

8. *Weiteres zum Ausbau
der Koppelungstheorie der Zeemaneffekte;
von W. Voigt.*

1. Der Nachweis einer gegenseitigen Einwirkung der Konstituenten von Seriaduplets und -triplets im Magnetfelde¹⁾ gibt der Ausarbeitung der Lorentz'schen Koppelungshypothese neue Anregung. Ich will im nachstehenden zunächst einiges Allgemeine erörtern, das hierher gehört, und mich dann näher mit dem gegenwärtig am meisten interessierenden speziellen Falle beschäftigen, mit den Duplets von dem Typ der *D*-Linien, deren eine Konstituente für sich im Magnetfelde ein Quadruplet, deren andere ein Sextuplet liefert.

In einer früheren Notiz²⁾ habe ich gezeigt, daß aus den von mir zur Ableitung der komplexen Zeemaneffekte *einzelner* Linien benutzten Grundformeln sich in den einfachsten Fällen von Koppelungen *verschiedener* Linien unter Umständen Erscheinungen ergeben, die mit den Beobachtungen an den Wasserstofflinien durchaus übereinstimmen. Ich habe nach diesem Ergebnis die Überzeugung ausgesprochen, daß dieselben Grundlagen auch zur Darstellung der Erscheinungen an den *D*-Duplets (wie ich den bez. Typ weiterhin kurz bezeichnen werde) ausreichen würden; aber ich habe wegen der Komplikation des Problems und wegen der voraussichtlichen Willkürlichkeiten, welche bei ihm die große Zahl der wirksamen Freiheitsgrade bedingen möchte, die Behandlung des Problemes nicht versucht. Indessen habe ich mich doch dem Eindruck nicht verschließen können, daß (wie mir auch Hr. Paschen brieflich aussprach) die *H*-Duplets für eine *entscheidende* Prüfung der Theorie aus dem Grunde weniger günstig sind, weil die

1) F. Paschen u. E. Back, Ann. d. Phys. 39. p. 897. 1912. Vgl. auch G. Wendt, ebenda 40. p. 607. 1913.

2) W. Voigt, Ann. d. Phys. 40. p. 368. 1913.

Zeemaneffekte der einzelnen Linien nicht zweifellos feststehen. Ich habe mich demgemäß neuestens der Behandlung der *D-Duplets*, bei denen dieser Mangel nicht vorliegt, und bei denen zugleich die Art der Einwirkung stärkster Felder auf den Zeemaneffekt zweifellos aufgeklärt ist, zugewendet, und die genaue Untersuchung hat hier überraschenderweise bei allen Komplikationen der Rechnung prinzipiell doch einfache Verhältnisse und eine völlige Wiedergabe der bisherigen Beobachtungen durch die Theorie ergeben, so daß das Resultat als eine Stütze der Koppelungshypothese bezeichnet werden darf.

Seit meiner ersten Notiz hat Hr. Sommerfeld¹⁾ versucht, von einer ganz anderen Vorstellung ausgehend das Eintreten eines normalen Triplets bei Serientriplets und -triplets in starken Feldern zu erklären. Ich glaube nicht, daß der Versuch bisher als geglückt bezeichnet werden kann; das Sommerfeldsche Modell (das ich schon früher erwähnt und kürzlich zu anderen Zwecken auch behandelt habe)²⁾ gibt näm-

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 40. p. 748. 1913.

