

Quantentheoretische Umdeutung der Voigtschen Theorie des anomalen Zeemaneffektes vom D -Linientypus.

Von A. Sommerfeld in München.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 12. Dezember 1921.)

Woldemar Voigt¹⁾ hat als schönste Frucht seiner langjährigen magnetooptischen Studien Schwingungsgleichungen für den Zeemaneffekt der D -Linien aufgestellt, welche nicht nur für schwache Felder den anomalen, sondern auch für starke Felder den normalen Zeemaneffekt (Paschen-Back-Effekt) wiedergeben und zugleich den Umwandlungsprozeß vom einen in den anderen Typus wie es scheint völlig richtig darstellen. Was die Lorentzsche Theorie für den normalen, scheint die Voigtsche Theorie für den anomalen Zeemaneffekt zu sein, nämlich der adäquate Ausdruck der Tatsachen in der Sprache der Schwingungstheorie. Die von Voigt für den Absorptionsvorgang, den sogenannten „inversen Zeemaneffekt“ abgeleiteten Gleichungen habe ich wesentlich vereinfacht²⁾, indem ich den Emissionsprozeß betrachtete; ich möchte jetzt zeigen, wie sich diese Gleichungen aus der schwingungstheoretischen in die quantentheoretische Sprache übersetzen lassen.

§ 1. Allgemeines zur Voigtschen Theorie. Da das Intensitätsverhältnis $D_2:D_1$ gleich 2:1 ist, nimmt Voigt zwei Elektronen mit der Schwingungszahl von D_2 , ein Elektron mit derjenigen von D_1 an. Beide Elektronenarten sind quasielastisch gebunden und schwingen ohne Magnetfeld unabhängig voneinander; ihre Kreisfrequenzen seien ω_2 und ω_1 . Durch das Magnetfeld H werden sie miteinander gekoppelt. Die Kopplung ist linear und „wattlos“. Sie wird verschieden angesetzt für die parallelen Schwingungen (π -Komponenten) und die senkrechten (σ -Komponenten). Die Schwingung des D_1 -Elektrons wird durch die Größe ξ_1 , die der beiden D_2 -Elektronen durch ξ_2 und ξ_3 dargestellt. ν bedeutet die Winkelgeschwindigkeit der Larmorpräzession³⁾, kurz „Larmorfrequenz“ genannt:

$$\nu = \frac{e}{m} \frac{H}{2c}.$$

¹⁾ Ann. d. Phys. **41**, 403, 1913 und **42**, 210, 1913.

²⁾ Göttinger Nachrichten, März 1914.

³⁾ Vgl. z. B. mein Buch „Atombau und Spektrallinien“, 2. Aufl., Gleichung (2) von S. 423, 3. Aufl., Gleichung (2) von S. 364.

Wie l. c. gezeigt wurde, lassen sich die Voigtschen Gleichungen für den Emissionsvorgang auf die folgende überraschend einfache Form bringen:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2i\nu\frac{d}{dt} + \omega_k^2\right)\xi_k = \frac{2}{3}i\nu\frac{d}{dt}(\xi_k + \xi_{k+1} + \xi_{k+2}) \quad (1)$$

für die π -Komponenten,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2i\nu\frac{d}{dt} + \omega_k^2\right)\xi_k = -\frac{2}{3}i\nu\frac{d}{dt}(\xi_k + \varepsilon\xi_{k+1} + \varepsilon^2\xi_{k+2}) \quad (2)$$

für die σ -Komponenten. Der Index von ξ ist modulo 3 zu nehmen; ω_k bedeutet ω_1 für $k = 1$, ω_2 für $k = 2$ oder 3 ; ε ist die dritte Einheitswurzel

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Die zyklische Wahl der in (1) und (2) rechts vorkommenden „Kopplungskoeffizienten“ $(1, 1, 1)$ bzw. $(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$ bildet den Grundgedanken der Voigtschen Theorie und ermöglicht die Darstellung des Paschen-Back-Effektes.

Die Gleichungen (1) und (2) werden integriert durch den Ansatz

$$\xi_k = C_k e^{-i\omega t} \quad (3)$$

oder

$$\xi_k = C_k e^{+i\omega t}. \quad (3a)$$

Der Ansatz (3) gibt die „positiven“, auf der kurzwelligen Seite der ursprünglichen Linie gelegenen Komponenten des Zerlegungsbildes, der Ansatz (3a) die „negativen“ Komponenten auf der langwelligen Seite. Wir können uns vorläufig auf den ersten Ansatz beschränken. Jede Komponente des Zerlegungsbildes entspricht einer freien Schwingung ω des gekoppelten Systems; wegen der Kopplung ist ω von ω_1 und ω_2 verschieden.

