1. Untersuchungen zur Quantentheorie

von

LOUIS DE BROGLIE

Einleitung

Die Geschichte der optischen Theorien zeigt, daß die wissenschaftliche Ansicht lange zwischen einer mechanischen und einer undulatorischen Auffassung des Lichtes geschwankt hat; vielleicht sind aber diese beiden Auffassungen viel weniger in Widerspruch zueinander, als man dies früher geglaubt hatte, und besonders scheint die Entwicklung der Quantentheorie letztere Ansicht zu bestätigen.


1) Annales de Physique 3 (1925) 22. (Dies ist der Text von de Broglie, Dissertation von 1924.)
KAPITEL I

Die Phasenwelle

§ 1. Die Quantenbeziehung und die Relativitätstheorie

Einer der wichtigsten neunen Begriffe, welcher durch die Relativitätstheorie eingeführt wurde, ist der der Trägheit der Energie. Nach EINSTEIN muß man jeder Energie Masse zuordnen, und jede Masse repräsentiert Energie. Masse und Energie sind immer durch die allgemeine Beziehung miteinander verbunden:

\[ E = mc^2, \]

wobei c eine Konstante, die sogenannte „Lichtgeschwindigkeit“, ist, die wir aber lieber aus später zu erörternden Gründen „Grenzgeschwindigkeit der Energie“ nennen wollen. Da also stets Proportionalität zwischen Masse und Energie besteht, so müssen Materie und Energie als zwei gleichbedeutende Ausdrücke aufgefaßt werden, die eine gleiche physikalische Realität bezeichnen.

Die Atomtheorie und später die Elektronentheorie haben uns gelehrt, daß wir die Materie als wesentlich diskontinuierlich aufzufassen habe, und dies führt uns zu der Annahme, daß alle Energieformen, im Gegensatz zu den älteren Vorstellungen über die Natur des Lichtes, vollständig in kleinen Raumeinheiten konzentriert oder wenigstens um gewisse singuläre Punkte verdichtet sind.

Das Prinzip der Trägheit der Energie ordnet jedem Körper, dessen Eigenmasse (d. h. gemessen vom Beobachter im gleichen System) \( m_0 \) ist, eine Eigenenergie \( m_0 c^2 \) zu. Wenn der Körper in gleichförmiger Bewegung von der Geschwindigkeit \( v = \beta \cdot c \) relativ zu dem Beobachter, den wir als ruhend bezeichnen wollen, ist, so wird seine Masse für diesen Wert \( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \) haben gemäß einer bekannten Formel der relativistischen Dynamik, und seine Energie ist infolgedessen \( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \). Da die kinetische Energie als der Zuwachs angesehen werden kann, den die Energie des Körpers für den ruhenden Beobachter erfährt, wenn der Körper aus dem Ruhezustand in den Bewegungszustand mit der Geschwindigkeit \( v = \beta \cdot c \) übergeht, findet man für ihren Wert den folgenden Ausdruck:

\[ E_{\text{kin}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right), \]

der natürlich für kleine Werte von \( \beta \) in den klassischen Wert übergeht:

\[ E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_v v^2. \]

Nachdem wir uns dies ins Gedächtnis zurückgerufen haben, wollen wir uns der Frage zuwenden, in welcher Form wir in die relativistische Dynamik die Quanten einführen können. Die Grundidee der Quantentheorie ist wohl die Unmöglichkeit, ein isoliertes Energiestück zu betrachten, ohne diesem eine gewisse Frequenz zuzuordnen. Diese Begriffsverbindung drückt sich in folgender Beziehung aus, die ich die Quantenbeziehung nennen will:

\[ E = h \cdot \nu, \]

wobei \( h \) die PLANCKSCHE Konstante ist.

Es ist daher annehmbar, daß zufolge einem allgemeinen Naturgesetz mit jedem Energiestück von der Eigenmasse \( m_0 \) ein periodisches Phänomen von der Frequenz \( \nu \), nach der Beziehung verbunden ist:

\[ h \nu = m_0 c^2. \]
\( v_0 \) ist dabei, was wohl zu beachten ist, in dem mit dem Energiestück fest verbundenen System gemessen. Diese Hypothese ist die Grundlage unserer Theorie: Sie gilt, wie alle Hypothesen, so weit, wie die aus ihr zu ziehenden Folgerungen.

Nachdem wir die Existenz einer dem Energiestück zuzuordnenden Frequenz angenommen haben, wenden wir uns der Frage zu, in welcher Weise sich diese Frequenz dem oben erwähnten festen Beobachter äußert. Die Lorentz-Einsteinsche Zeittransformation lehrt uns, daß ein mit dem bewegten Körper verbundenes periodisches Ereignis sich für den festen Beobachter im Verhältnis \( 1/\sqrt{1 - \beta^2} \) verlangsamt; das ist die bekannte Erscheinung des Nachgehens der Uhren. Daher ist die vom festen Beobachter gemessene Frequenz

\[
\nu_1 = v_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\nu_0 c^2}{\hbar} \sqrt{1 - \beta^2}.
\]