2) Ich möchte hier eine historische Bemerkung einschalten. Den Gedanken, daß man quasielastische Kräfte von den in der modernen Optik erforderlichen Gesetzmäßigkeiten auf elektrischem Gebiete dadurch gewinnen kann, daß man die negativen Elektronen innerhalb der *räumlich ausgedehnten* positiven Ladungen beweglich denkt, trage ich seit 12 Jahren in meinen Vorlesungen vor. Für manche Zwecke genügt die einfachste Vorstellung homogener positiver Kugeln (die seit deren Benutzung durch J. J. Thomson als sein Atommodell geht), für manche die von Kugeln, die *in Schichten* homogen sind (W. Voigt, Ann. d. Phys. 6. p. 459. 1901). Verhältnisse, die denen der Serientriplets und -duplets nahe zu kommen scheinen (drei bzw. zwei Eigenfrequenzen), entstehen durch Heranziehung von Ellipsoiden (W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, Leipzig 1908. p. 69). Die letztere Vorstellung ist mit dem Sommerfeldschen Modell identisch. Ihre systematische Anwendung in der Magnetooptik ist von mir in einer kürzlich erschienenen Arbeit (W. Voigt, Gött. Nachr. 1912 p. 861) vorgenommen worden. Dabei ist das Analogon des von Hrn. Sommerfeld durchgeführten *Emissionsproblems* auf dem Gebiete der *Absorption* erledigt. Die Formeln reichen sogar noch weiter, insofern die Frage der Intensitätsverteilung in den Absorptionslinien und der Orientierung der Moleküle im Magnetfeld systematisch beantwortet ist. Einzig ist die *Diskussion* nicht durchgeführt, insofern dieselbe entsprechend dem speziellen Ziel der Untersuchung auf *schwache* Felder beschränkt ist. (Ihre Fortsetzung erscheint demnächst.) Die Resultate führen mich a. a. O. zu dem Schluß, daß das Modell das magnetische Verhalten der Serientriplets und -duplets nicht darzustellen vermag.

lich für die einzelnen Konstituenten der Duplets und Triplets nicht die beobachteten magnetischen Zerlegungen.¹⁾ Dasselbe führt nur drei Freiheitsgrade und nur normale (Lorentzsche) Feldwirkungen ein: da ist es nicht zu verwundern, daß schließlich normale Triplets resultieren. Bei den *D*-Duplets handelt es sich aber, wie unten erörtert wird, um 12 Freiheitsgrade und anormale Feldwirkungen; unter solchen Umständen in starken Feldern normale Triplets zu erklären, ist eine beträchtlich schwierigere Frage.

Der Nachweis, daß *alle* Serienduplets und -triplets jene normalen Zeemantriplets liefern, ist übrigens noch nicht erbracht; die bisherigen Wahrnehmungen an dem *O*-Triplet²⁾ ($\lambda = 3947 \text{ \AA-E.}$) scheinen mir z. B. ein solches Verhalten nicht zu erweisen. Während hier die *p*-Komponenten sich zu einer merklich scharfen Linie zusammenziehen, überdecken die *s*-Komponenten auch bei den stärksten bisher zugänglichen Feldern auf jeder Seite derselben noch einen größeren Raum, als das anfängliche Triplet.³⁾

Es wird sich übrigens bei den nachstehenden theoretischen Erörterungen zeigen, wie auch die Theorie es keineswegs wahrscheinlich macht, daß *jedes* System gekoppelter Linien in starken Feldern zu einem normalen Triplet wird.

2. Ich beginne mit der Rekapitulation der Form, die ich den Lorentzischen Formeln gegeben habe.⁴⁾ Die *Z*-Achse liege parallel den Kraftlinien des Feldes, *X* und *Y* seien die Komponenten der in der Lichtwelle schwingenden elektrischen Feldstärke, x_h und y_h die Komponenten der Elongation eines schwingenden Elektrons (h). Dann lassen sich die ersten beiden Systeme der Bewegungsgleichungen für die Elektronen schreiben:

1) Auf den Widerspruch seiner Resultate hinsichtlich der Linienbreite der in stärksten Feldern entstehenden Triplets mit der Erfahrung macht Hr. Sommerfeld selbst aufmerksam.

2) F. Paschen u. E. Back, l. c. p. 913 und Tafel VII.

3) Während der Korrektur erhalte ich von Hrn. Paschen die Nachricht, daß er bei weiter gesteigerten Feldern eine Zusammenziehung der *s*-Komponenten im Sinne der Triplets beobachtet hat.

4) W. Voigt, Ann. d. Phys. 24. p. 193. 1907. Zur rationellen Begründung s. Ann. d. Phys. 36. p. 897. 1911.