Setzt man zur Abkürzung

$$\Omega_k = \frac{\omega_k^2 - \omega^2 + 2\nu\omega}{2\nu\omega/3} \quad (4)$$

und trägt (3) in (1) ein, so erhält man als Frequenzgleichung für die ω der positiven π -Komponenten:

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \Omega_2 - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \Omega_2 - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

ebenso durch Eintragen von (3) in (2) für die positiven σ -Komponenten:

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 + 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \Omega_2 + 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \Omega_2 + 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Der Ausdruck (4) für Ω_k läßt sich vereinfachen. Wir bemerken, daß selbst bei den stärksten Feldern die magnetisch verschobenen Linien den ursprünglichen Linien stets sehr nahe liegen. Schreiben wir daher $\omega_k^2 - \omega^2 = (\omega_k - \omega)(\omega_k + \omega)$, so ist $\omega_k + \omega$ stets sehr wenig von 2ω verschieden. Statt (4) können wir daher setzen:

$$\Omega_k = 3 \frac{\omega_k - \omega}{\omega} + 3. \tag{7}$$

Sei mit Rücksicht auf Fig. 1 M die Mitte zwischen D_2 und D_1 , $\bar{\omega}$ ihre Frequenz. Statt (7) wollen wir schreiben:

$$\Omega_k = 3 \frac{\omega_k - \bar{\omega}}{\omega} - 3 \frac{\omega - \bar{\omega}}{\omega} + 3. \tag{8}$$

Wir gehen von den Frequenzen ω zu den Schwingungszahlen ν und zugleich von der Larmorfrequenz ν zu der normalen Lorentz'schen Aufspaltung $\Delta \nu_{norm}$ über. Der ursprüngliche Schwingungs-

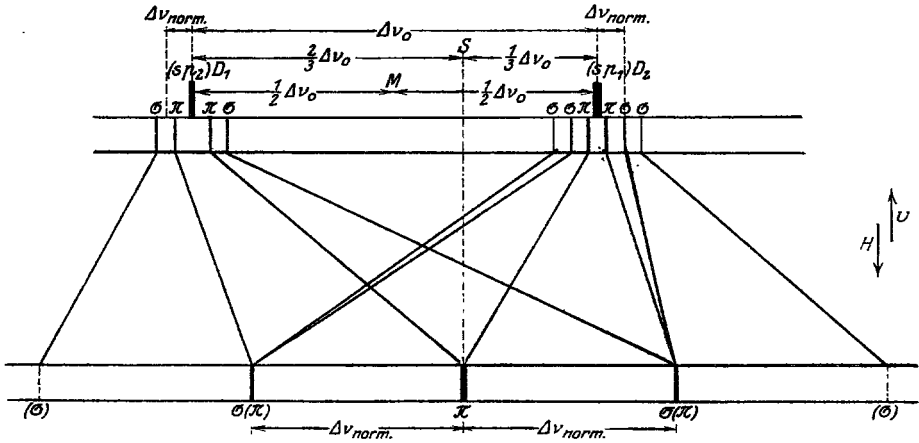


Fig. 1.

abstand der Linien D_1 und D_2 sei $\Delta \nu_0$; mit $\Delta \nu$ bezeichnen wir den Schwingungsabstand einer magnetisch verschobenen Linie von M . Dann gilt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \nu_0 &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}, & \frac{\Delta \nu_0}{2} &= \frac{\omega_2 - \bar{\omega}}{2\pi} = -\frac{\omega_1 - \bar{\omega}}{2\pi}, \\ \Delta \nu_{norm} &= \frac{\nu}{2\pi}, & \Delta \nu &= \frac{\omega - \bar{\omega}}{2\pi}. \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

Da $\Delta \nu_{norm}$ ebenso wie ν dem Magnetfelde H proportional ist, liefert das Verhältnis

$$\nu = \frac{\Delta \nu_0}{\Delta \nu_{norm}}. \tag{10}$$

ein reziprokes Maß für die Stärke des Magnetfeldes. Mit den Bezeichnungen (9) und (10) ergibt sich statt (8):

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{3}{2}v - 3 \frac{\Delta v}{\Delta v_{\text{norm}}} + 3, \\ \Omega_2 &= +\frac{3}{2}v - 3 \frac{\Delta v}{\Delta v_{\text{norm}}} + 3, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 3v. \quad (11a)$$

Ist $v \gg 1$, so sprechen wir von einem „schwachen Felde“. Ein solches erzeugt den anomalen Zeemaneffekt, wie er für den Fall der D -Linien am Kopfe der Fig. 1 dargestellt ist. Ist $v \ll 1$, so sprechen wir von einem „starken Felde“. Ein solches führt zur normalen Aufspaltung des Paschen-Back-Effektes, wie er am Fuße der Fig. 1 dargestellt ist. Auf die Bedeutung der Übergangslinien in der Mitte der Figur kommen wir später zu sprechen.

§ 2. Die Frequenzgleichung der π -Komponenten. Ausrechnung der Determinante (5) ergibt:

$$(\Omega_1 - 1)(\Omega_2 - 1)^2 - (\Omega_1 - 1) - 2(\Omega_2 - 1) - 2 = \Omega_2(\Omega_1\Omega_2 - 2\Omega_1 - \Omega_2) = 0.$$

Setzen wir aus (11a) ein, so folgt als Gleichung für Ω_2 :

$$\Omega_2(\Omega_2^2 - 3(1+v)\Omega_2 + 6v) = 0. \quad (12)$$

Man hat also die folgenden drei Wurzeln:

$$\Omega_2 = 0. \quad (13)$$

$$\Omega_2 = \frac{3}{2} \left(v + 1 \mp \sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2} \right). \quad (14)$$

Setzt man die Bedeutung von Ω_2 aus (11) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\Delta v}{\Delta v_{\text{norm}}} = 1 + \frac{v}{2}. \quad (15)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta v_{\text{norm}}} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2} \right). \quad (16)$$

Für $v = 0$ (starke Felder) wird die rechte Seite von (15) gleich 1, die von (16) gleich 0 oder 1. 1 bedeutet normale Aufspaltung, 0 keine Aufspaltung.

Eine ergänzende Intensitätsbetrachtung muß zeigen, daß die Komponente im normalen Abstände verschwindende Intensität hat, daß also bei starken Feldern in Übereinstimmung mit dem Paschen-Backschen Befunde als π -Komponente nur diejenige von der Aufspaltung Null¹⁾ übrig bleibt.

