1. Untersuchungen zur Quantentheorie[1])

von

Louis de Broglie

Einleitung

Die Geschichte der optischen Theorien zeigt, daß die wissenschaftliche Ansicht lange zwischen einer mechanischen und einer undulatorischen Auffassung des Lichtes geschwankt hat; vielleicht sind aber diese beiden Anschauungen viel weniger in Widerspruch zueinander, als man dies früher geglaubt hatte, und besonders scheint die Entwicklung der Quantentheorie letztere Ansicht zu bestätigen.

Gestützt auf die Vorstellung eines allgemeingültigen Zusammenhangs zwischen dem Frequenz- und dem Energiebegriff gehen wir in dieser Arbeit von der Existenz eines gewissen periodischen Vorganges von noch näher festzulegender Natur aus, der jedem isolierten Energieteil zugeordnet werden muß und von seiner Eigenmasse nach der Planck-Einsteinschen Beziehung abhängt. Dann fordert die Relativitätstheorie, der gleichförmigen Bewegung eines jeden materiellen Punktes die Ausbreitung einer gewissen Welle zuzuordnen, deren Phase sich im Raum mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreitet (Kapitel I).

---

[1]) Annales de Physique **3** (1925) 22. (Dies ist der Text von *de Broglies* Dissertation von 1924.)

KAPITEL I

Die Phasenwelle

§ 1. Die Quantenbeziehung und die Relativitätstheorie

Einer der wichtigsten neuen Begriffe, welcher durch die Relativitätstheorie eingeführt wurde, ist der der Trägheit der Energie. Nach EINSTEIN muß man jeder Energie Masse zuordnen, und jede Masse repräsentiert Energie. Masse und Energie sind immer durch die allgemeine Beziehung miteinander verbunden:

$$\text{Energie} = \text{Masse} \cdot c^2,$$

wobei c eine Konstante, die sogenannte „Lichtgeschwindigkeit", ist, die wir aber lieber aus später zu erörternden Gründen „Grenzgeschwindigkeit der Energie" nennen wollen. Da also stets Proportionalität zwischen Masse und Energie besteht, so müssen Materie und Energie als zwei gleichbedeutende Ausdrücke aufgefaßt werden, die die gleiche physikalische Realität bezeichnen.

Die Atomtheorie und später die Elektronentheorie haben uns gelehrt, daß wir die Materie als wesentlich diskontinuierlich aufzufassen haben, und dies führt uns zu der Annahme, daß alle Energieformen, im Gegensatz zu den älteren Vorstellungen über die Natur des Lichtes, vollständig in kleinen Raumteilen konzentriert oder wenigstens um gewisse singuläre Punkte verdichtet sind.

Das Prinzip der Trägheit der Energie ordnet jedem Körper, dessen Eigenmasse (d. h. gemessen vom Beobachter im gleichen System) m_0 ist, eine Eigenenergie $m_0 c^2$ zu. Wenn der Körper in gleichförmiger Bewegung von der Geschwindigkeit $v = \beta \cdot c$ relativ zu dem Beobachter, den wir als ruhend bezeichnen wollen, ist, so wird

seine Masse für diesen den Wert $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ haben gemäß einer bekannten Formel der relativistischen Dynamik, und seine Energie ist infolgedessen $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Da die kinetische Energie als der Zuwachs angesehen werden kann, den die Energie des Körpers für den ruhenden Beobachter erfährt, wenn der Körper aus dem Ruhezustand in den Bewegungszustand mit der Geschwindigkeit $v = \beta \cdot c$ übergeht, findet man für ihren Wert den folgenden Ausdruck:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),$$

der natürlich für kleine Werte von β in den klassischen Wert übergeht:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2.$$

Nachdem wir uns dies ins Gedächtnis zurückgerufen haben, wollen wir uns der Frage zuwenden, in welcher Form wir in die relativistische Dynamik die Quanten einführen können. Die Grundidee der Quantentheorie ist wohl die Unmöglichkeit, ein isoliertes Energiestück zu betrachten, ohne diesem eine gewisse Frequenz zuzuordnen. Diese Begriffsverbindung drückt sich in folgender Beziehung aus, die ich die Quantenbeziehung nennen will:

$$\text{Energie} = h \cdot \text{Frequenz},$$

wobei h die PLANCKsche Konstante ist.

Es ist daher annehmbar, daß zufolge einem allgemeinen Naturgesetz mit jedem Energiestück von der Eigenmasse m_0 ein periodisches Phänomen von der Frequenz ν_0 nach der Beziehung verbunden ist:

$$h \nu_0 = m_0 c^2.$$

ν_0 ist dabei, was wohl zu beachten ist, in dem mit dem Energiestück fest verbundenen System gemessen. Diese Hypothese ist die Grundlage unserer Theorie: Sie gilt, wie alle Hypothesen, so weit, wie die aus ihr zu ziehenden Folgerungen.