Bezeichnet N die Anzahl der gekoppelten Systeme in der Volumeneinheit, und setzt man

$$(9) \quad 4\pi N e \sum \zeta_h = \Pi_{\pm} Z,$$

so bestimmt sich der komplexe Brechungsindex n_{\pm} für die beiden parallel Z fortschreitenden und \pm -zirkular polarisierten Wellen durch

$$(10) \quad n_{\pm}^2 - 1 = \Pi_{\pm}.$$

Für die normal zum Feld fortgepflanzte und schwingende s -Welle gilt in genügender Annäherung

$$(11) \quad n_s^2 - 1 = \frac{1}{2}(\Pi_+ + \Pi_-).$$

Fehlt das Magnetfeld, so werden die Gleichungen (7) zu

$$(12) \quad \begin{cases} p_j^0 \zeta_j = e Z, & j = 1, 2, \dots, \text{ wobei} \\ p_j^0 = k_j + i v f_j - m v^2. \end{cases}$$

Eine jede Formel (12) signalisiert das Auftreten einer Absorptionslinie bei der Frequenz

$$(13) \quad v_j = \sqrt{k_j/m};$$

sind mehrere (α) dieser v_j einander gleich, so fallen die entsprechenden Absorptionslinien zusammen, so daß sie sich für die Beobachtung einheitlich darstellen. Wir nennen eine solche Linie, deren Natur sich im Zeemaneffekt enthüllt, dann eine α -fache. Die Formeln (10) und (11) stellen die Veränderungen der Absorptionslinien durch die Wirkung des Magnetfeldes dar (den inversen Zeemaneffekt), dem analoge Änderungen der Emissionslinien (direkter Zeemaneffekt) entsprechen.

3. Für die normal zum Feld fortgepflanzte und parallel zum Feld schwingende p -Welle lauten die Bewegungsgleichungen nach meinem Ansatz

$$(14) \quad \begin{cases} m z_1'' + k_1 z_1 + f_{11} z_1' + f_{12} z_2' + \dots = e Z, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Dabei sind $f_{jj} = f_j$ wieder die reellen Dämpfungskonstanten, die

$$(15) \quad f_{jk} = -f_{kj}$$

mit dem Felde proportionale Koppelungsfunktionen, die aber nicht den früheren f_{jk} gleichartig sind.

Von besonderem Interesse ist für uns der Fall, daß das System eine gerade Zahl von gekoppelten Elektronen enthält,

Diese Formel stimmt vollständig mit (11) überein und hierauf beruht die Möglichkeit, die s - und die p -Wellen weitgehend zusammen zu diskutieren.

4. Die Funktionen Π_{\pm} sind Quotienten, die im Nenner die Determinante der Gleichungen (7) enthalten, im Zähler die Summe aller ihrer ersten Partialdeterminanten. Sind α Freiheitsgrade ζ_j gekoppelt, so ist der Nenner eine Funktion α^{ten} , der Zähler eine $(\alpha - 1)^{\text{ten}}$ Grades in den p_j .

Sind sämtliche p_j einander gleich ($= p$), so resultiert der früher allein von mir betrachtete Fall des Zeemaneffektes einer einzelnen (α -fachen) Spektrallinie. Für diesen habe ich seinerzeit bewiesen, daß trotz der komplexen Natur der h_{jk} die Parameter von Zähler und Nenner sämtlich reell sind, und daß der Nenner nur reelle Wurzeln p besitzt. Man kann daher jedes der Π in Partialbrüche zerlegen nach dem Schema

$$(20) \quad \Pi = \frac{Q_1}{p + R_1\nu} + \frac{Q_2}{p + R_2\nu} + \dots + \frac{Q_n}{p + R_n\nu},$$

wobei nun jedes Glied die Existenz eines Absorptionsstreifens (einer Zeemankomponente) ausdrückt. Der Ort derselben bestimmt sich durch die Frequenz, für welche der reelle Teil des Nenners in dem bzw. Glied verschwindet; ihre Stärke wird durch den Zähler gemessen; die Halbwertsbreiten sind für alle gleich.