¹⁾ Die Aufspaltung Null ist nicht von der Mitte von D_1 und D_2 , sondern, wie der Fuß von Fig. 1 andeutet, vom „Schwerpunkt“ beider zu berechnen. Aus

Für $v = \infty$ (schwache Felder) ergibt (16)

$$\frac{\Delta v}{\Delta v_{\text{norm}}} = \frac{1}{2} \left(1 \pm v \left[1 - \frac{1}{3v} \right] \right) = \begin{cases} +\frac{v}{2} + \frac{1}{3} \\ -\frac{v}{2} + \frac{2}{3} \end{cases},$$

also entweder

$$\Delta v = \frac{1}{2} \Delta v_0 + \frac{1}{3} \Delta v_{\text{norm}}, \quad (17)$$

d. h. $\frac{1}{3}$ normale Aufspaltung gegen D_2 , oder

$$\Delta v = -\frac{1}{2} \Delta v_0 + \frac{2}{3} \Delta v_{\text{norm}}, \quad (18)$$

d. h. $\frac{2}{3}$ normale Aufspaltung gegen D_1 . Beides stimmt mit dem erfahrungsmäßigen Zerlegungsbilde bei schwachen Feldern — vgl. den Kopf von Fig. 1 — überein.

Gleichung (15) ergibt, und zwar bei beliebigem v :

$$\Delta v = \frac{1}{2} \Delta v_0 + \Delta v_{\text{norm}}, \quad (19)$$

d. h. normale Aufspaltung gegenüber D_2 . Die ergänzende Intensitätsbetrachtung wird zeigen, daß diese Komponente bei beliebigen Feldern verschwindende Intensität hat.

§ 3. Die Frequenzgleichung der σ -Komponenten. Die Ausrechnung der Determinante (6) ergibt wegen $\varepsilon^3 = \varepsilon^6 = 1$:

$$(\Omega_1 + 1)(\Omega_2 + 1)^2 - (\Omega_1 + 1) - 2(\Omega_2 + 1) + 2 = \Omega_2(\Omega_1 \Omega_2 + 2\Omega_1 + \Omega_2) = 0.$$

Setzen wir aus (11a) ein, so kommt

$$\Omega_2 [\Omega_2^2 + 3(1 - v)\Omega_2 - 6v] = 0. \quad (20)$$

Man hat also jetzt die folgenden drei Wurzeln:

$$\Omega_2 = 0, \quad (21)$$

$$\Omega_2 = \frac{3}{2} \left(v - 1 \mp \sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2} \right). \quad (22)$$

(16) folgt nämlich bei negativem Zeichen der Quadratwurzel und gehöriger Entwicklung derselben

$$\Delta v = \frac{1}{2} \Delta v_{\text{norm}} \left(\frac{1}{3}v + \dots \right) = \frac{1}{6} \Delta v_0.$$

Bildet man nun den „Schwerpunkt“ von D_1 und D_2 so, daß D_2 mit dem Gewicht 2, D_1 mit dem Gewicht 1 gerechnet wird, so liegt der Schwerpunkt um $\frac{2}{3}$ von D_1 , also um $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \Delta v_0 = \frac{1}{6} \Delta v_0$ von der Mitte M entfernt.

Wegen der Bedeutung von Ω_2 in (11) folgt daraus:

$$\frac{\Delta v}{\Delta v_{\text{norm}}} = 1 + \frac{v}{2}, \quad (23)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta v_{\text{norm}}} = \frac{1}{2} \left(3 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2} \right). \quad (24)$$

(24) ergibt für $v = 0$ (starke Felder) bei der Wahl des oberen Vorzeichens doppelt-normale Aufspaltung; die Intensitätsbetrachtung wird indessen zeigen, daß diese Komponente verschwindende Intensität hat. Bei der Wahl des unteren Vorzeichens gibt (24) ebenso wie (23) einfach-normale Aufspaltung¹⁾, d. h. den Paschen-Back-Effekt der σ -Komponente.

Andererseits erhält man für $v = \infty$ (schwache Felder) aus (24):

$$\frac{\Delta v}{\Delta v_{\text{norm}}} = \frac{1}{2} \left[3 + v \left(1 + \frac{1}{3v} \right) \right] = \begin{cases} \frac{v}{2} + \frac{5}{3}, \\ -\frac{v}{2} + \frac{4}{3}, \end{cases}$$

also entweder

$$\Delta v = \frac{1}{2} \Delta v_0 + \frac{5}{3} \Delta v_{\text{norm}}, \quad (25)$$

d. h. $\frac{5}{3}$ normale Aufspaltung gegen D_2 , oder

$$\Delta v = -\frac{1}{2} \Delta v_0 + \frac{4}{3} \Delta v_{\text{norm}}, \quad (26)$$