Nachdem wir die Existenz einer dem Energiestück zuzuordnenden Frequenz angenommen haben, wenden wir uns der Frage zu, in welcher Weise sich diese Frequenz dem oben erwähnten festen Beobachter äußert. Die LORENTZ-EINSTEINsche Zeittransformation lehrt uns, daß ein mit dem bewegten Körper verbundenes periodisches Ereignis sich für den festen Beobachter im Verhältnis 1 zu $\sqrt{1-\beta^2}$ verlangsamt; das ist die bekannte Erscheinung des Nachgehens der Uhren. Daher ist die vom festen Beobachter gemessene Frequenz

$$\nu_1 = \nu_0 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0 c^2}{h} \sqrt{1-\beta^2}\,.$$

Andererseits ist aber, da die Energie des bewegten Teilchens für den festen Beobachter gleich $\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ist, die nach der Quantenbeziehung entsprechende Frequenz $\nu = \dfrac{1}{h} \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Diese beiden Frequenzen ν_1 und ν sind wesentlich verschieden, da in sie der Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ nicht in der gleichen Form eingeht. Hier liegt eine Schwierigkeit vor, die mich lange beschäftigt hat; ich gelangte zu ihrer Behebung durch den Beweis des folgenden Theorems, welches ich als das Theorem der Phasenübereinstimmung bezeichnen werde:

„Das mit dem beweglichen Teilchen fest verbundene periodische Phänomen, welches in bezug auf den ruhenden Beobachter die Frequenz $\nu_1 = \dfrac{1}{h} m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}$ hat, erscheint diesem Beobachter beständig in Phase mit einer

Welle von der Frequenz $\nu = \dfrac{1}{h} m_0 c^2 \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, die sich in der Bewegungsrichtung des beweglichen Teilchens mit der Geschwindigkeit $V = \dfrac{c}{\beta}$ ausbreitet.“

Der Beweis ist sehr einfach. Vorausgesetzt, daß zur Zeit $t = 0$ Phasenübereinstimmung zwischen dem mit dem bewegten Teilchen verbundenen periodischen Phänomen und der weiter oben definierten Welle besteht. Zur Zeit t hat das bewegte Teilchen den Weg $x = \beta c t$ zurückgelegt, und die Phase des periodischen Phänomens hat sich geändert um

$$\nu_1 t = \frac{m_0 c^2}{h} \sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{x}{\beta c}.$$

Die Phase des Teiles der Welle, die das bewegte Teilchen überdeckt, hat sich geändert um:

$$\nu\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) = \frac{m_0 c^2}{h} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{x}{\beta c} - \frac{\beta x}{c}\right)$$
$$= \frac{m_0 c^2}{h} \sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{x}{\beta c}.$$

Es existiert also Phasenübereinstimmung, wie wir behauptet haben.

Man kann diesem Theorem einen anderen Beweis geben, der zwar mit dem eben gegebenen im Grunde genommen identisch ist, aber vielleicht noch überraschender wirkt. Wenn t_0 die Zeit eines mit dem bewegten Teilchen verbundenen Beobachters darstellt (Eigenzeit des bewegten Teilchens), so ergibt die LORENTZ-Transformation:

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{\beta x}{c}\right).$$

Das von uns gedachte periodische Phänomen wird für den gleichen Beobachter durch eine Sinusfunktion von $\nu_0 t_0$ dargestellt. Für den festen Beobachter wird es durch die gleiche Sinusfunktion von $\nu_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$ repräsentiert, welche eine Welle der Frequenz $\frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ bezeichnet, die sich mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\beta}$ in gleicher Richtung wie das bewegte Teilchen fortpflanzt.

Es ist unumgänglich nötig, auf die Natur der Welle zurückzukommen, deren Existenz wir soeben angenommen haben. Die Tatsache, daß deren Geschwindigkeit $V = \frac{c}{\beta}$ notwendigerweise größer als c ist (β ist immer kleiner als 1, da sonst die Masse unendlich bzw. imaginär sein würde), beweist, daß es sich keinesfalls um eine Energie befördernde Welle handeln kann. Unser Theorem dagegen lehrt, daß sie die Verteilung der Phasen eines Ereignisses im Raum darstellt; sie ist daher eine „Phasenwelle".

§ 2. *Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit*

Wir werden jetzt eine zwischen der Geschwindigkeit des bewegten Teilchens und der der Phasenwelle bestehende wichtige Beziehung ableiten. Wenn Wellen von sehr benachbarten Frequenzen sich in der gleichen Richtung Ox mit der Geschwindigkeit V ausbreiten, die wir Geschwindigkeit der Phasenfortpflanzung nennen werden, so werden diese Wellen durch Superposition Schwebungserscheinungen geben, wenn sich die Geschwindigkeit V mit der Frequenz ν verändert. Diese Erscheinungen sind insbesonders von Lord RAYLEIGH für den Fall zerstreuender Medien untersucht worden.