Andererseits ist aber, da die Energie des bewegten Teilchens für den festen Beobachter gleich \( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \) ist, die nach der Quantenbeziehung entsprechende Frequenz \( \nu = \frac{1}{\hbar} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \). Diese beiden Frequenzen \( \nu_1 \) und \( \nu \) sind wesentlich verschieden, da in sie der Faktor \( \sqrt{1 - \beta^2} \) nicht in ihrer gleichen Form eingeht. Hier liegt eine Schwierigkeit vor, die mich lange beschäftigt hat; ich gelangte zu ihrer Behebung durch den Beweis des folgenden Theorems, welches ich als das Theorem der Phasenübereinstimmung bezeichnen werde:

"Das mit dem bewegten Teilchen fest verbundene periodische Phänomen, welches in bezug auf den ruhenden Beobachter die Frequenz \( \nu_1 = \frac{1}{\hbar} m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \) hat, erscheint diesem Beobachter beständig in Phase mit einer Welle von der Frequenz \( \nu = \frac{1}{\hbar} m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \), die sich in der Bewegungsrichtung des beweglichen Teilchens mit der Geschwindigkeit \( \frac{c}{\beta} \) ausbreitet."\n
Der Beweis ist sehr einfach. Vorausgesetzt, daß zur Zeit \( t = 0 \) Phasenübereinstimmung zwischen dem mit dem bewegten Teilchen verbundenen periodischen Phänomen und der späteren, nach dem bewegten Teilchen definierten Welle besteht. Zur Zeit \( t \) hat das bewegte Teilchen den Weg \( x = \beta ct \) zurückgelegt, und die Phase des periodischen Phänomens hat sich geändert um

\[
\nu_1 t = \frac{m_0 c^2}{\hbar} \sqrt{1 - \beta^2} \cdot \frac{x}{\beta c}.
\]

Die Phase des Teiles der Welle, die das bewegte Teilchen überdeckt, hat sich geändert um:

\[
\nu \left( t - \frac{\beta x}{c} \right) = \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( \frac{x}{\beta c} - \frac{\beta x}{c} \right)
\]

Es existiert also Phasenübereinstimmung, wie wir be- hauptet haben.

Man kann diesen Theorem einen anderen Beweis geben, der zwar mit dem eben gegebenen im Grunde genommen identisch ist, aber vielleicht noch überraschender wirkt. Wenn \( t_0 \) die Zeit eines mit dem bewegten Teilchen verbundenen Beobachters darstellt (Eigenzeit des bewegten Teilchens), so ergibt die Lorentz-Transformation:

\[
t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( t - \frac{\beta x}{c} \right).
\]
Das von uns gedachte periodische Phänomen wird für den
durch eine Sinusfunktion von $v_0 t$ dargestellt. Für den festen Beobachter wird es durch die
gleiche Sinusfunktion von $v_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( t - \frac{\beta x}{c} \right)$ reprä-
zentiert, welche eine Welle der Frequenz $\frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ bezeichnet, die sich mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\beta}$ in
gleicher Richtung wie das bewegte Teilchen fort-
pflanzt.

Es ist unumgänglich nötig, auf die Natur der Welle zurückzukommen, deren Existenz wir obendrein annehmen
haben. Die Tatsache, daß deren Geschwindigkeit $V = \frac{c}{\beta}$ notwendigerweise größer als $c$ ist ($\beta$ ist immer
kleiner als 1, da sonst die Masse unendlich bzw. imaginär
sein würde), beweist, daß es sich keinesfalls um eine Ener-
gie befördernde Welle handelt kann. Unser Theorem
dagegen lehrt, daß sie die Verteilung der Phasen eines
Ereignisses im Raum darstellt; sie ist daher eine „Phasen-
weise“.

§ 2. Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit

Wir werden jetzt eine zwischen der Geschwindigkeit
des bewegten Teilchens und der der Phasenwelle be-
stehende wichtige Beziehung ableiten. Wenn Wellen
von sehr benachbarten Frequenzen sich in der gleichen
Richtung $Ox$ mit der Geschwindigkeit $V$ ausbreiten,
die wir Geschwindigkeit der Phasenfortpflanzung nennen
werden, so werden diese Wellen durch Superposition
Schwebungerscheinungen geben, wenn sich die Geschwin-
digkeit $V$ mit der Frequenz $v$ verändert. Diese Erschei-
nungen sind insbesondere von Lord Rayleigh für den
Fall zerstreuerender Medien untersucht worden.