¹⁾ Man beachte indessen folgenden interessanten Punkt: (23) gibt normale Aufspaltung gegenüber D_2 , nämlich

$$\Delta v = \frac{1}{2} \Delta v_0 + \Delta v_{\text{norm}}.$$

Dagegen gibt (24) bei Entwicklung der Quadratwurzel und negativer Vorzeichenwahl

$$\Delta v = -\frac{1}{6} \Delta v_0 + \Delta v_{\text{norm}}.$$

Man hat also nach der Voigtschen Theorie zwei etwas verschiedene Komponenten normaler Aufspaltung; ihr Abstand beträgt $\frac{2}{3}$ des ursprünglichen D -Linienabstandes Δv_0 . Die Beobachtungen von Paschen und Back wurden ursprünglich so gedeutet, daß es nur eine scharfe σ -Komponente gebe. Voigt selbst war, wie ich weiß, geneigt, in diesem Widerspruch einen Mangel seiner Theorie zu sehen. Kürzlich erkannte ich jedoch in einer Aufnahme der zu den D -Linien analogen Li-Linie $\lambda = 6708$, die mir Herr Back freundlichst zur Verfügung stellte, eine Trennung einer der beiden σ -Komponenten von dem nach der Voigtschen Theorie zu erwartenden Betrage. Es ist also sehr wohl möglich, daß die Voigtsche Theorie auch in diesem Punkte recht hat. Die Frage wird von Herrn Paschen weiter untersucht werden. In Fig. 1 konnte die Duplizität der σ -Komponenten nicht dargestellt werden, da ja bei starken Feldern Δv_0 gegen Δv_{norm} verschwindet.

d. h. $\frac{4}{3}$ normale Aufspaltung gegen D_1 . Beides ist in Übereinstimmung mit der Erfahrung, wie sie am Kopfe der Fig. 1 angedeutet ist, desgleichen die aus (23), und zwar für alle Felder folgende normale Aufspaltung gegen D_2 .

§ 4. Intensitätsfragen. In der Voigtschen Absorptionstheorie waren die Intensitäten zugleich mit den Frequenzen bestimmt; von unserem Emissionsstandpunkt aus wird eine Hilfsbetrachtung¹⁾ nötig. Man muß die zu vergleichenden Schwingungskomponenten auf gleiche Anregungsenergie reduzieren. Dies geschieht durch Hinzufügen des Nenners²⁾ in der folgenden Formel; der Zähler stellt das Amplitudenquadrat dar, wie es sich aus den Schwingungen der drei Elektronen zusammensetzt:

$$J = \frac{|\xi_1 + \xi_2 + \xi_3|^2}{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2} = \frac{|C_1 + C_2 + C_3|^2}{|C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2}. \quad (27)$$

Die im Ansatz (3) vorkommenden Partialamplituden C_k berechnet man als Unterdeterminanten des Schemas (5) bzw. (6) für die π - bzw. σ -Komponenten. Wir wählen z. B. die Unterdeterminanten der ersten Zeile und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \pi\text{-Komp. } C_1 : C_2 : C_3 &= (\Omega_2 - 1)^2 - 1 : \Omega_2 : \Omega_2 = \Omega_2 - 2 : 1 : 1. \quad (28) \\ \sigma\text{-Komp. } C_1 : C_2 : C_3 &= (\Omega_2 + 1)^2 - 1 : -\varepsilon^2 \Omega_2 : -\varepsilon \Omega_2 \\ &= \Omega_2 + 2 : -\varepsilon^2 : -\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Setzt man (28) in (27) ein, so ergibt sich

$$J = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - 4\Omega_2 + 6}. \quad (30)$$

Daraus folgt zunächst für die Wurzel $\Omega_2 = 0$, Gleichung (13), die Intensität 0, wie in § 2 behauptet wurde. Die Wurzeln (14) genügen nach (12) der Gleichung:

$$\Omega_2^2 = 3(1 + v)\Omega_2 - 6v. \quad (31)$$

Hiermit läßt sich (30) im Zähler und Nenner auf die lineare Form bringen:

$$J = 3 \frac{(1 + v)\Omega_2 - 2v}{(-1 + 3v)\Omega_2 + 6(1 - v)}.$$

¹⁾ Näheres vgl. Göttinger Nachr. I. c., § 5.

²⁾ Bei quasielastischer Bindung ist die Gesamtenergie das Doppelte der potentiellen Energie und letztere in jeder Koordinate proportional $\omega_k^2 |\xi_k|^2$. In der Summe über alle drei Elektronen kann man die ω_k^2 ohne merklichen Fehler als gleich ansehen und in den Proportionalitätsfaktor aufnehmen, so daß für die Gesamtenergie der Anregung $\sum |\xi_k|^2$ geschrieben werden darf.

Berechnet man daraus umgekehrt

$$\Omega_2 = 2 \frac{(v-1)J-v}{\left(v-\frac{1}{3}\right)J-1-v}$$

und setzt dies in (31) ein, so entsteht die quadratische Gleichung für J :

$$J^2 - 3J + \frac{2v^2}{1-\frac{2}{3}v+v^2} = 0$$

mit den Wurzeln:

$$J = \frac{3}{2} \left(1 \mp \frac{1-\frac{1}{3}v}{\sqrt{1-\frac{2}{3}v+v^2}} \right). \quad (32)$$

Hier entspricht das obere (untere) Vorzeichen dem oberen (unteren) Vorzeichen von Gleichung (16).

Bei starken Feldern ($v = 0$) ergibt sich daraus für das obere Vorzeichen [normale Aufspaltung, vgl. Gleichung (16)] $J = 0$, wie in § 2 behauptet wurde, für das untere Vorzeichen [Aufspaltung Null, vgl. Gleichung (16)] $J = 3 =$ Gesamtintensität von D_1 und D_2 . Bei schwachen Feldern ($v = \infty$) ergibt sich $J = 2$ (oberes Vorzeichen, D_2) bzw. $J = 1$ (unteres Vorzeichen, D_1).

