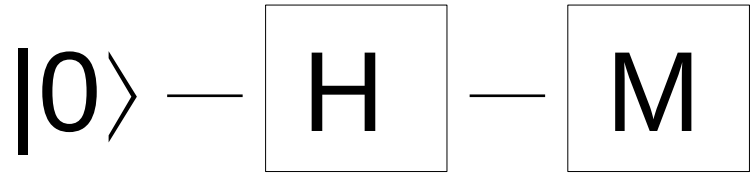
Notation

- A^{-1} inverse Matrix zu A
- A^T transponierte Matrix von A
- A* konjugiert komplexe Matrix zu A

Messen von Qubits

- beim Messen eines Qubits wird sein Zustand zerstört
- gemessen wird bzgl einer Basis {A, B}:
  - $x = aA + bB$
  - dann ist das Messergebnis gleich
    - A mit der Wahrscheinlichkeit $|a|^2$
    - B mit der Wahrscheinlichkeit $|b|^2$
  - a und b können nicht gemessen werden

Quantenalgorithmus: Zufallsgenerator



$2^{-1/2}\,|0\rangle + 2^{-1/2}|1\rangle$

x := |0⟩

x := H x

miss x bzgl { |0⟩, |1⟩ }

Ergebnis entweder |0⟩ oder |1⟩,
je mit Wahrscheinlichkeit 1/2

Notation
:= Zuweisung

Quantenregister

- Quantenregister: Array von Qubits
- Zustände von klassischen Registern:
  - Für klassische Register R, R_1, R_2 mit $R = R_1 \,||\, R_2$ gilt: für jeden Zustand Z von R gibt es Zustände Z_1 von R_1 und Z_2 von R_2, so dass $Z = Z_1 \,||\, Z_2$.
- Zustände von Quantenregistern:
  - Für Quantenregister Q, Q_1, Q_2 mit $Q = Q_1 \,||\, Q_2$ gilt: es gibt Zustände Z von Q zu denen es <u>keine</u> Zustände Z_1 von Q_1 und Z_2 von Q_2 gibt, so dass $Z = Z_1 \,||\, Z_2$.
- Der Zustandsraum eines Quantenregisters kann als Tensorprodukt der Zustandsräume seiner Teilregister beschrieben werden.
- Es gibt keine Methode einen beliebigen Zustand eines Quantenregisters zu kopieren: No Cloning

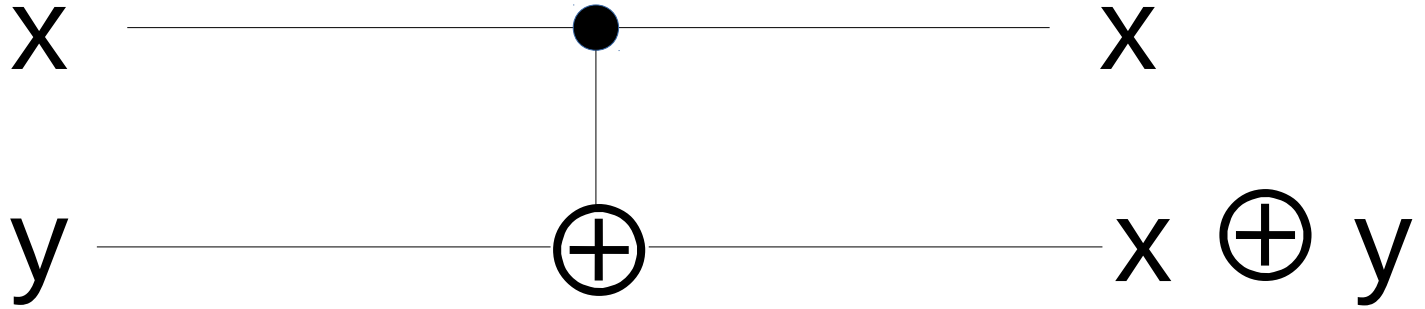
Beispiel $R = R_1 \,||\, R_2$

- Der Zustandsraum $Z = Z_1 \otimes Z_2$ von R hat die Basis
  - $|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$
  - $|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$
  - $|1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$
  - $|1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$
- Jeder Zustand von R kann als Linearkombination
  - $x_0 |00\rangle + x_1 |01\rangle + x_2 |10\rangle + x_3 |11\rangle$
  - beschrieben werden
- Die *Basis* des Zustandsraums eines Quantenregisters aus n Qubits hat 2^n Elemente