I. Die Phasenwelle

Wir fassen also zwei Wellen mit den benachbarten
Frequenzen $v$ und $v + \delta v$ und den Geschwindigkeiten $V$
und $V' = V + \frac{dV}{dv} \delta v$ ins Auge; ihre Superposition
wird analytisch durch die folgende Gleichung, die man
durch Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in
$\delta v$ gegenüber $v$ erhält, wiedergegeben:

$$
\sin 2\pi \left( vt - \frac{vx}{V} + \psi \right) + \sin 2\pi \left( v't - \frac{v'x}{V'} + \psi' \right) = 2 \sin 2\pi \left( vt - \frac{vx}{V} + \psi \right) 
\times \cos 2\pi \left[ 2 - x \frac{dV}{dv} \delta v \right].
$$

Wir erhalten also wieder eine Sinuswelle, deren Amplitu-
dade um die Frequenz $\delta v$ geändert ist, denn das Kosinus-
zeichnen macht wenig aus. Das ist ein wohlbekanntes
Ergebnis. Wann man mit $U$ die Ausbreitungsgeschwindig-
dkeit der Schwebung oder die Gruppengeschwindigkeit
der Wellen bezeichnet, so findet man

$$
\frac{1}{U} = \frac{d\left( \frac{v}{V} \right)}{dv}.
$$

Kehren wir zur Betrachtung der Phasenwellen zurück.
Man erteile dem beweglichen Teilchen eine Geschwindig-
keit $v = \beta c$, indem man $\beta$ keinen völlig bestimmten
Wert zulegt, sondern nur annimmt, daß dieser Wert
zwischen $\beta$ und $\beta + \delta \beta$ liegt; die Frequenzen der korre-
spondierenden Phasenwellen liegen dann in dem kleinen
Intervall $v, v + \delta v$. 
Wir stellen jetzt den folgenden Satz auf, der uns später nützlich sein wird: „Die Gruppengeschwindigkeit der Phasenwellen ist gleich der Geschwindigkeit des bewegten Teilchens". In der Tat ist diese Gruppengeschwindigkeit ja durch die obengenannte Formel bestimmt, in der $V$ und $v$ als Funktion von $\beta$ angesehen werden können gemäß den Beziehungen:

$$V = \frac{c}{\beta}, \quad v = \frac{1}{h} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Man kann schreiben:

$$U = \frac{\beta}{\frac{d}{d\beta} \left(\frac{V}{v}\right)};$$

nun ist aber

$$\frac{d\frac{V}{v}}{d\beta} = m_0 c^3 \beta \frac{1}{h (1 - \beta^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\frac{d}{d\beta} \left(\frac{V}{v}\right)}{d\beta} = m_0 \frac{c}{h} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0 c}{h} \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}},$$

infolgedessen:

$$U = \beta \cdot c = v.$$

Die Gruppengeschwindigkeit der Phasenwellen stimmt also mit der Geschwindigkeit des bewegten Teilchens überein. Dieses Ergebnis erfordert eine Bemerkung: In der Wellentheorie der Dispersion ist, abgesehen von den Absorptionsgebieten, die Geschwindigkeit der Energie gleich der Gruppengeschwindigkeit. Hier finden wir von einem ganz anderen Gesichtspunkt aus ein analoges

II. MAUPTUSSCHES UND FERMATSCHE PRINZIP

Resultat, denn die Geschwindigkeit des beweglichen Teilchens ist nichts anderes als die Verschiebungs geschwindigkeit der Energie.

KAPITEL II

Das Maupertuissche und das Fermatsche Prinzip

§ 1. Aufgabe dieses Kapitels

In diesem Kapitel wollen wir den Versuch der Verallgemeinerung der Ergebnisse des Kapitels I auf den Fall eines nicht gleichförmig-geradlinig bewegten Teilchens unternehmen. Diese abgeänderte Bewegung setzt das Vorhandensein irgendeines Kraftfeldes voraus, das auf das bewegliche Teilchen wirkt. Für uns soll jetzt ein elektromagnetisches Feld sein, die Mechanik der variierten Bewegung besteht dann in dem Studium der Bewegung eines elektrisch geladenen Körpers in einem elektromagnetischen Feld.

§ 2. Die beiden Prinzip der kleinsten Wirkung in der klassischen Dynamik

Das Prinzip der kleinsten Wirkung kann in der klassischen Mechanik in der Hamiltonschen Form folgendermaßen ausgedrückt werden:

"Die Gleichungen der Dynamik lassen sich ableiten aus der Forderung, daß das Integral \( \delta \int L \, dt \), genommen zwischen festen Zeitgrenzen für gegebene Anfangs- und Endwerte der Parameter \( q_i \) und \( q_i = \frac{dq_i}{dt} \) abhängt."

Laut Definition heißt \( L \) die Lagrange-Funktion, die nur von den Variablen \( q_i \) und \( \dot{q}_i \) abhängt.

Man hat also:

\[ \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0. \]

Hieraus leitet man nach einer aus der Variationsrechnung bekannten Methode die sogenannte Lagrangesche Gleichung ab:

\[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \]

deren Zahl gleich der Anzahl der Variablen \( q_i \) ist.

Es bleibt noch die Funktion \( L \) zu definieren. Die klassische Mechanik setzt:

\[ L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}, \]

die Differenz der kinetischen und potentiellen Energie. Weiter unten werden wir sehen, daß die relativistische Dynamik einen von \( L \) verschiedenen Wert benutzt.