Setzt man sodann, zu den σ -Komponenten übergehend, (29) in (27) ein und berücksichtigt, daß $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ ist, so folgt zunächst

$$J = \frac{(\Omega_2 + 3)^2}{\Omega_2^2 + 4\Omega_2 + 6}. \quad (33)$$

Für $\Omega_2 = 0$ (Gleichung 21), normale Aufspaltung gegen D_2 , folgt daraus für alle Felder

$$J = \frac{3}{2}.$$

Die beiden anderen Wurzeln, Gleichung (22), genügen nach (20) der Gleichung:

$$\Omega_2^2 = 3(v-1)\Omega_2 + 6v. \quad (34)$$

Mit ihrer Hilfe reduziert man (33) auf die Form

$$J = 3 \frac{(v+1)\Omega_2 + 2v + 3}{(3v+1)\Omega_2 + 6(v+1)}.$$

Daraus folgt umgekehrt

$$\Omega_2 = \frac{-2(v+1)J + 2v + 3}{\left(v + \frac{1}{3}\right)J - v - 1}.$$

Setzt man dies in (34) ein, so entsteht die quadratische Gleichung für J :

$$J^2 - \frac{3}{2}J + \frac{v^2}{2\left(1 + \frac{2}{3}v + v^2\right)} = 0.$$

Ihre Wurzeln sind:

$$J = \frac{3}{4} \left(1 \mp \frac{1 + \frac{1}{3}v}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2}} \right). \quad (35)$$

Für $v = 0$ (starke Felder) ergibt sich daraus beim oberen Vorzeichen [doppelt-normale Aufspaltung, vgl. Gleichung (24)] $J = 0$, wie in § 3 behauptet, beim unteren Vorzeichen [einfach-normale Aufspaltung, vgl. Gleichung (24)] $J = 3/2$. Für $v = \infty$ (schwache Felder) hat man $J = 1/2$ (oberes Vorzeichen, D_2) bzw. $J = 1$ (unteres Vorzeichen, D_1).

§ 5. Zusammenstellung der positiven und negativen Komponenten des Zerlegungsbildes. Wir haben bisher nur von den positiven π - und σ -Komponenten gesprochen. Die negativen ergeben sich nach § 1, wenn man mit dem Ansatz (3a) statt (3) in die Voigtschen Gleichungen (1) und (2) eingeht. Dies hat zur Folge, daß in der Definition von Ω_k , Gleichung (4), $\omega^2 - \omega_k^2$ an Stelle von $\omega_k^2 - \omega^2$ tritt, und weiterhin, daß sich nicht nur das Vorzeichen von Δv , sondern auch das Vorzeichen von v durchweg umkehrt, sowohl in den Frequenz- wie in den Intensitätsformeln. Endlich wird auch die Zuordnung der beiden Vorzeichen der Quadratwurzel in (16) (π -Komponenten) und (24) (σ -Komponenten) zu D_1 und D_2 die umgekehrte für negative wie für positive Komponenten. In der für die negativen π -Komponenten umgeschriebenen Gleichung (16)

$$\frac{\Delta v}{\Delta v_{\text{norm}}} = -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2} \right)$$

z. B. entspricht nunmehr, wie man sich leicht überzeugt, indem man $v = \infty$ setzt, das obere Vorzeichen der Linie D_1 , das untere der Linie D_2 , also umgekehrt wie für die positiven Komponenten.

Die Vorzeichenumkehr von v bewirkt, daß die Zerlegungsbilder bei mittleren Feldern unsymmetrisch ausfallen, d. h. daß die positiven und negativen Komponenten nicht spiegelbildlich zueinander liegen und im allgemeinen nicht gleiche Intensität haben. Das ist nicht überraschend: Sind doch, vgl. Fig. 1, bei schwachen Feldern

die Zerlegungsbilder von D_1 und D_2 symmetrisch gegen die ursprüngliche Lage dieser Linien, während bei starken Feldern das totale Zerlegungsbild symmetrisch gegen den Schwerpunkt von D_1 und D_2 wird; bei mittleren Feldern kann daher Symmetrie weder im einen noch im anderen Sinne herrschen. Unsere Figur veranschaulicht dies aufs deutlichste.

π -Komponenten.

$$\begin{array}{l}
 D_2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2} \right) \end{array} \right. \\
 \\
 D_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2} \right) \end{array} \right.
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{3}v}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2}} \right) \\ \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1 + \frac{1}{3}v}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2}} \right) \\ \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1 - \frac{1}{3}v}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}v + v^2}} \right) \\ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{3}v}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2}} \right) \end{array} \right.
 \left| \begin{array}{l} -1 \rightarrow -1 \\ +1 \rightarrow +1 \\ -1 \rightarrow -1 \\ +1 \rightarrow +1 \end{array} \right.$$

σ -Komponenten.

$$\begin{array}{l}
 D_2 \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{v}{2} \\ \frac{1}{2} \left(3 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(3 - \sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2} \right) \\ -1 + \frac{v}{2} \end{array} \right. \\
 \\
 D_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(3 - \sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(3 + \sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2} \right) \end{array} \right.
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} \frac{3}{2} \dots \dots \dots \\ \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{3}v}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2}} \right) \\ \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1 - \frac{1}{3}v}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2}} \right) \\ \frac{3}{2} \dots \dots \dots \\ \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1 + \frac{1}{3}v}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2}} \right) \\ \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{3}v}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2}} \right) \end{array} \right.
 \left| \begin{array}{l} +3 \rightarrow +1 \\ +1 \rightarrow -1 \\ -1 \rightarrow +1 \\ -3 \rightarrow -1 \\ +1 \rightarrow -1 \\ -1 \rightarrow +1 \end{array} \right.$$

Wir geben im Vorstehenden eine vollständige Zusammenstellung der positiven und negativen Komponenten nach Lage und Intensität; die π -Komponente normaler Aufspaltung [Gleichung (15)], welche dauernd die Intensität Null hat [Gleichung (30)], wird dabei fortgelassen. Die Ausdrücke der ersten Spalte geben die magnetischen Aufspaltungen $\Delta\nu$ in Teilen von $\Delta\nu_{\text{norm}}$, von der Mitte M zwischen D_1 und D_2 aus gerechnet; die Ausdrücke der zweiten Spalte geben die zugehörigen Intensitäten. Die Bedeutung der dritten Spalte wird aus dem folgenden Paragraphen hervorgehen.