Wir fassen also zwei Wellen mit den benachbarten Frequenzen ν und $\nu + \delta\nu$ und den Geschwindigkeiten V und $V' = V + \frac{dV}{d\nu}\,\delta\nu$ ins Auge; ihre Superposition wird analytisch durch die folgende Gleichung, die man durch Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in $\delta\nu$ gegenüber ν erhält, wiedergegeben:

$$\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{\nu x}{V} + \varphi\right) + \sin 2\pi\left(\nu' t - \frac{\nu' x}{V'} + \varphi'\right)$$

$$= 2\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{\nu x}{V} + \psi\right)$$

$$\times\ \cos 2\pi\left[\frac{\delta\nu}{2}\,t - x\,\frac{d\left(\frac{\nu}{V}\right)}{d\nu}\cdot\frac{\delta\nu}{2} + \psi'\right].$$

Wir erhalten also wieder eine Sinuswelle, deren Amplitude um die Frequenz $\delta\nu$ geändert ist, denn das Kosinuszeichen macht wenig aus. Das ist ein wohlbekanntes Ergebnis. Wenn man mit U die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schwebung oder die Gruppengeschwindigkeit der Wellen bezeichnet, so findet man

$$\frac{1}{U} = \frac{d\left(\frac{\nu}{V}\right)}{d\nu}.$$

Kehren wir zur Betrachtung der Phasenwellen zurück. Man erteile dem beweglichen Teilchen eine Geschwindigkeit $v = \beta c$, indem man β keinen völlig bestimmten Wert zulegt, sondern nur annimmt, daß dieser Wert zwischen β und $\beta + \delta\beta$ liegt; die Frequenzen der korrespondierenden Phasenwellen liegen dann in dem kleinen Intervall $\nu, \nu + \delta\nu$.

Wir stellen jetzt den folgenden Satz auf, der uns später nützlich sein wird. „Die Gruppengeschwindigkeit der Phasenwellen ist gleich der Geschwindigkeit des bewegten Teilchens". In der Tat ist diese Gruppengeschwindigkeit ja durch die obenstehende Formel bestimmt, in der V und ν als Funktion von β angesehen werden können gemäß den Beziehungen:

$$V = \frac{c}{\beta}, \qquad \nu = \frac{1}{h} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Man kann schreiben:

$$U = \frac{\dfrac{d\nu}{\beta}}{\dfrac{d\left(\dfrac{\nu}{V}\right)}{d\beta}};$$

nun ist aber

$$\frac{d\nu}{d\beta} = \frac{m_0 c^2}{h} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}},$$

$$\frac{d\left(\dfrac{\nu}{V}\right)}{d\beta} = \frac{m_0 c}{h} \frac{d\left(\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{d\beta} = \frac{m_0 c}{h} \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}},$$

infolgedessen:

$$U = \beta \cdot c = v.$$

Die Gruppengeschwindigkeit der Phasenwellen stimmt also mit der Geschwindigkeit des bewegten Teilchens überein. Dieses Ergebnis erfordert eine Bemerkung: In der Wellentheorie der Dispersion ist, abgesehen von den Absorptionsgebieten, die Geschwindigkeit der Energie gleich der Gruppengeschwindigkeit. Hier finden wir von einem ganz anderen Gesichtspunkt aus ein analoges

Resultat, denn die Geschwindigkeit des beweglichen Teilchens ist nichts anderes als die Verschiebungsgeschwindigkeit der Energie.

KAPITEL II

Das Maupertuissche und das Fermatsche Prinzip

§ 1. Aufgabe dieses Kapitels

In diesem Kapitel wollen wir den Versuch der Verallgemeinerung der Ergebnisse des Kapitels I auf den Fall eines nicht gleichförmig-geradlinig bewegten Teilchens unternehmen. Diese abgeänderte Bewegung setzt das Vorhandensein irgendeines Kraftfeldes voraus, das auf das bewegliche Teilchen wirkt. Für uns soll jetzt ein Kraftfeld ein elektromagnetisches Feld sein, die Mechanik der variierten Bewegung besteht dann in dem Studium der Bewegung eines elektrisch geladenen Körpers in einem elektromagnetischen Feld.

Die die Bewegung eines Teilchens begleitende Phasenwelle hat, falls man sich unseren Vorstellungen anschließt, Eigenschaften, die von der Natur des beweglichen Teilchens abhängen, da ja beispielsweise ihre Frequenz durch die Gesamtenergie bestimmt ist. Daher scheint die Voraussetzung gegeben, daß bei der Einwirkung eines Kraftfeldes auf das bewegliche Teilchen dieses Feld auch auf die Ausbreitung der Phasenwelle Einfluß ausübt. Geleitet von der Idee eines inneren Zusammenhanges zwischen dem Prinzip der kleinsten Wirkung und dem FERMATschen Prinzip wurde ich bereits seit dem Beginn meiner Untersuchungen über diesen Gegenstand zu der Annahme geführt, daß für einen gegebenen Wert der Gesamtenergie des bewegten Teilchens und infolgedessen der Frequenz seiner Phasenwelle die mechanisch möglichen Bahnen des Teilchens mit den möglichen Strahlen der Phasenwelle übereinstimmen.

§ 2. *Die beiden Prinzipe der kleinsten Wirkung in der klassischen Dynamik*

Das Prinzip der kleinsten Wirkung kann in der klassischen Mechanik in der HAMILTONschen Form folgendermaßen ausgesprochen werden:

„Die Gleichungen der Dynamik lassen sich ableiten aus der Forderung, daß das Integral $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$, genommen zwischen festen Zeitgrenzen für gegebene Anfangs- und Endwerte der Parameter q_i, die den Zustand des Systemes bestimmen, einen stationären Wert haben soll."