Gehen wir jetzt zum Prinzip der kleinsten Wirkung in der Maupertussischen Fassung über. Hierzu bemerken wir zuerst, daß die Lagrangeschen Gleichungen in der obigen allgemeinen Form ein erstes Integral besitzen, die sogenannte "Systemenergie", die gleich ist

\[ W = -L + \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i, \]

wieder vorausgesetzt, daß die Funktion \( L \) nicht explizit von der Zeit abhängt, was wir im folgenden immer annehmen. Dann hat man in der Tat:

\[ \frac{dW}{dt} = -\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \ddot{q}_i = \sum \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_i = \sum \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i, \]

eine Größe, die gemäß den Lagrangeschen Gleichungen verschwindet. Daher folgt:

\[ W = \text{const.} \]

Wir wenden jetzt das Hamiltonsche Prinzip auf alle "variierenden" Bahnen an, die von einem gegebenen Anfangspunkt \( A \) zu einem gegebenen Endpunkt \( B \) führen und einem bestimmten Wert der Energie \( W \) entsprechen. Man kann, da \( W, t_1 \) und \( t_2 \) Konstante sind, schreiben:

\[ \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L \, dt = \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} (L + W) \, dt = 0, \]

oder auch:

\[ \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \, dt = \delta \int\limits_{A}^{B} \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} d\dot{q}_i = 0, \]

das letzte Integral erstreckt sich über alle Werte der \( q_i \) zwischen \( A \) und \( B \) derart, daß die Zeit eliminiert ist; es ist nicht mehr angängig, in der nun erhaltenen Form
Irgendwie beschränkung der Zeitgrenzen vorzuschreiben. Im Gegenteil müssen alle abgeänderten Bahnen einem und denselben Wert der Energie $W$ entsprechen.\footnote{Um den Beweis streng zu machen ist es nötig in wohlbehandelter Weise die Grenzen $t_1$ und $t_2$ zu variieren zu lassen; doch ist wegen der Zeitabhängigkeit des Resultates unser Gedankenrangle nicht unmöglich.}

Wir führen jetzt die klassische Bezeichnungsweise der kanonischen Gleichungen ein: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Die Momente sind die konjugierten Momente der Variablen $q_i$. Das MAUERPITZSCHES Prinzip läßt sich dann klassisch-mechanisch schreiben:

$$\delta \int_A \sum_i p_i dq_i = 0,$$

wobei $L = E_{kin} - E_{pot}$, $E_{pot}$ unabhängig von den $q_i$ und $E_{kin}$ eine homogene quadratische Funktion ist. Infolge des EULERSCHEN Theorems ist dann

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i p_i \dot{q}_i dt = 2 E_{kin} dt.$$

In Bezug auf den materiellen Punkt ist $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$, und das Prinzip der kleinsten Wirkung nimmt seine am längsten bekannte Form an:

$$\delta \int_A m v \dot{d}l = 0,$$

wo $\dot{d}l$ das Bahnelement ist.

§ 3. Die beiden Prinzip der kleinsten Wirkung in der Dynamik des Elektrons

Wir wenden uns jetzt wieder der Frage der Dynamik des Elektrons vom relativistischen Standpunkt an zu. Hier müssen wir die Bezeichnung „Elektron“ in dem all-

II. MAUERPITZSCHES und FERMATSCHE Prinzip

gemeinen Sinne eines eine elektrische Ladung tragenden materiellen Punktes auffassen. Wir wollen voraussetzen, daß das außerhalb irgendeines Feldes befindliche Elektron eine Eigennmasse $m_0$ besitzt; seine elektrische Ladung werde mit $e$ bezeichnet.

Wir wollen wiederum das Raum-Zeitsystem betrachten; die Raumkoordinaten seien $x^1, x^2$ und $x^3$, die gegebene Koordinate $ct$ sei $x^0$. Die Fundamentalinvariante, das „Längenelement“ ist definiert durch die Gleichung

$$ds = \sqrt{(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}.$$

In diesem Paragraphen wie im folgenden werden wir ständig einige Bezeichnungsweisen des Tensorkalküls gebrauchen.

Eine Weltlinie besitzt in jedem Punkte eine Tangente, deren Richtung durch den „Weltgeschwindigkeitsvektor“ von der Längeneinheit bestimmt ist, dessen kontravariante Komponenten durch die Gleichung gegeben sind:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Man verifiziert sofort die Beziehung $u^i \cdot u_i = 1$.

Ein bewegliches Teilchen möge die Weltlinie beschreiben; wenn es durch den betrachteten Punkt hindurchgeht, besitzt es eine Geschwindigkeit $v = \beta c$ mit den Komponenten $v_x, v_y, v_z$. Die Komponenten des Weltgeschwindigkeitsvektors sind:

$$\begin{align*}
  u_1 &= -u^1 = -\frac{v_x}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \\
  u_2 &= -u^2 = -\frac{v_y}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \\
  u_3 &= -u^3 = -\frac{v_z}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \\
  u_4 &= u^4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}
\end{align*}$$

Zum Zwecke der Definition eines elektromagnetischen Feldes müssen wir einen zweiten Weltvektor einführen,

7 Ludwig, Wellemechanik.
dessen Komponenten in Abhängigkeit von dem Vektorpotential $a$ und dem skalaren Potential $\psi$ durch die Gleichungen wiedergegeben werden:

\[ q_1 = -q^1 = -a_x; \quad q_2 = -q^2 = -a_y; \]
\[ q_3 = -q^3 = -a_z; \quad q_4 = +q^4 = \frac{1}{c} \psi. \]

Betrachten wir jetzt zwei Punkte $P$ und $Q$ im Raum-Zeitsystem, die gegebenen Werten der Raum- und Zeitkoordinaten entsprechen. Wir können ein Kurvenintegral ins Auge fassen, das längs der Weltlinie von $P$ nach $Q$ genommen ist; natürlich muß die zu integrierende Funktion invariant sein.