Es ergeben sich hiernach (wegen $\Pi_+ + \Pi_-$) in der s - und in der p -Welle zweimal α Zeemankomponenten, von denen im allgemeinen die durch Π_+ und die durch Π_- gelieferten auf verschiedenen Seiten der feldlosen Linie liegen.¹⁾ Ich werde im Anschluß an dieses Resultat auch im allgemeinen Falle verschiedener gekoppelter Spektrallinien die Absorptionslinien, die durch Π_+ und die durch Π_- für sich bestimmt werden, als die Zeemankomponenten *der einen oder der anderen Seite* bezeichnen.

5. Was nun die Anregungen angeht, welche die Beobachtungen der Herren Paschen und Back für die Ausgestaltung der Koppelungstheorie geben, so geht die erste von der bloßen

1) Im allgemeinsten Falle — der übrigens für uns, wie unten zu zeigen, hier nicht in Frage kommt — kann α für die s - und für die p -Welle verschieden sein.

Konstatierung einer Koppelung zwischen den Linien von Serien-
duplets und -triplets aus und führt zu einer Festlegung des Ver-
hältnisses der Freiheitsgrade für die gekoppelten Linien.

Um ein Beispiel zu geben, sei angeknüpft an den Typ der
 D -Linien, deren Zeemaneffekt bekanntlich durch das nach-
stehende Schema wiedergegeben wird. Hierin bezeichnet o die



Fig. 1.

Lage der feldlosen Linien, $\overline{on} = a$ die normale Aufspaltung,
und den beiden D -Linien kommen die Komponenten zu:

$$D_1: \pm \frac{2}{3} a(p) \pm \frac{4}{3} a(s),$$

$$D_2: \pm \frac{1}{3} a(p) \pm \frac{2}{3} a(s) \pm \frac{5}{3} a(s).$$

Aus dem Verhalten der s -Komponenten erweist sich in der
 D_2 -Linie die doppelte Anzahl von Freiheitsgraden wirksam,
wie in der D_1 -Linie; da aber die beiden Linien gekoppelt sind —
etwa ein jedes Na-Molekül nebeneinander einen Entsender für D_1 -
und D_2 -Schwingungen enthält —, so muß nach der einfachsten
Annahme die Gesamtanzahl der Freiheitsgrade in der Volumen-
einheit, auf denen die D_2 -Linie beruht, doppelt so groß sein,
wie diejenige von D_1 . Hiermit stimmt überein, daß die D_2 -Linie
intensiver ist, als die D_1 -Linie, und Hr. Roschdestwensky¹⁾
hat sogar das Verhältnis der insgesamt wirksamen Freiheits-
grade für D_2 zu D_1 durch Beobachtungen über die Dispersions-
verhältnisse des Na-Dampfes mit ziemlicher Genauigkeit zu
zwei bestimmt.

Wenn nun dies Verhältnis in dem Zeemaneffekt der p -Kom-
ponente anscheinend keinen Ausdruck findet, so hat man dies
dahin zu deuten, daß hier der eine der beiden Freiheitsgrade

1) D. Roschdestwensky, Ann. d. Phys. 39. p. 307. 1910. Hr.
Sommerfeld macht mich brieflich darauf aufmerksam, daß das Zahlen-
verhältnis 1:2 sich besonders einfach auch aus dem Ellipsoidmodell er-
gibt: beim Übergang von dem Dreiachsen- zum Rotationstyp.

der D_2 -Linie nicht direkt wirksam wird, *entweder*, weil beide die gleiche Zerlegung geben, d. h. *sich nicht trennen, oder aber*, weil die eine theoretisch vorhandene p -Komponente *verschwindende Stärke* hat. Es sei daran erinnert, daß die Theorie auf diese Möglichkeit von Komponenten verschwindender Stärke ganz direkt hinweist, und daß ich, daran anknüpfend, schon früher die Deutung anormaler Duplets als Quadruplets als möglich bezeichnet habe.¹⁾