Laut Definition heißt L die LAGRANGE-Funktion, die nur von den Variablen q_i und $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ abhängt.

Man hat also:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0.$$

Hieraus leitet man nach einer aus der Variationsrechnung bekannten Methode die sogenannte LAGRANGEschen Gleichungen ab:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

deren Zahl gleich der Anzahl der Variablen q_i ist.

Es bleibt noch die Funktion L zu definieren. Die klassische Mechanik setzt:

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}},$$

die Differenz der kinetischen und potentiellen Energie. Weiter unten werden wir sehen, daß die relativistische Dynamik einen von L verschiedenen Wert benutzt.

Gehen wir jetzt zum Prinzip der kleinsten Wirkung in der MAUPERTIUSschen Fassung über. Hierzu bemerken

wir zuerst, daß die LAGRANGEschen Gleichungen in der obigen allgemeinen Form ein erstes Integral besitzen, die sogenannte „Systemenergie", die gleich ist

$$W = -L + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i,$$

wieder vorausgesetzt, daß die Funktion L nicht explizit von der Zeit abhängt, was wir im folgenden immer annehmen. Dann hat man in der Tat:

$$\frac{dW}{dt} = -\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i = \sum_i \dot{q}_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right],$$

eine Größe, die gemäß den LAGRANGEschen Gleichungen verschwindet. Daher folgt:

$$W = \text{const}.$$

Wir wenden jetzt das HAMILTONsche Prinzip auf alle „variierten" Bahnen an, die von einem gegebenen Anfangspunkt A zu einem gegebenen Endpunkt B führen und einem bestimmten Wert der Energie W entsprechen. Man kann, da W, t_1 und t_2 Konstante sind, schreiben:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W)\,dt = 0,$$

oder auch:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\,dt = \delta \int_A^B \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,dq_i = 0,$$

das letzte Integral erstreckt sich über alle Werte der q_i zwischen A und B derart, daß die Zeit eliminiert ist; es ist nicht mehr angängig, in der nun erhaltenen Form irgendeine Beschränkung der Zeitgrenzen vorzuschreiben. Im Gegenteil müssen alle abgeänderten Bahnen einem und demselbem Wert der Energie W entsprechen.[1])

Wir führen jetzt die klassische Bezeichnungsweise der kanonischen Gleichungen ein: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Die Momente sind die konjugierten Momente der Variablen q_i. Das MAUPERTUISsche Prinzip läßt sich dann klassisch—mechanisch schreiben:

$$\delta \int_A^R \sum_i p_i dq_i = 0,$$

wobei $L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$, E_{pot} unabhängig von den $\dot{q}_i$ und E_{kin} eine homogene quadratische Funktion ist. Infolge des EULERschen Theorems ist dann

$$\sum_i p_i \, dq_i = \sum_i p_i \dot{q}_i \, dt = 2 E_{\text{kin}} \, dt.$$

In Bezug auf den materiellen Punkt ist $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$, und das Prinzip der kleinsten Wirkung nimmt seine am längsten bekannte Form an:

$$\delta \int_A^B m v \, dl = 0,$$

wo dl das Bahnelement ist.

§ 3. *Die beiden Prinzipe der kleinsten Wirkung in der Dynamik des Elektrons*

Wir wenden uns jetzt wieder der Frage der Dynamik des Elektrons vom relativistischen Standpunkt aus zu. Hier müssen wir die Bezeichnung „Elektron" in dem allgemeinen Sinne eines eine elektrische Ladung tragenden materiellen Punktes auffassen. Wir wollen voraussetzen, daß das außerhalb irgendeines Feldes befindliche Elektron eine Eigenmasse m_0 besitzt; seine elektrische Ladung werde mit e bezeichnet.

[1]) Um den Beweis streng zu machen ist es nötig in wohlbekannter Weise die Grenzen t_1 und t_2 variieren zu lassen; doch ist wegen der Zeitunabhängigkeit des Resultats unser Gedankengang nicht unrichtig.

Wir wollen wiederum das Raum-Zeitsystem betrachten; die Raumkoordinaten seien x^1, x^2 und x^3, die gegebene Koordinate ct sei x^4. Die Fundamentalinvariante, das „Längenelement" ist definiert durch die Gleichung

$$ds = \sqrt{(dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}.$$

In diesem Paragraphen wie im folgenden werden wir ständig einige Bezeichnungsweisen des Tensorkalküls gebrauchen.

Eine Weltlinie besitzt in jedem Punkte eine Tangente, deren Richtung durch den „Weltgeschwindigkeitsvektor" von der Längeneinheit bestimmt ist, dessen kontravariante Komponenten durch die Gleichung gegeben sind:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Man verifiziert sofort die Beziehung $u^i \cdot u_i = 1$.