Es sei:

\[ \oint_C (-m_0c - e\varphi u') \, ds = \oint_C (-m_0c u_i - e\varphi u_i) \, u' \, ds \]

dieses Integral. Das Hamiltonische Prinzip behauptet, daß, falls die Weltlinie eines beweglichen Teilchens durch $P$ und $Q$ hindurchgeht, sie eine solche Form hat, daß das oben definierte Integral einen stationären Wert hat.

Wir definieren einen dritten Weltvektor durch die Beziehung:

\[ J_i = m_0 c u_i + e\varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4); \]

der Satz von der kleinsten Wirkung nimmt dann die Form an:

\[ \oint J_i \, dx^i = \oint J_1 \, dx^1 + J_2 \, dx^2 + J_3 \, dx^3 + J_4 \, dx^4 = \oint J_i \, dx^i = 0. \]

Wir werden weiter unten dem Weltvektor $J$ einen physikalischen Sinn zuordnen.

II. MAUPERTUISCHES UND FERMATSCHE PRINZIP

Jetzt wenden wir uns zu der gebräuchlichen Fassung der dynamischen Gleichungen zurück, indem wir in der ersten Form des Wirkungsintegrals $ds$ durch $c\,dt \sqrt{1 - \beta^2}$ ersetzen. Auf diese Weise folgt:

\[ \oint_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - e \varphi J_i - e (\varphi_1 v_x + \varphi_2 v_y + \varphi_3 v_z) \right] \times \, dt = 0, \]

wobei $\tau_1$ und $\tau_2$ den Punkten $P$ und $Q$ des Raum-Zeit systems entsprechen.

Wenn ein rein elektrostatisches Feld vorhanden ist, sind die Größen $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ gleich Null, und die LA GRANGE-Funktion nimmt die oft nützliche Form an:

\[ L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - e \varphi. \]

In allen Fällen wird man, da das HAMILTONSCHE Prinzip immer die Form

\[ \oint_{\tau_1}^{\tau_2} \delta L \, dt = 0 \]

hat, stets zu den LA GRANGE'schen Gleichungen geführt:

\[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (i = 1, 2, 3). \]

Immer, wenn die Potentiale nicht von der Zeit abhängen, erhält man den Energieerhaltungssatz zurück:

\[ W = -L + \sum_i p_i q_i = \text{const}, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, 3. \]

Folgt man genau dem oben eingeschlagenen Weg, so erhält man das MAUPERTUSSche Prinzip:

\[ \oint \delta \sum_i p_i dq_i = 0, \]
wenn A und B zwei Raumpunkte sind, die für das benutzte Bezugszenystem den Punkten P und Q des Raum-
Zeitsystems entsprechen.

Die Größen \( p_x, p_y, p_z \), die gleich den partiellen Ableitungen der Funktion \( L \) nach den entsprechenden Ge-
schwindigkeiten sind, können zur Definition des Vektors \( p \) dienen, den wir als „Momentenvektor“ bezeichnen wollen. Falls kein magnetisches Feld vorhanden sei, sind die Komponenten dieses Vektors:

\[
\begin{align*}
  p_x &= \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\
  p_y &= \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\
  p_z &= \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}.
\end{align*}
\]

Er ist also identisch mit der Bewegungsgröße und das Maurer-Tuschi'sche Wirkungsintegral hat die einfache von Maurertus selbst gebrauchte Form mit dem einzigen Unterschied, daß die Masse nach dem Lorentzischen Ge-
setz von der Geschwindigkeit abhängt.

Wenn ein magnetisches Feld vorhanden ist, so findet man für die Komponenten des Momentenvektors die Aus-
drücke:

\[
\begin{align*}
  p_x &= \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e \alpha_x, \\
  p_y &= \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e \alpha_y, \\
  p_z &= \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e \alpha_z,
\end{align*}
\]

Jetzt besteht keine Identität mehr zwischen dem Vektor \( p \) und der Bewegungsgröße; infolgedessen wird der Aus-
druck für das Wirkungsintegral komplizierter.