Ähnlich wie vorstehend für die D -Duplets auseinandergesetzt ist, wird man ganz allgemein als Folge einer konstatierten Koppelung zwischen den Konstituenten von Serientriplets und -duplets die Proportionalität zwischen den Zahlen der s - und der p -Freiheitsgrade für die Konstituenten fordern, derart, daß wenn die bezüglichen Zahlen mit S_1, S_2, S_3 und P_1, P_2, P_3 bezeichnet werden, die Beziehung

$$S_1 : S_2 : S_3 = P_1 : P_2 : P_3$$

gilt. Steht die Anzahl der wahrnehmbaren Zeemankomponenten hiermit im Widerspruch, so wird man, wie oben, entweder zu der Annahme *mehrfacher*, oder aber zu derjenigen *verschwindender* Komponenten greifen müssen. Natürlich bleibt dabei bezüglich der Anzahl der heranzuziehenden verborgenen Komponenten eine gewisse Freiheit.

Aber es wird sich empfehlen, jederzeit zunächst die möglichst *einfache* Deutung zu verfolgen. Ist dabei eine Bestimmung des Verhältnisses der Freiheitsgrade auf anderem Wege (wie bei den D -Linien z. B.) gewonnen, so vermag dieses ein wichtiges Hilfsmittel bei der Deutung zu bieten.

Im übrigen können wir den „unwirksamen“ Freiheitsgrad der p -Schwingung von D_2 zunächst noch nicht näher bestimmen; das Mittel hierzu wird erst im nachstehenden gewonnen werden.

6. Eine weitere Direktive für den Ausbau der Koppelungshypothese liefert die aus den Paschen-Backschen Beobachtungen folgende Regel, daß *bei starken Feldern das System der*

1) Vgl. dazu W. Voigt, Ann. d. Phys. 24. p. 212—213. 1907. Diese verschwindenden Komponenten einer Zerlegung sind natürlich ganz anders aufzufassen als die, deren Ritz sich bedient. Hier ist die verschwindende Intensität aus den speziellen, anderweit wirksamen Parameterwerten der Koppelung abgeleitet; dort bleibt sie unerklärt.

Zeemankomponenten sich merklich symmetrisch in bezug auf den geometrischen Mittelpunkt des Serienduplets bzw. -triplets gestaltet.

Unsere Ausdrücke für $n^2 - 1$ in (11) und (19) enthalten die Funktionen

$$p_j = h_j + i\nu h_j - m\nu^2, \quad h_j = f_j \mp g_j,$$

wobei sich die Indizes auf die verschiedenen gekoppelten Elektronen oder Freiheitsgrade beziehen. Setzen wir nun

$$(21) \quad p_j = p + \pi_j, \quad \text{wobei} \quad p = \frac{1}{\alpha} \sum p_j$$

ist, unter α wieder die Anzahl aller komplexen Freiheitsgrade ζ_j verstanden, so hat π_j die Form

$$(22) \quad \pi_j = h_j - h + i\nu(h_j - h), \quad \text{wobei} \quad h = \frac{1}{\alpha} \sum h_j, \quad h = \frac{1}{\alpha} \sum h_j.$$

Diese π_j treten in den Formeln (11) und (19), wie später noch an speziellen Beispielen erläutert werden soll, neben den Koppelungsfunktionen h_{jk} auf, die dem Felde proportional sind. Soll nun mit wachsendem Felde die ursprüngliche Konfiguration und eventuelle Dissymmetrie des Serienduplets oder -triplets aus den Formeln verschwinden, so müssen die π_j klein werden neben den h_{jk} . Nun enthält aber im allgemeinen π_j in

$$(23) \quad h_j - h = (f_j - f) \mp i(g_j - g)$$

ein gleichfalls mit der Feldstärke proportionales Glied $g_j - g$. Damit also die beobachtete Erscheinung eintreten könne, muß für alle gekoppelten Freiheitsgrade g_j dasselbe sein.