Operation auf 2-Qubit-Register

- unitäre Operation
- CNOT: $|x, y\rangle \mapsto |x, x \oplus y\rangle$
- controlled not: ist das erste Qubit 1, so wird das zweite negiert

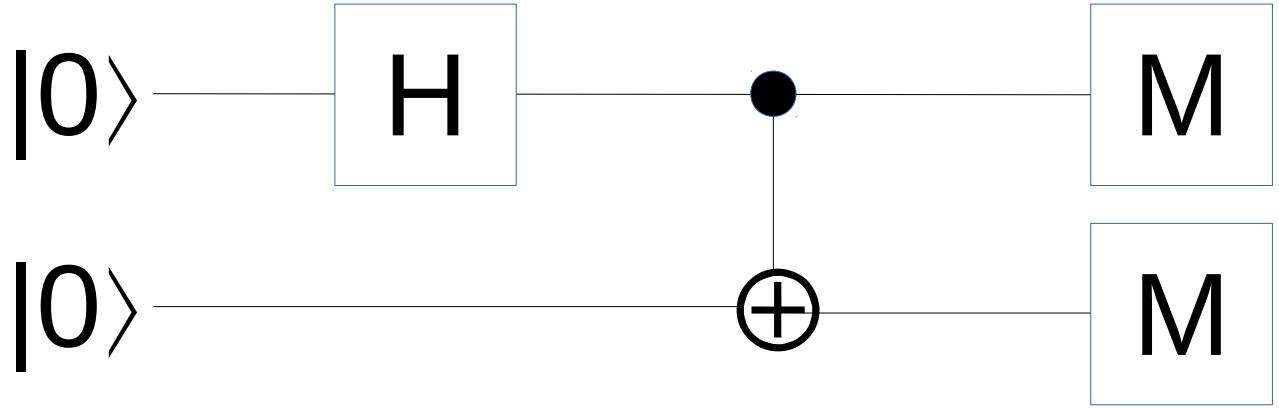
$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{CNOT} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \\ c \end{pmatrix}$$



Verschränkte Zustände

- englisch: entangled
- Ein Zustand Z von R heißt verschränkt bzgl einer Dekomposition $R = R_1 \,||\, R_2$, wenn Z nicht als Tensorprodukt $Z_1 \otimes Z_2$ von Zuständen der Register R_1 bzw R_2 beschrieben werden kann
- Beispiel:
  - Der Zustand $1/2^{-1/2} (|00\rangle + |11\rangle)$ is verschränkt bzgl der einzelnen Qubits eines 2-Qubit-Registers
  - denn $(a_0|0\rangle + b_0|1\rangle) \otimes (a_1|0\rangle + b_1|1\rangle)$
  - $= a_0a_1|00\rangle + a_0b_1|01\rangle + b_0a_1|10\rangle + b_0b_1|11\rangle$
  - wenn a_0b_1 und b_0a_1 gleich Null sind auch a_0a_1 oder b_0b_1 gleich Null

Verschränken von 2 Qubits



- $|00\rangle$ --(H x I)--> $2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = 2^{-1/2}(|00\rangle + |10\rangle)$
- $2^{-1/2}(|00\rangle + |10\rangle)$ --CNOT--> $2^{-1/2}(|00\rangle + |11\rangle)$
- Messung
  - $|00\rangle$ oder $|11\rangle$, je mit Wahrscheinlichkeit 0,5
  - verschränkte Qubits können auch einzeln gemessen werden, dann sind Messungen beider Qubits immer gleich
  - Fernwirkung: Trenne Qubits
    - Alice bekommt 1. Qubit
    - Bob bekommt 2. Qubit

Notation
I Identität

Suchen mit Grover Algorithmus

- Was bedeutet suchen?
  - unstrukturierte DB Suche
    - z.B. Suche nach Besitzer von Telefonnr. im Telefonbuch
  - suche in einer Menge nach Element, das ein Prädikat erfüllt
    - Nachricht, die eine bestimmten Hashwert hat
    - Schlüssel, der einen Geheimtext entschlüsselt
    - NP-vollständige Probleme

- Sei N die Größe der Menge in der gesucht wird und es gibt genau ein Element, das die Lösung der Suche ist
  - klassischer Aufwand: $O(N)$, $\Omega(N)$
  - Aufwand mit QC: $O(\sqrt{N})$
    - mit Grover Algorithmus – von Lev Grover (1996)
    - **halbiert Sicherheitsniveau von symmetrischen Chiffren und Hashes**
    - reicht nicht um N=NP zu zeigen