Wir betrachten ein in einem Feld befindliches beweg-
lisches Teilchen von gegebener Gesamtenergie; in jedem für das bewegte Teilchen erreichbaren Punkt des Feldes ist seine Geschwindigkeit durch die Energie-
gleichung bestimmt, aber die Richtung kann a priori unbestimmt sein. Die Ausdrücke für \( p_x, p_y \) und \( p_z \)

zeigen, daß der Momentenvektor in jedem Punkte eines elektrostatischen Feldes die gleiche Größe besitzt, welches auch immer die betrachtete Richtung sei. Dies trifft nicht mehr zu, wenn es sich um ein magnetisches Feld handelt: Der Betrag des Vektors \( p \) hängt dann von dem Winkel zwischen der betreffenden Richtung und dem potentiellen Vektor ab, wie man durch Berechnung des Ausdruckes

\[
p_x^2 + p_y^2 + p_z^2
\]

erkennt. Diese Bemerkung wird später von Nutzen sein.

Zum Schluß dieses Paragraphen gehen wir noch auf die physikalische Bedeutung des Weltvektors \( J \) ein, von dem das Hamiltonische Integral abhängt. Wir haben ihn definiert durch:

\[
J_i = m_0 c u_i + e \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).
\]

Vermittels der Werte von \( u_i \) und \( \varphi_i \) folgt:

\[
J_1 = -p_x, \quad J_2 = -p_y, \quad J_3 = -p_z, \quad J_4 = \frac{W}{c}.
\]

Die kontravarianten Komponenten sind:

\[
J^1 = p_x, \quad J^2 = p_y, \quad J^3 = p_z, \quad J^4 = \frac{W}{c}.
\]

Es handelt sich also um den bekannten „Weltimpulsvektor“, der die Energie und die Bewegungsgröße zu-
 sammenfaßt.

Aus

\[
\delta \int \frac{q}{p} J_i \, dx^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\]

folgt sogleich, falls \( J_4 \) konstant ist:

\[
\delta \int J_4 \, dx^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).
\]
Dies ist die kürzeste Fassung, in welche man das Wirkungsprinzip kleiden kann.

§ 4. Ausbreitung der Wellen; Fermatsches Prinzip

Wir wenden uns jetzt der Frage nach der Fortpflanzung der Phase einer Sinuswelle zu, die wir nach einer Methode, analog der, welche wir in den letzten beiden Paragraphen eingeschlagen haben, untersuchen wollen. Wir stellen uns daher auf einen sehr allgemeinen Standpunkt, wir wollen wiederum das Raum-Zeit syst em ins Auge fassen.

Wir untersuchen die Funktion sin φ, in der das Differential von φ als von den Raum- und Zeitvariablen x_i abhängig vorausgesetzt ist. Es existiert im Raum-Zeit syst em eine unendliche Mannigfaltigkeit von Wellenlinien, längs deren die Funktion φ konstant ist.

Die Wellentheorie in der namentlich durch die Arbeiten von Huygens und Fresnel bekannten Form lehrt uns, aus diesen Linien gewisse auszusondern, deren Projektionen auf den Raum des Beobachters für ihn die „Strahlen“ im gewöhnlichen optischen Sinn sind.

Es seien, wie oben, P und Q zwei Punkte des Raum-Zeitsystems. Welches ist das die Form des Strahles bestimmende Gesetz, wenn der Strahl durch die beiden Punkte hindurchgeht?

Wir betrachten das Kurvenintegral ∫_P^Q dφ und nehmen als den Strahl bestimmende Prinzip das Hamiltonsche:

δ ∫_P^Q dφ = 0.

Das Integral muß in der Tat stationär sein, denn sonst würden Störungen, die in einem gewissen Raumpunkt Phasenübervorlaufigkeit belassen und die, nachdem sie

II. MAXWELLSCHES UND FERMATSCHES PRINZIP

etwas verschiedene Wege zurückgelegt haben, sich in einem anderen Punkt konvergieren, dort verschiedene Phasen zur Folge haben.

Die Phase φ ist eine Invariante; wenn wir aber setzen:

\[ dφ = 2π(O_1 dx^1 + O_2 dx^2 + O_3 dx^3 + O_4 dx^4) = 2πO_4 dx^4, \]

so werden die Größen O_i, die im allgemeinen Funktionen der x_i sind, die kovarianten Komponenten eines Wettvektors, des Wellenvektors. Wenn \( t \) die Strahlrichtung im üblichen Sinn ist, so wird man in gewohnter Weise dφ in der Form ansetzen:

\[ dφ = 2π \left( vt - \frac{v}{V} dt \right), \]

wo v die Frequenz und V die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist. Dann kann weiter gesetzt werden:

\[ O_1 = -\frac{v}{V} \cos(x, t), \quad O_2 = -\frac{v}{V} \cos(y, t), \]

\[ O_3 = -\frac{v}{V} \cos(z, t), \quad O_4 = \frac{v}{c}. \]

Der Wellenvektor setzt sich also aus der der Frequenz proportionalen Zeitkomponente und einem räumlichen Vektor \( \mathbf{v} \) vom Betrag \( \frac{v}{V} \) und der Richtung der Wellenausbreitung zusammen. Wir werden diesen Vektor als „Wellenzahl“ bezeichnen, da er gleich dem Reziproken der Wellenlänge ist. Wenn die Frequenz v konstant ist, gelangen wir von der Hamiltonschen Form:

\[ δ ∫_P^Q O_4 dx^4 = 0. \]
zu der Gleichung von MAUPERTUIS:

\[ \delta \int_A^B \left[ O_1 \, dx^1 + O_2 \, dx^2 + O_3 \, dx^3 \right] = 0, \]

wobei \( A \) und \( B \) die \( P \) und \( Q \) entsprechenden Raumpunkte sind.