§ 6. Die quantentheoretischen Energieniveaus der magnetischen Aufspaltung. Die Grundlage der Quantentheorie der Spektren bildet das Kombinationsprinzip (Bohrs Frequenzbedingung); seine Anwendung auf den Zeemaneffekt führte zu der Forderung¹⁾, daß die Aufspaltung der Linien in jedem Falle sich darstellen lassen müsse als Differenz der magnetischen Aufspaltungen der beiden Terme, aus denen sich nach dem Kombinationsprinzip die Linien zusammensetzen. Während uns die Voigtsche Schwingungstheorie die Aufspaltung der Linien liefert, müssen wir in der Quantentheorie nach der Aufspaltung der Terme fragen. Mit der Aufspaltung der Terme ist die Aufspaltung der zugehörigen Energieniveaus negativ proportional, da nach allgemeiner Übereinkunft gilt $W = -h\nu$, $\Delta W = -h\Delta\nu$, unter W die Energie, unter ν die Termgröße verstanden. In der folgenden Tabelle werden wir die magnetischen Aufspaltungen der Energieniveaus hinschreiben, wobei wir aber den gemeinsamen Faktor $h \cdot \Delta\nu_{\text{norm}}$ unterdrücken.

Die Serieldarstellung der D -Linien lautet:

$$\begin{aligned} D_2 \dots \nu &= 1s - 2p_1, \\ D_1 \dots \nu &= 1s - 2p_2. \end{aligned}$$

Da nämlich die Bezeichnung der Terme mp_i so gewählt wird, daß $mp_1 < mp_2$, und da D_2 kurzwelliger als D_1 ist, so gehört zu D_2 der Term $2p_1$, zu D_1 der Term $2p_2$. Der Term ms ist bekanntlich stets einfach. Seine Aufspaltung ist wie die aller Einfachterme als normal anzusetzen. In der folgenden Tabelle schreiben wir daher als Energieaufspaltung des s -Terms $+1$ und -1 auf. Die im Eingang der Tabelle aufgeführte Größe m nennen wir „magnetische Quantenzahl“; wir legen ihr bei den Dublettsystemen ungerade Werte bei, positive und negative. Als Auswahlregel, nach der die

¹⁾ Vgl. T. van Lohuizen, Amst. Ak., Mai 1919 oder meine Abhandlung, Ann. d. Phys. 63, 1920, Teil V.

m -Werte kombinieren, setzen wir in Anlehnung an die Theorie des normalen Zeemaneffektes fest:

$$m \rightarrow m \dots \pi\text{-Komponenten,}$$

$$m \rightarrow m \pm 2 \dots \sigma\text{-Komponenten.}$$

Die Energieaufspaltungen des p_1 -Termes in der zweiten Spalte der Tabelle sind nun so zu wählen, daß sie, mit denen des s -Termes nach der vorstehenden Regel kombiniert, die Aufspaltung der D_2 -Linie ergeben; ebenso die Energie-Aufspaltungen des p_2 -Termes in der dritten Spalte so, daß sie die Aufspaltung der D_1 -Linie liefern.

	s	p_1	p_2
$m = +3$	—	$2 + \frac{v}{2}$	—
+1	+1	$\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2} \right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2}{3}v + v^2} \right)$
-1	-1	$\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2} \right)$	$\frac{1}{2} \left(-1 - \sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2} \right)$
-3	—	$-2 + \frac{v}{2}$	—

Dies wird durch die vorstehende Tabelle in der Tat erreicht.

In der Zusammenstellung des vorigen Paragraphen, dritte Spalte, haben wir für jede Komponente des Zerlegungsbildes den sie erzeugenden Übergang der magnetischen Quantenzahl angemerkt, z. B. in der ersten Zeile der π -Komponenten $-1 \rightarrow -1$. Dies bedeutet die Vorschrift, daß wir vom p_1 -Niveau $m = -1$ zum s -Niveau $m = -1$ übergehen sollen. Bilden wir dementsprechend nach den Angaben unserer Tabelle

$$\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2} \right) - (-1) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3}v + v^2} \right),$$

so entsteht in der Tat die zugehörige, in der ersten Zeile der Zusammenstellung angegebene Linienaufspaltung. In derselben Weise überzeugt man sich, daß unsere Tabelle, nach den im vorigen Paragraphen angemerkten Vorschriften kombiniert, die sämtlichen Linienaufspaltungen vollständig und richtig wiedergibt.