Ist dies erfüllt, so werden bei starken Feldern die Formeln für $n^2 - 1$ dieselben, als wenn von vornherein alle p_j mit p vertauscht wären. Es resultiert also dann derselbe Zeemaneffekt, als wenn es sich um die Zerlegung einer einzigen *mehrfachen* Spektrallinie (nicht eines Serienduplets oder -triplets) handelte. In diesem Falle ist aber früher von mir ganz allgemein bewiesen worden, daß die Zerlegung ein zu der Frequenz $\nu_0 = \sqrt{k/m}$ symmetrisches System ergibt. Ein solches tritt also bei starken Feldern auch für ein System *gekoppelter* Linien ein, wenn nur für alle Freiheitsgrade die Funktionen g_j denselben Wert besitzen.

7. Der Parameter $g_{jj} = g_j$ stellt bei den s - (bzw. den \pm)-Wellen die direkte Wirkung des Feldes auf das ungekoppelte

Elektron (j) dar; es bewirkt eine Koppelung nur der x - und der y -Koordinate desselben Elektrons (j), während die g_{jk} Koppelungen zwischen den Koordinaten *verschiedener* Elektronen darstellen. Bei der p -Welle hat $g_{jj} = g_j$ eine analoge Bedeutung; es bewirkt die Koppelung zwischen den Koordinaten z_j und β_j eines Paares von *gleichartigen* Elektronen, während die g_{jk} sich auf *verschiedene* Paare beziehen. Nach dieser Eigenschaft der g_j für beide Wellen kann man dieselben, um kurz zu sprechen, vielleicht als *innere* Koppelungsfunktionen bezeichnen im Gegensatz zu den *äußeren* g_{jk} , f_{jk} , h_{jk} .

Für uns kommt nun eine Eigenschaft der g_j wesentlich in Betracht, die ich früher bei mehrfachen Linien nachgewiesen habe.¹⁾ Der bez. Beweis bezieht sich ursprünglich auf die s -Welle, er überträgt sich aber bei der vollständigen Übereinstimmung der hier zugrunde gelegten Formeln unmittelbar auch auf die p -Welle.

Ein sehr häufiger Fall bei komplexen Zeemaneffekten einzelner Linien ist der, daß die auf jeder Seite der feldlosen (mehrfachen) Linie erscheinenden Komponenten für sich (geometrisch) ein zentrisch symmetrisches System bilden. *In diesen Fällen bestimmt sich der Abstand des Symmetriezentrums (oder der Mitte) jener Systeme von der feldlosen Linie jederzeit durch die innere Koppelungsfunktion g_j .* (Es gilt nämlich für den in Frequenzen ausgedrückten Abstand μ die Beziehung $2m\mu = \pm g_j$.)

Die Kombination dieses Satzes mit den Schlüssen des vorigen Abschnittes führt zu der Folgerung: *Handelt es sich um ein Serientriplet oder -duplet von Linien, die für sich Zeemaneffekte liefern mit in sich zentrisch symmetrischen Komponenten Gruppen auf jeder Seite, und gibt das Triplet oder Duplet in seiner Gesamtheit in starken Feldern einen in seiner Gesamtheit zentrisch symmetrischen Zeemaneffekt, so müssen die Mitten jener beiden symmetrischen Einzelsysteme bei allen Konstituenten des Triplets oder Duplets denselben gegenseitigen Abstand besitzen.*

Betrachten wir in Rücksicht hierauf die D -Duplets (p. 410), so erfüllen sie in der Tat bez. der s -Schwingungen diese Anforderung: die Mitten der beiden s -Komponenten von D_2 haben denselben Abstand, wie die beiden Einzellinien von D_1 .

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 24. p. 207. 1907.