Setzt man die Werte von \( O_1 \), \( O_2 \) und \( O_3 \) ein, so folgt

\[ \delta \int_A^B \frac{v \, dl}{V} = 0. \]

In dieser Form geht das MAUPERTUISche Prinzip in den

FERMATSchen Satz über.

Ebenso wie im vorigen Paragraphen die Kenntnis der Verteilung des Vektors \( p \) im Felde genügte, um die Bahnen, die ein durch zwei gegebene Punkte hindurchgehendes Teilchen von gegebener Gesamtenergie beschreibt, zu finden, ist hier zur Festlegung des Strahles einer Welle von gegebener Frequenz, der durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht, nur die Kenntnis der räumlichen Verteilung des Wellenvektorvorteilerforderlich, durch welchen für jeden Punkt und jede Richtung die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt wird.

§ 5. Erweiterung der Quantenbeziehung

Wir sind jetzt in dem wichtigsten Punkte der Entwicklung dieses Kapitels angelangt. Wir hatten anfangs die Frage gestellt: „Wie breitet sich die einem beweglichen Teilchen zugeordnete Phasenwelle aus, wenn dieses Teilchen sich in einem Kraftfeld nicht gleichförmig bewegt?“ Anstatt durch taste Versuche, wie ich das erst getan hatte, die Ausbreitungsgeschwindigkeit für jeden Punkt und jede Richtung zu bestimmen, will ich

II. MAUPERTUISches und FERMATSches Prinzip

eine zwar etwas hypothetische Erweiterung der Quantenbedingung vornehmen, die jedoch zweifellos in engem Zusammenhang mit relativistischen Ideen steht.

Wenn \( w \) die Gesamtenergie des bewegten Teilchens und \( \nu \) die Frequenz der zugeordneten Phasenwelle ist, so besteht die Beziehung \( \hbar \nu = w \). Nun haben wir aber die letzten Paragraphen gezeigt, in welcher Weise zwei Weltvektoren \( J \) und \( O \) definitiv werden können, die bezüglich des Stadiums eines beweglichen Teilchens einerseits und der Ausbreitung einer Welle andererseits vollständig analoge Rollen spielen.

Führen wir diese Vektoren ein, so schreibt sich die Beziehung \( \hbar \nu = w \) in der Form:

\[ O_i = \frac{1}{\hbar} \, J_i. \]

Die Tatsache, daß zwei Vektoren eine gleiche Komponente haben, hat nicht zur Folge, daß auch die anderen gleich sind. Mittels einer sehr naheliegenden Verallgemeinerung nehmen wir dies jedoch an und setzen:

\[ O_i = \frac{1}{\hbar} \, J_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \]

Die Änderung \( dq \) bezüglich eines Elementes der Phasenwelle hat den Wert

\[ dq = 2\pi O_i dx^i = \frac{2\pi}{\hbar} \, J_i dx^i. \]

Das FERMATSche Prinzip wird dann:

\[ \delta \int_A^B \sum_i J_i \, dx^i = \delta \int_A^B \sum_i \frac{p_i}{\hbar} \, dx^i = 0. \]
Somit kommen wir zur Aufstellung des folgenden Satzes:

"Die Anwendung des Fermatschen Prinzipes auf die Phasenwelle ist identisch mit der Anwendung des Maupertuischen Prinzipes auf das bewegliche Teilchen; die mechanisch möglichen Bahnen des beweglichen Teilchens stimmen überein mit den möglichen Strahlen der Welle".

Man kann wohl hoffen, daß dieser Gedanke eines tiefliegenden inneren Zusammenhanges zwischen den beiden Grundprinzipien der geometrischen Optik und der Dynamik ein sicherer Führer bei der Durchführung des Versuches einer Verschmelzung der Wellentheorie und der Quantentheorie sein wird.

Die Hypothese von der Proportionalität der Vektoren $J$ und $O$ ist eine Art Erweiterung der Quantenbeziehung, deren gegenwärtige Form ja auch sehr unbefriedigend ist, da in sie die Energie, nicht aber die mit dieser untrennbar verbundene Bewegungsgröße eingeht. Die neue Fassung ist viel befriedigender, weil sie die Gleichheit zweier Weltvektoren dargestellt wird.

**KAPITEL III**

**Die quantentheoretischen Stabilitätsbedingungen der Bahnen**

§ 1. Die Bohr-Sommerfeldschen Stabilitätsbedingungen

Im Jahre 1917 gab Einstein der Quantenbedingung eine bezüglich Koordinatenveränderungen invariante Form\(^1\). Wir wollen diese Quantenbedingung für den Fall geschlossener Bahnen formulieren; sie hat dann folgende Form:

$$\oint p_i dq_i = n\hbar$$


wobei das Integral über die ganze Bahkurve zu erstrecken ist. Man erkennt in dieser Form das Maupertuische Wirkungsintegral wieder, welches ja in der Quantentheorie eine hervorragende Rolle spielt.