Ein bewegliches Teilchen möge die Weltlinie beschreiben; wenn es durch den betrachteten Punkt hindurchgeht, besitze es eine Geschwindigkeit $v = \beta c$ mit den Komponenten v_x, v_y, v_z. Die Komponenten des Weltgeschwindigkeitsvektors sind:

$$u_1 = -u^1 = -\frac{v_x}{c\sqrt{1-\beta^2}} \qquad u_2 = -u^2 = -\frac{v_y}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$u_3 = -u^3 = -\frac{v_z}{c\sqrt{1-\beta^2}} \qquad u_4 = u^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Zum Zwecke der Definition eines elektromagnetischen Feldes müssen wir einen zweiten Weltvektor einführen, dessen Komponenten in Abhängigkeit von dem Vektorpotential a und dem skalaren Potential ψ durch die Gleichungen wiedergegeben werden:

$$\varphi_1 = -\varphi^1 = -a_x; \qquad \varphi_2 = -\varphi^2 = -a_y;$$

$$\varphi_3 = -\varphi^3 = -a_z; \qquad \varphi_4 = +\varphi^4 = \frac{1}{c}\psi.$$

Betrachten wir jetzt zwei Punkte P und Q im Raum-Zeitsystem, die gegebenen Werten der Raum- und Zeitkoordinaten entsprechen. Wir können ein Kurvenintegral ins Auge fassen, das längs der Weltlinie von P nach Q genommen ist; natürlich muß die zu integrierende Funktion invariant sein.

Es sei:

$$\int_P^Q (-m_0 c - e\varphi_i u^i)\, ds = \int_P^Q (-m_0 c u_i - e\varphi^i)\, u^i\, ds$$

dieses Integral. Das HAMILTONsche Prinzip behauptet, daß, falls die Weltlinie eines beweglichen Teilchens durch P und Q hindurchgeht, sie eine solche Form hat, daß das oben definierte Integral einen stationären Wert hat.

Wir definieren einen dritten Weltvektor durch die Beziehung:

$$J_i = m_0 c u_i + e\varphi_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

der Satz von der kleinsten Wirkung nimmt dann die Form an:

$$\delta \int_P^Q (J_1 dx^1 + J_2 dx^2 + J_3 dx^3 + J_4 dx^4) = \delta \int_P^Q J_i\, dx^i = 0.$$

Wir werden weiter unten dem Weltvektor J einen physikalischen Sinn zuordnen.

Jetzt wenden wir uns zu der gebräuchlichen Fassung der dynamischen Gleichungen zurück, indem wir in der ersten Form des Wirkungsintegrals ds durch $c\,dt\,\sqrt{1-\beta^2}$ ersetzen. Auf diese Weise folgt:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[-m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - ec\varphi_4 - e(\varphi_1 v_x + \varphi_2 v_y + \varphi_3 v_z)\right] \times dt = 0,$$

wobei t_1 und t_2 den Punkten P und Q des Raum-Zeitsystems entsprechen.

Wenn ein rein elektrostatisches Feld vorhanden ist, sind die Größen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ gleich Null, und die LAGRANGE-Funktion nimmt die oft nützliche Form an:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - e\psi.$$

In allen Fällen wird man, da das HAMILTONsche Prinzip immer die Form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$$

hat, stets zu den LAGRANGEschen Gleichungen geführt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Immer, wenn die Potentiale nicht von der Zeit abhängen, erhält man den Energiesatz zurück:

$$W = -L + \textstyle\sum_i p_i q_i = \text{const}, \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Folgt man genau dem oben eingeschlagenen Weg, so erhält man das MAUPERTUISsche Prinzip:

$$\delta \int_A^B \sum p_i\, dq_i = 0,$$

wenn A und B zwei Raumpunkte sind, die für das benutzte Bezugsystem den Punkten P und Q des Raum-Zeitsystemes entsprechen.

Die Größen p_1, p_2, p_3, die gleich den partiellen Ableitungen der Funktion L nach den entsprechenden Geschwindigkeiten sind, können zur Definition des Vektors $\mathfrak{p}$ dienen, den wir als „Momentvektor" bezeichnen wollen. Falls kein magnetisches Feld vorhanden sei, sind die Komponenten dieses Vektors:

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Er ist also identisch mit der Bewegungsgröße und das MAUPERTUISsche Wirkungsintegral hat die einfache von MAUPERTUIS selbst gebrauchte Form mit dem einzigen Unterschied, daß die Masse nach dem LORENTZschen Gesetz von der Geschwindigkeit abhängt.

Wenn ein magnetisches Feld vorhanden ist, so findet man für die Komponenten des Momentvektors die Ausdrücke:

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} + e a_x, \qquad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} + e a_y,$$

$$p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} + e a_z.$$

Jetzt besteht keine Identität mehr zwischen dem Vektor $\mathfrak{p}$ und der Bewegungsgröße; infolgedessen wird der Ausdruck für das Wirkungsintegral komplizierter.

Wir betrachten ein in einem Feld befindliches bewegliches Teilchen von gegebener Gesamtenergie; in jedem für das bewegliche Teilchen erreichbaren Punkt des Feldes ist seine Geschwindigkeit durch die Energiegleichung bestimmt, aber die Richtung kann a priori unbestimmt sein. Die Ausdrücke für p_x, p_y und p_z

zeigen, daß der Momentvektor in jedem Punkte eines elektrostatischen Feldes die gleiche Größe besitzt, welches auch immer die betrachtete Richtung sei. Dies trifft nicht mehr zu, wenn es sich um ein magnetisches Feld handelt: Der Betrag des Vektors $\mathfrak{p}$ hängt dann von dem Winkel zwischen der betreffenden Richtung und dem potentiellen Vektor ab, wie man durch Berechnung des Ausdruckes

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

erkennt. Diese Bemerkung wird später von Nutzen sein.