Nicht ist zunächst diese Anforderung bez. der p -Schwingungen erfüllt; die p -Komponenten von D_2 haben $1/3$, die von D_1 aber $2/3$ des normalen Abstandes. Da wir nun aber erkannt haben, daß dem D_2 noch ein weiteres Paar Freiheitsgrade beizulegen ist, so liefert unser neues Resultat deren Bestimmung: *Diese Freiheitsgrade müssen zwei p -Komponenten verschwindender Stärke mit normaler Aufspaltung entsprechen.*

Es entsteht sonach für die Zerlegung der Konstituenten der D -Duplets das nebenstehende Schema, das wir nun der weiteren Entwicklung zugrunde legen. Die Linie D_1 erscheint



Fig. 2.

als Quadruplet, die Linie D_2 als Oktett, in dem die äußeren p -Komponenten verschwindender Stärke mit den inneren s -Komponenten zusammenfallen.

8. Ziehen wir schließlich die Paschen-Backsche Beobachtung heran, daß bei starken Feldern unter Umständen die \pm - bzw. die s -Komponenten — gleichviel wie viele Freiheitsgrade durch den Zeemaneffekt schwacher Felder angezeigt werden — ein bloßes Duplet liefern, und daß bei den p -Komponenten dies Duplet sich sogar zu einer einzigen Linie bei der mittleren Frequenz ν_0 zusammenzieht, so drückt dies aus, daß unter den genannten Umständen der Nenner der Ausdrücke für Π_{\pm} in (11) und (19) den Zähler als Faktor enthält. Jeder dieser Quotienten muß sich daher auf die einfache Form

$$\frac{1}{p \pm \nu q}$$

reduzieren, in der q eine reelle Größe ist, welche eine Verschiebung der Absorptionstreifen aus der durch $1/p$ gegebenen Lage ausdrückt. Das doppelte Vorzeichen muß hierhin auftreten, weil nach p. 412 das Liniensystem, welches bei einander

gleichen p_j entsteht, jederzeit zu der Frequenz $\nu_0 = \sqrt{k/m}$ symmetrisch ist.

Da q reell ist, so haben die bei starken Feldern auftretenden Linien diejenige Halbwertsbreite, die durch das in p enthaltene

$$f = \frac{1}{\alpha} \sum f_j$$

gegeben ist, d. h. das Mittel der Halbwertsbreiten aller gekoppelten Linien.

Was bei mittleren Feldern geschieht, ob da vorübergehend eine Verbreiterung der Einzellinien auftritt, ist hiermit noch nicht präjudiziert. Die systematische Untersuchung der Wirkung mittlerer Felder nach der Theorie, die sehr umständlich zu sein scheint, liegt außerhalb der Ziele dieser Arbeit. Doch möchte ich bereits hier dem Vorurteil begegnen, als ob die bisherigen Beobachtungen eine solche Verbreiterung sicher stellten.

Allerdings erwähnt Hr. Back (l. c. p. 930), daß das Triplet, welches das D -Duplet ($\lambda = 2852 \text{ \AA. - E.}$) liefert, diffuse Außenkomponenten gezeigt habe. Dergleichen deuten aber zunächst noch nicht auf eine Verbreiterung der einzelnen Zeemankomponenten, denn die Außenkomponenten des Triplets entstehen durch das Zusammenfließen von den je drei s -Komponenten des Systems $D_1 + D_2$; es muß dabei also ein Zustand passiert werden, bei dem diese drei Linien ein breiteres Bereich zusammenhängend decken, als die einzelne Linie für sich, auch wenn jede Linie ihre Breite behält.

Nicht anders verhält es sich mit dem „diffusen Wisch“, den die Herren Paschen und Back bei den O -Triplets $\lambda = 3947 \text{ \AA. - E.}$ beobachtet haben. Hier handelt es sich sogar um sechs s -Komponenten auf jeder Seite. Überdies ist nach p. 405 wohl noch nicht sichergestellt, ob der Zeemaneffekt dieses Systems bei stärksten Feldern überhaupt zu einem Triplet wird.

Ferner ist zu bemerken, daß Verbreiterungen von Linien, wenn solche gegenüber den feldlosen Linien beobachtet werden sollten, sekundäre Natur haben, nämlich auf den ganz verschiedenen Entladungsbedingungen beruhen können, welche das Geisslerrohr im Felde und außerhalb desselben darbietet.