§ 2. Die Interpretation der Einsteinischen Bedingung

Der Begriff der Phasenwelle gestattet uns eine Erklärung der Einsteinischen Bedingung. Diese Erklärung geht aus den Überlegungen des Kapitels II hervor, wonach die Bahn des beweglichen Teilchens einer der Strahlen seiner Phasenwelle ist, welche sich längs der Bahn mit einer konstanten Frequenz (da die Gesamtenergie konstant ist) und veränderlicher Geschwindigkeit ausbreitet, deren Wert wir berechnen können. Die Ausbreitung ist daher analog der einer Flüssigkeitswelle in einem geschlossenen Kanal von veränderlicher Tiefe. Es ist physikalisch evident, daß, um einen stabilen Zustand zu haben, die Länge des Kanals mit der Welle in Resonanz sein muß; anders ausgedrückt: Die Teile der Welle, die in einer Entfernung, welche ein ganzzahliges Vielfaches der Kanallänge $l$ ist, aufeinander folgen und die sich infolgedessen im gleichen Punkte befinden, müssen miteinander in Phase sein. Die Resonanzbedingung ist $l = n\lambda$, wenn die Wellenlänge konstant ist, und

$$\oint \frac{p}{\lambda} dl = n\hbar$$

(to be continued)
Rechtferdigung unserer Art der Behandlung des Quantenproblems.

In dem speziellen Fall der kreisförmigen Bahnen im Bohrschen Atom erhält man \( m_0 \oint v \, dl = 2 \pi R m_0 v = n h \), oder, da \( v = \alpha R \), falls \( \alpha \) die Winkelgeschwindigkeit ist:

\[
m_0 \alpha R^2 = n \frac{h}{2\pi}.
\]

Dies ist aber wieder die einfache Bohrsche Stabilitätsbedingung.

2. Quantisierung als Eigenwertproblem

Von

ERWIN SCHröDINGER

(Erste Mitteilung)

§ 1. In dieser Mitteilung möchte ich zunächst an dem einfachsten Fall des (nichtrelativistischen und ungestörten) Wasserstoffatoms zeigen, daß die übliche Quantisierungsvorschrift sich durch eine andere Forderung ersetzen läßt, in der kein Wort von „ganzen Zahlen“ mehr vorkommt. Vielmehr ergibt sich die Ganzzahligkeit auf dieselbe natürliche Art, wie etwa die Ganzzahligkeit der Knotenzahl einer schwingenden Saite. Die neue Auflassung ist verallgemeinerungsfähig und rührt, wie ich glaube, sehr tief an das wahre Wesen der Quantenvorschriften.

Die übliche Form der letzteren knüpft an die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung an:

\[
H \left( q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) = E. \tag{1}
\]

Quantisierung als Eigenwertproblem

Es wird von dieser Gleichung eine Lösung gesucht, welche sich darstellt als Summe von Funktionen je einer einzigen der unabhängigen Variablen \( q \).

Wir führen nun für \( S \) eine neue unbekannte \( \psi \) ein derart, daß \( \psi \) als ein Produkt von eingegriffenen Funktionen der einzelnen Koordinaten erscheinen würde. D. h. wir setzen

\[
S = K \log \psi. \tag{2}
\]

Die Konstante \( K \) muß aus dimensionellen Gründen eingeführt werden, sie hat die Dimension einer Wirkung. Damit erhält man

\[
H \left( q, \frac{K}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) = E. \tag{1'}
\]

Wir suchen nun nicht eine Lösung der Gleichung (1'), sondern wir stellen folgende Forderung. Gleichung (1') läßt sich bei Vernachlässigung der Massenveränderlichkeit stets, bei Berücksichtigung derselben wenigstens dann, wenn es sich um das Elektronenproblem handelt, auf die Gestalt bringen: quadratische Form von \( \psi \) und seinen ersten Ableitungen = 0. Wir suchen solche reelle im ganzen Konfigurationenraum eindeutige endliche und zweimal stetig differenzierbare Funktionen \( \psi \), welche das über den ganzen Konfigurationenraum erstreckte Integral der eben genannten quadratischen Form (2) zu einem Extremum machen. Durch dieses Variationsproblem ersetzen wir die Quantenbedingungen.

Wir werden für \( H \) zunächst die Hamiltonsche Funktion der Keplerbewegung nehmen und zeigen, daß die aufgestellte Forderung für alle positiven, aber nur für eine diskrete Schar von negativen \( E \)-Werten erfüllbar ist. D. h. das genannte Variationsproblem hat ein diskretes und ein kontinuierliches Eigenwertspektrum. Das diskrete Spektrum entspricht den Balsmischen Termen, das kontinuierliche den Energien der Hyperbelbahnen.

\[1^)\) Anm. der Physik 79 (1926) 361.

\[1^)\) Es entgeht mir nicht, daß diese Formulierung nicht ganz eindeutig ist.