Zum Schluß dieses Paragraphen gehen wir noch auf die physikalische Bedeutung des Weltvektors J ein, von dem das HAMILTONsche Integral abhängt. Wir haben ihn definiert durch:

$$J_i = m_0\, c u_i + e \varphi_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Vermittels der Werte von u_i und φ_i folgt:

$$J_1 = -p_x, \qquad J_2 = -p_y, \qquad J_3 = -p_z, \qquad J_4 = \frac{W}{c}.$$

Die kontravarianten Komponenten sind:

$$J^1 = p_x, \qquad J^2 = p_y, \qquad J^3 = p_z, \qquad J^4 = \frac{W}{c}.$$

Es handelt sich also um den bekannten „Weltimpulsvektor", der die Energie und die Bewegungsgröße zusammenfaßt.

Aus
$$\delta \int_P^Q J_i\, dx^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

folgt sogleich, falls J_4 konstant ist:

$$\delta \int_A^B J_i\, dx^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Dies ist die kürzeste Fassung, in welche man das Wirkungsprinzip kleiden kann.

§ 4. *Ausbreitung der Wellen; Fermatsches Prinzip*

Wir wenden uns jetzt der Frage nach der Fortpflanzung der Phase einer Sinuswelle zu, die wir nach einer Methode, analog der, welche wir in den letzten beiden Paragraphen eingeschlagen haben, untersuchen wollen. Wir stellen uns daher auf einen sehr allgemeinen Standpunkt, wir wollen wiederum das Raum-Zeitsystem ins Auge fassen.

Wir untersuchen die Funktion $\sin \varphi$, in der das Differential von φ als von den Raum- und Zeitvariablen x_i abhängig vorausgesetzt ist. Es existiert im Raum-Zeitsystem eine unendliche Mannigfaltigkeit von Weltlinien, längs deren die Funktion φ konstant ist.

Die Wellentheorie in der namentlich durch die Arbeiten von HUYGHENS und FRESNEL bekannten Form lehrt uns, aus diesen Linien gewisse auszusondern, deren Projektionen auf den Raum des Beobachters für ihn die „Strahlen" im gewöhnlichen optischen Sinn sind.

Es seien, wie oben, P und Q zwei Punkte des Raum-Zeitsystems. Welches ist das die Form des Strahles bestimmende Gesetz, wenn der Strahl durch die beiden Punkte hindurchgeht?

Wir betrachten das Kurvenintegral $\int_P^Q d\varphi$ und nehmen als das den Strahl bestimmende Prinzip das HAMILTONsche:

$$\delta \int_P^Q d\varphi = 0.$$

Das Integral muß in der Tat stationär sein, denn sonst würden Störungen, die in einem gewissen Raumpunkt Phasenübereinstimmung belassen und die, nachdem sie

etwas verschiedene Wege zurückgelegt haben, sich in einem anderen Punkt kreuzen, dort verschiedene Phasen zur Folge haben.

Die Phase φ ist eine Invariante; wenn wir aber setzen:

$$\begin{aligned} d\varphi &= 2\pi(O_1\,dx^1 + O_2\,dx^2 + O_3\,dx^3 + O_4\,dx^4) \\ &= 2\pi O_i\,dx^i, \end{aligned}$$

so werden die Größen O_i, die im allgemeinen Funktionen der x^i sind, die kovarianten Komponenten eines Weltvektors, des Weltwellenvektors. Wenn l die Strahlrichtung im üblichen Sinn ist, so wird man in gewohnter Weise $d\varphi$ in der Form ansetzen:

$$d\varphi = 2\pi\left(\nu\,dt - \frac{\nu}{V}\,dl\right),$$

wo ν die Frequenz und V die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist. Dann kann weiter gesetzt werden:

$$O_1 = -\frac{\nu}{V}\cos(x, l), \qquad O_2 = -\frac{\nu}{V}\cos(y, l),$$

$$O_3 = -\frac{\nu}{V}\cos(z, l), \qquad O_4 = \frac{\nu}{c}.$$

Der Wellenvektor setzt sich also aus der der Frequenz proportionalen Zeitkomponente und einem räumlichen Vektor $\mathfrak{n}$ vom Betrag $\frac{\nu}{V}$ und der Richtung der Wellenausbreitung zusammen. Wir werden diesen Vektor als „Wellenzahl" bezeichnen, da er gleich dem Reziproken der Wellenlänge ist. Wenn die Frequenz ν konstant ist, gelangen wir von der HAMILTONschen Form

$$\delta \int_P^Q O_i\,dx^i = 0$$

zu der Gleichung von MAUPERTUIS:

$$\delta \int_A^B [O_1\, dx^1 + O_2\, dx^2 + O_3\, dx^3] = 0,$$

wobei A und B die P und Q entsprechenden Raumpunkte sind.
Setzt man die Werte von O_1, O_2 und O_3 ein, so folgt

$$\delta \int_A^B \frac{\nu\, dl}{V} = 0.$$

In dieser Form geht das MAUPERTUISsche Prinzip in den FERMATschen Satz über.