Idee des Grover-Algorithmus

- N sei 2^n, das n-Qubit-Register X mit Zustand
- $a_0|0...0\rangle + a_1|0...01\rangle +...+ a_N|1...1\rangle$ mit $a_i = 1/\sqrt{N}$ für alle i und $|x_1...x_n\rangle$ repräsentiert das k-te Element wenn k binär durch $x_1...x_n$ dargestellt wird.
- Sei U eine Quantenoperation, die die Amplitude des gesuchten Elements negiert und alle anderen Amplituden gleich lässt.
- Sei S eine Quantenoperation, jede Amplitude am Mittelwert aller Amplituden spiegelt: $a_i := -(a_i - 2\sum_k a_k)$
- Wiederhole mehrfach
  - wende U auf X an
  - wende S auf X an
- Miss X

O(√N) mal

Faktorisieren mit Shors Algorithmus

- Shors Algorithmus ermittelt einen Teiler einer ganzen Zahl der Länge n in $O((\log n)^4)$
  - benutzt Quanten Fourriertransformation
- Eine Variante von Shors Algorithmus kann zum Berechnen diskreter Logarithmen genutzt werden
- **Gegeben einen Quantencomputer ausreichender Größe: ECDH, ECDSA, DH, DSA und RSA sind nicht mehr sicher.**

NIST Wettbewerb zur Suche von Post-Quantum Verfahren für asymmetrische Kryptographie

- Ziel: Signatur- und Schlüsselaustauschverfahren
- Auswahlkriterien: Sicherheit, Performance, weitere
- Zeitplan
  - 20.12.2016: Request for Nominations
  - 30.11.2017: Einsendeschluss
  - 21.12.2017: 1. Runde (69 Einreichungen akzeptiert)
  - 30.01.2019: 2. Runde
    - 17 Schlüsselaustausch und 9 Signaturverfahren
  - 2020/2021: 3. Runde oder Algorithmenauswahl
  - 2022/2024: Draft-Standard verfügbar

Eigenschaften der Post-Quantum-Verfahren

(auch Quantum-safe oder Quantum-resistent genannt)

- Schlüsselgrößen
- Größen der Geheimtexte, Signaturen
- Zeit-/Speicherkomplexität
  - der kryptographischen Operation
  - der Schlüsselerzeugung

Quanten-Computer

- Ankündigungen von Q-Computern mit n physischen Qubits
  - 11/2017 IBM: 50 Qubits
  - 01/2018 Intel: 49 Qubits
  - 03/2018 Google: 72 Qubits
  - heute: 200 Qubits?
- Probleme mit QC:
  - Stabilität der Qubit Zustände
    - müssen Q-Schaltkreis „überleben“
      - je komplexer die Rechnung, je tiefer und langsamer die Schaltkreise
  - Fehlertoleranz
    - Qubit Zustände sind analog
    - Fehlervermeidungs- und Fehlerkorrekturverfahren
  - Physische vs logische Qubits
    - sehr viele physische Qubits werden zur Implementierung eines logischen Qubits benötigt

Wie viele Qubits braucht man?

Schätzung der benötigten Ressourcen zum Brechen von klassischen kryptographischen Verfahren mit QC.

Verfahren	Schlüsselgröße/ Sicherheitsmaß	# log. Qubits	# phys. Qubits	Zeit
AES-GCM	256 / 256	6600	$3 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{32}$ y
RSA	4096 / 128	8200	$1{,}1 \cdot 10^7$	230 h
ECC	521 / 256	4700	$1{,}1 \cdot 10^6$	55 h
SHA256/Bitcoin	- / 72	2400	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^4$ y
PBKDF2 (10^4 Iter.)	- / 66	2400	$2 \ 10^6$	$2 * 10^7$ y

Quelle: National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine 2019. *Quantum Computing: Progress and Prospects*. Washington, DC: The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/25196

Literatur / Referenzen

- Matthias Homeister: Quantum Computing verstehen, Springer 2015
- E. Rieffel & W. Polak: Quantum Computing a Gentle Introduction, MIT Press 2014
- Web Seite des NIST PQC Wettbewerbs: https://csrc.nist.gov/Projects/Post-Quantum-Cryptography
  - Präsentation von Dustin Moody: Let’s Get Ready to Rumble - The NIST PQC “Competition” https://csrc.nist.gov/CSRC/media/Presentations/Let-s-Get-Ready-to-Rumble-The-NIST-PQC-Competiti/images-media/PQCrypto-April2018_Moody.pdf