Wie man sieht, ist, abgesehen von den äußersten Niveaus $\pm 2 + \frac{v}{2}$, jedes Energieniveau doppelt bestimmt, da es sowohl die π - wie die σ -Komponenten liefern muß. Unsere Tabelle enthält also keine Willkür, sondern wird in sich selbst kontrolliert. Daß wir die Auf-

spaltungen von p_1 bis $m = \pm 3$ ausdehnen, diejenigen von p_2 und s aber auf $m = \pm 1$ beschränken, entspricht dem Umstande¹⁾, daß die „innere Quantenzahl“ n_i für s und p_2 gleich 1, für p_1 aber gleich 2 ist und daß die Anzahl der magnetischen Niveaus allgemein gleich $2n_i$ wird. Daß wir die vorstehenden Kombinationen nach dem Schema $(p) - (s)$ bildeten, während das Schema der Serieldarstellung lautet $(s) - (p)$, hängt damit zusammen, daß unsere Tabelle die Energieaufspaltungen, nicht die Term- aufspaltungen angibt.

Schließlich läßt sich unsere ganze Tabelle der $p_1 p_2$ -Aufspaltungen in die eine Formel zusammenfassen:

$$\frac{1}{2} \left(m \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3} m v + v^2} \right) \quad (36)$$

p_1 oberes Vorzeichen $m = \pm 1, \pm 3,$

p_2 unteres Vorzeichen $m = \pm 1,$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\Delta W = -\frac{h}{2} \left(m \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3} m v + v^2} \right) \Delta v_{\text{norm.}} \quad (37)$$

$$W = \overline{W} + \frac{h}{2} \left(m \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3} m v + v^2} \right) \Delta v_{\text{norm.}} \quad (38)$$

\overline{W} ist das arithmetische Mittel der ursprünglichen Energieniveaus von p_1 und p_2 , W bedeutet das System der magnetisch beeinflussten p_1 - und p_2 -Niveaus. Auch das oberste und unterste Niveau von p_1 ist in dieser zusammenfassenden Darstellung enthalten. Setzt man nämlich in (36) $m = 3$, so läßt sich die Quadratwurzel ausziehen und man erhält

$$\frac{1}{2} [\pm 3 + (v \pm 1)] = \pm 2 + \frac{v}{2}, \quad (39)$$

wie es nach unserer Tabelle sein soll.

Man erkennt hieraus, wieviel einfacher und einheitlicher die schließliche quantentheoretische Beschreibung des magneto-optischen Tatbestandes ausfällt, als die ursprüngliche schwingungsmäßige. Eine einzige geschlossene Formel vertritt jetzt die Differentialgleichungen und ihre Integration und liefert gleicherweise die π - wie die σ -Komponenten.

Aber nicht nur die Frequenzen, sondern auch die Intensitäten lassen sich einheitlich zusammenfassen. Bedeutet m die magnetische Quantenzahl des Ausgangsniveaus (p_1 oder p_2), so lassen sich

¹⁾ Vgl. meine soeben zitierte Arbeit, Ann. d. Phys. 63, Teil II.

die im vorigen Paragraphen zusammengestellten Intensitäten der π - bzw. σ -Komponenten allgemein darstellen durch

$$J_{\pi} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m \left(1 + \frac{1}{3} m v \right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{3} m v + v^2}} \right), \quad J_{\sigma} = \frac{3}{4} \left(1 \mp \frac{m \left(1 + \frac{1}{3} m v \right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{3} m v + v^2}} \right) \quad (40)$$

das obere Vorzeichen für p_1 und das untere für p_2 gültig. Das Zeichen $| |$ des absoluten Betrages war in J_{σ} hinzuzufügen, damit auch das p_1 -Niveau $m = 3$ in die Formel mit aufgenommen wird. Für $m = 3$ wird nämlich

$$\frac{1 + \frac{1}{3} m v}{\sqrt{1 + \frac{2}{3} m v + v^2}} = 1, \quad J_{\sigma} = \frac{3}{4} | 1 - 3 | = \frac{3}{2},$$

ähnlich für $m = -3$ [bei gleicher Vorzeichenbestimmung der Quadratwurzel wie in (39)].

Aus (40) folgt (man beachte das umgekehrte doppelte Vorzeichen in J_{π} und J_{σ}) für jeden durch ein bestimmtes m charakterisierten Übergang aus dem p_1 - oder p_2 -Zustand in den s -Zustand:

$$J_{\pi} + 2 J_{\sigma} = 3, \quad (41)$$

gültig insbesondere auch für $m = \pm 3$, wo $J_{\sigma} = 3/2$, $J_{\pi} = 0$ ist. Zur quantentheoretischen Deutung dieser Beziehung bemerken wir folgendes: 1. Die σ -Komponenten sind zirkular polarisiert, die π -Komponenten linear. Bei transversaler Beobachtung, auf die sich unsere Intensitäts-Schemata beziehen, wird jede ausgestrahlte π -Intensität ganz, jede σ -Intensität nur zur Hälfte wahrgenommen. Um die ganze ausgestrahlte Intensität zu bekommen, muß man daher wie in (41) $J_{\pi} + 2 J_{\sigma}$ bilden. 2. J_{π} faßt quantentheoretisch die Wahrscheinlichkeit dafür zusammen, daß zunächst ein gewisser p -Zustand als Anfangszustand erzeugt wird und daß dieser unter π -Ausstrahlung in einen s -Zustand übergeht. 3. Ebenso bedeutet $2 J_{\sigma}$ die Wahrscheinlichkeit, daß zunächst derselbe Anfangszustand angeregt wird und daß darauf σ -Ausstrahlung erfolgt. 4. Handelt es sich wie bei den D -Linien um den Anfangszustand $2p_i$, so ist nur der Übergang in den s -Zustand, insbesondere kein Übergang in den d -Zustand energetisch möglich. Der s -Zustand ist als Endzustand dem angeregten p -Zustand eindeutig zugeordnet, wie z. B. die Tabelle in § 5 zeigt. 5. Die Wahrscheinlichkeit, daß aus dem angeregten p -Zustande der Übergang in den s -Zustand, sei es unter π - oder unter σ -Ausstrahlung,