Ebenso wie im vorigen Paragraphen die Kenntnis der Verteilung des Vektors $\mathfrak{p}$ im Felde genügte, um die Bahn, die ein durch zwei gegebene Punkte hindurchgehendes Teilchen von gegebener Gesamtenergie beschreibt, zu finden, ist hier zur Festlegung des Strahles einer Welle von gegebener Frequenz, der durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht, nur die Kenntnis der räumlichen Verteilung des Wellenzahlvektors erforderlich, durch welchen für jeden Punkt und jede Richtung die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt wird.

§ 5. *Erweiterung der Quantenbeziehung*

Wir sind jetzt in dem wichtigsten Punkte der Entwicklungen dieses Kapitels angelangt. Wir hatten anfangs die Frage gestellt: „Wie breitet sich die einem beweglichen Teilchen zugeordnete Phasenwelle aus, wenn dieses Teilchen sich in einem Kraftfeld nicht gleichförmig bewegt?" Anstatt durch tastende Versuche, wie ich das erst getan hatte, die Ausbreitungsgeschwindigkeit für jeden Punkt und jede Richtung zu bestimmen, will ich

eine zwar etwas hypothetische Erweiterung der Quantenbedingung vornehmen, die jedoch zweifellos in engem Zusammenhang mit relativistischen Ideen steht.

Wenn w die Gesamtenergie des bewegten Teilchens und ν die Frequenz der zugeordneten Phasenwelle ist, so besteht die Beziehung $h\nu = w$. Nun haben uns aber die letzten Paragraphen gezeigt, in welcher Weise zwei Weltvektoren J und O definiert werden können, die bezüglich des Studiums eines beweglichen Teilchens einerseits und der Ausbreitung einer Welle andererseits vollständig analoge Rollen spielen.

Führen wir diese Vektoren ein, so schreibt sich die Beziehung $h\nu = w$ in der Form:

$$O_4 = \frac{1}{h} J_4.$$

Die Tatsache, daß zwei Vektoren eine gleiche Komponente haben, hat nicht zur Folge, daß auch die anderen gleich sind. Mittels einer sehr naheliegenden Verallgemeinerung nehmen wir dies jedoch an und setzen:

$$O_i = \frac{1}{h} J_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Die Änderung $d\varphi$ bezüglich eines Elementes der Phasenwelle hat den Wert

$$d\varphi = 2\pi O_i dx^i = \frac{2\pi}{h} J_i\, dx^i.$$

Das FERMATsche Prinzip wird dann:

$$\delta \int_A^B \sum_1^3 i\, J_i\, dx^i = \delta \int_A^B \sum_1^3 i\, p_i\, dx^i = 0.$$

Somit kommen wir zur Aufstellung des folgenden Satzes:

„Die Anwendung des FERMATschen Prinzipes auf die Phasenwelle ist identisch mit der Anwendung des MAUPERTUISschen Prinzipes auf das bewegliche Teilchen; die mechanisch möglichen Bahnen des beweglichen Teilchens stimmen überein mit den möglichen Strahlen der Welle".

Man kann wohl hoffen, daß dieser Gedanke eines tiefliegenden inneren Zusammenhanges zwischen den beiden Grundprinzipien der geometrischen Optik und der Dynamik ein sicherer Führer bei der Durchführung des Versuches einer Verschmelzung der Wellentheorie und der Quantentheorie sein wird.

Die Hypothese von der Proportionalität der Vektoren J und O ist eine Art Erweiterung der Quantenbeziehung, deren gegenwärtige Form ja auch sehr unbefriedigend ist, da in sie die Energie, nicht aber die mit dieser untrennbar verbundene Bewegungsgröße eingeht. Die neue Fassung ist viel befriedigender, weil sie durch die Gleichheit zweier Weltvektoren dargestellt wird.

KAPITEL III

Die quantentheoretischen Stabilitätsbedingungen der Bahnen

§ 1. *Die Bohr-Sommerfeldschen Stabilitätsbedingungen*

Im Jahre 1917 gab EINSTEIN der Quantenbedingung eine bezüglich Koordinatenveränderungen invariante Form[1]). Wir wollen diese Quantenbedingung für den Fall geschlossener Bahnen formulieren; sie hat dann folgende Form:

$$\oint \sum_1^3 i\, p_i \, dq_i = n h \qquad (n_i \text{ ganzzahlig}),$$

[1]) Zum Quantensatz von SOMMERFELD und EINSTEIN. Ber. d. Deutsch. Phys. Ges. 1917, S. 82.

wobei das Integral über die ganze Bahnkurve zu erstrecken ist. Man erkennt in dieser Form das MAUPERTUISsche Wirkungsintegral wieder, welches ja in der Quantentheorie eine hervorragende Rolle spielt.