erfolgt, ist gleich 1. 6. Fassen wir also den π - und den σ -Übergang zusammen, so erhalten wir in $J_\pi + 2J_\sigma$ ein reines Maß für die Wahrscheinlichkeit des Anfangs- p -Zustandes. Diese Wahrscheinlichkeit ist für alle p -Zustände nach (41) die gleiche, also unabhängig von m und von der Stärke des magnetischen Feldes, nämlich entsprechend der Zählung der ursprünglichen Intensität von D_1 und D_2 gleich 3. Wir können also, nachdem wir in solcher Weise die Übergangswahrscheinlichkeit eliminiert haben, von einer reinen Termwahrscheinlichkeit sprechen. Es ist sehr befriedigend, daß diese für jeden magnetisch aufgespaltenen Term gleich groß ausfällt. Die Übergangswahrscheinlichkeit dagegen ist, wie (40) zeigt, verschieden und überdies vom Felde abhängig; bald überwiegt die Neigung zu einem π -, bald zu einem σ -Übergange.

§ 7. Verallgemeinerung. Wie früher¹⁾ gezeigt wurde, ist der „Rungesche Nenner“ der Dublettsysteme gleich 1, 3, 5, 7 für den s -, p -, d -, b -... Term, also allgemein gleich $2n - 1$ für den Term mit der azimutalen Quantenzahl n . Das Auftreten des Nenners 3 in der Energieniveau-Formel (38) hat offenbar seinen Grund in diesem Gesetz der Rungeschen Nenner; die Formel erweitert sich daher für die höheren Terme folgendermaßen:

$$W = \bar{W} + \frac{h}{2} \left(m \pm \sqrt{1 + \frac{2m}{2n-1} v + v^2} \right) \Delta v_{\text{norm.}} \quad (42)$$

Natürlich ist dabei die Größe $v = \Delta v_0 / \Delta v_{\text{norm}}$ für die höheren Terme mit der Schwingungsdifferenz Δv_0 dieser Terme, nicht wie bisher mit der der p -Terme zu bilden. Für den d -Term $2n - 1 = 5$ stimmt (42) bei schwachen Feldern genau überein mit den von Landé²⁾ aus den Backschen Aufnahmen der I. N. S. abgeleiteten Energieniveaus und läßt sich an diesen Aufnahmen in allen Einzelheiten bestätigen. Unsere Fig. 2 zeigt in der oberen Zeile die Verhältnisse bei schwachen Feldern, d. h. die anomalen Zeemaneffekte der drei Linien ($p; d_j$), in der unteren Zeile die Verhältnisse bei starken Feldern, d. h. das normale Triplet des Paschen-Back-Effektes, und stellt zugleich in den mittleren Partien die Umwandlung des einen in den anderen Typus schematisch dar.

Wenn im Verlaufe der Umwandlung das Magnetfeld zwar als stark gegenüber dem wenig getrennten d -Term, aber noch nicht als stark gegenüber dem p -Term zu gelten hat, so entsteht statt des „totalen“, in der unteren Zeile unserer Figur dargestellten Paschen-

¹⁾ In der zitierten Arbeit Ann. d. Phys. 63, Teil V.

²⁾ ZS. f. Phys. 5, 231, 1921.

Back-Effektes ein „partieller“ Paschen-Back-Effekt, wie er z. B. in der I. N. S. von Na beobachtet wird. Näheres hierüber und über die Erweiterung der Formel (42) auf Triplettsysteme findet man in meinem Buche¹⁾ „Atombau und Spektrallinien“.

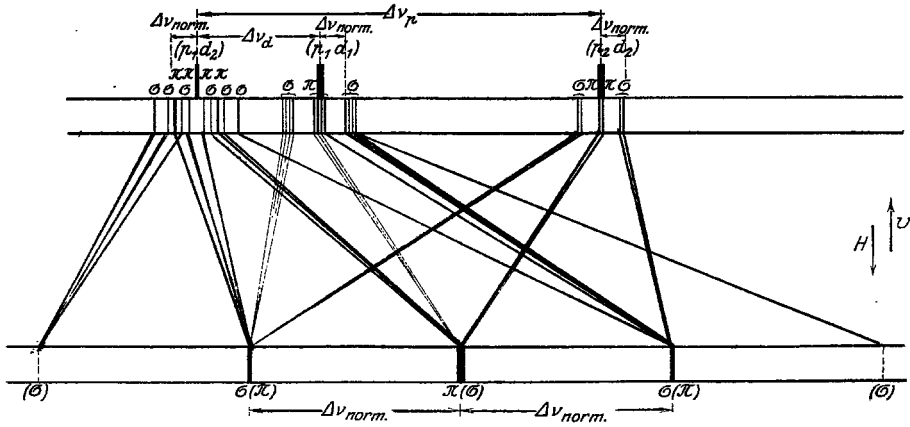


Fig. 2.

Ich möchte nicht versäumen, Herrn stud. W. Heisenberg für seine erfolgreiche Mitarbeit an dem ganzen Problem der anomalen Zeemaneffekte herzlich zu danken.

¹⁾ Dritte Auflage (Braunschweig 1922), Kap. 6, § 7.