§ 2. *Die Interpretation der Einsteinschen Bedingung*

Der Begriff der Phasenwelle gestattet uns eine Erklärung der EINSTEINschen Bedingung. Diese Erklärung geht aus den Überlegungen des Kapitels II hervor, wonach die Bahn des beweglichen Teilchens einer der Strahlen seiner Phasenwelle ist, welche sich längs der Bahn mit einer konstanten Frequenz (da die Gesamtenergie konstant ist) und veränderlicher Geschwindigkeit ausbreitet, deren Wert wir berechnen können. Die Ausbreitung ist daher analog der einer Flüssigkeitswelle in einem geschlossenen Kanal von veränderlicher Tiefe. Es ist physikalisch evident, daß, um einen stabilen Zustand zu haben, die Länge des Kanals mit der Welle in Resonanz sein muß; anders ausgedrückt: Die Teile der Welle, die in einer Entfernung, welche ein ganzzahliges Vielfaches der Kanallänge l ist, aufeinander folgen und die sich infolgedessen im gleichen Punkte befinden, müssen miteinander in Phase sein. Die Resonanzbedingung ist $l = n\lambda$, wenn die Wellenlänge konstant ist, und $\oint \frac{\nu}{V}\, dl = n$ (ganzzahlig) im allgemeinen Fall.

Das hier auftretende Integral ist das gleiche wie beim FERMATschen Prinzip; nun haben wir aber gezeigt, daß dieses Integral gleich dem durch h dividierten MAUPERTUISschen Wirkungsintegral ist. Die Resonanzbedingung ist daher identisch mit der quantentheoretischen Stabilitätsbedingung.

Dieses schöne Ergebnis, dessen Ableitung so anschaulich ist, wenn man einmal die Grundvorstellungen des vorhergehenden Kapitels angenommen hat, ist die beste

Rechtfertigung unserer Art der Behandlung des Quantenproblems.

In dem speziellen Fall der kreisförmigen Bahnen im BOHRschen Atom erhält man $m_0 \oint v\,dl = 2\pi R m_0 v = nh$, oder, da $v = \omega R$, falls ω die Winkelgeschwindigkeit ist:

$$m_0 \omega R^2 = n \frac{h}{2\pi}.$$

Dies ist aber wieder die einfache BOHRsche Stabilitätsbedingung.

2. Quantisierung als Eigenwertproblem[1])

von

ERWIN SCHRÖDINGER

(Erste Mitteilung)

§ 1. In dieser Mitteilung möchte ich zunächst an dem einfachsten Fall des (nichtrelativistischen und ungestörten) Wasserstoffatoms zeigen, daß die übliche Quantisierungsvorschrift sich durch eine andere Forderung ersetzen läßt, in der kein Wort von „ganzen Zahlen" mehr vorkommt. Vielmehr ergibt sich die Ganzzahligkeit auf dieselbe natürliche Art, wie etwa die Ganzzahligkeit der *Knotenzahl* einer schwingenden Saite. Die neue Auffassung ist verallgemeinerungsfähig und rührt, wie ich glaube, sehr tief an das wahre Wesen der Quantenvorschriften.

Die übliche Form der letzteren knüpft an die HAMILTONsche partielle Differentialgleichung an:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E. \tag{1}$$

[1]) Annalen der Physik 79 (1926) 361.

Es wird von dieser Gleichung eine Lösung gesucht, welche sich darstellt als *Summe* von Funktionen je einer einzigen der unabhängigen Variablen q.

Wir führen nun für S eine neue unbekannte ψ ein derart, daß ψ als ein *Produkt* von eingriffigen Funktionen der einzelnen Koordinaten erscheinen würde. D. h. wir setzen

$$S = K \lg \psi. \tag{2}$$

Die Konstante K muß aus dimensionellen Gründen eingeführt werden, sie hat die Dimension einer *Wirkung*. Damit erhält man

$$H\left(q, \frac{K}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = E. \tag{1'}$$

Wir suchen nun *nicht* eine Lösung der Gleichung (1'), sondern wir stellen folgende Forderung. Gleichung (1') läßt sich bei Vernachlässigung der Massenveränderlichkeit stets, bei Berücksichtigung derselben wenigstens dann, wenn es sich um das *Ein*elektronenproblem handelt, auf die Gestalt bringen: quadratische Form von ψ und seinen ersten Ableitungen $= 0$. Wir suchen solche reelle im ganzen Konfigurationenraum eindeutige endliche und zweimal stetig differenzierbare Funktionen ψ, welche das über den ganzen Konfigurationenraum erstreckte Integral der eben genannten quadratischen Form[1]) zu einem *Extremum* machen. *Durch dieses Variationsproblem ersetzen wir die Quantenbedingungen.*

Wir werden für H zunächst die HAMILTONsche Funktion der Keplerbewegung nehmen und zeigen, daß die aufgestellte Forderung für *alle positiven*, aber nur für eine *diskrete Schar von negativen* E-Werten erfüllbar ist. D. h. das genannte Variationsproblem hat ein diskretes und und ein kontinuierliches Eigenwertspektrum. Das diskrete Spektrum entspricht den BALMERschen Termen, das kontinuierliche den Energien der Hyperbelbahnen.

[1]) Es entgeht mir nicht, daß diese Formulierung nicht ganz eindeutig ist.