Ein Einwand gegen das vorstehende Resultat scheint mir somit bisher nicht vorzuliegen.

Dafür, daß nun wirklich die Zähler der Ausdrücke Π_{\pm} je einen Faktor der Nenner bilden, müssen bestimmte Bedingungen zwischen den Koppelungsfunktionen f_{jk} und g_{jk} — oder da diese sämtlich mit der Feldstärke proportional sind — zwischen deren Koeffizienten erfüllt sein. Daß diese Bedingungen nicht allgemein, sondern nur für bestimmte Systeme gelten, leuchtet unmittelbar ein; das Gegenteil würde verlangen, daß jede mehrfache Spektrallinie für sich allein in ein Triplet zerlegt würde; in der Tat werden ja die Formeln (11) und (19) für $p_j = p$ zu denen der Zerlegung einer einzelnen mehrfachen Spektrallinie durch das Magnetfeld. Bei mehreren Freiheitsgraden kommen aber bekanntlich im allgemeinen kompliziertere Zerlegungen zustande.

Eine *generelle* Untersuchung der Bedingungen dafür, daß mehr als drei Freiheitsgrade bei verschiedenen Eigenfrequenzen doch nur ein Triplet liefern, hat wohl noch keinen Zweck. Eine hierher gehörige allgemeine Überlegung findet sich aber in § 17.

9. Wir wollen uns nunmehr von den allgemeinen Betrachtungen zu speziellen wenden und dabei, wie angekündigt, besonders den Typ der D -Duplets behandeln. Nach dem oben Entwickelten wirken bei der s -Zerlegung immer drei Elektronen zusammen, bei der p -Zerlegung immer sechs, nämlich drei Paar untereinander gleichartiger. Wir wollen aber der Kürze wegen immer nur von *drei zusammenwirkenden komplexen Freiheitsgraden* sprechen. Von diesen drei haben im Fall eines D -Duplets wieder diejenigen zwei gleiche Eigenfrequenzen, auf denen die D_2 -Linie beruht, der dritte hat eine abweichende Frequenz. Da es aber bei der Entwicklung der Gleichungen keinen Vorteil bietet, zwei Eigenfrequenzen als einander gleich anzunehmen, vielmehr die Darstellung an Symmetrie und somit an Kürze gewinnt, wenn man *alle drei Frequenzen als verschieden* behandelt, so soll zunächst dieser allgemeinere Fall betrachtet werden. Derselbe entspricht also einem Serientriplet aus drei Linien, die je für sich im Magnetfeld in Quadruplets von (im Frequenzspektrum) gleicher Aufspaltung zerlegt werden. Nimmt man zwei Frequenzen einander gleich, so fließen zwei der Linien zusammen zu einer einzigen, die im Felde ein Oktett, oder bei bestimmter Art der Koppelung der p -Komponenten auch ein Sextuplet liefert.

Die Grundformeln für drei gekoppelte Freiheitsgrade lauten nach dem Früheren für die *s*- und die *p*-Schwingungen übereinstimmend

$$(24) \quad \begin{cases} p_1 \zeta_1 + i v h_{12} \zeta_2 + i v h_{13} \zeta_3 = e Z, \\ i v h_{21} \zeta_1 + p_2 \zeta_2 + i v h_{23} \zeta_3 = e Z, \\ i v h_{31} \zeta_1 + i v h_{32} \zeta_2 + p_3 \zeta_3 = e Z. \end{cases}$$

Dabei sind für die *s*-Wellen die $\zeta_j = x_j \pm i y_j$, $Z = X \pm i Y$, für die *p*-Wellen $\zeta_j = z_j \pm i \delta_j$, $Z = (1 \pm i) Z$; ferner gilt für beide

$$(25) \quad \begin{cases} p_j = h_j + i v h_j - m v^2, & h_j = f_j \mp i g_j, \\ h_{jk} = f_{jk} \mp i g_{jk}, & f_{jk} = -f_{kj}, \quad g_{jk} = +g_{kj}. \end{cases}$$

Alle g_j, f_{jk}, g_{jk} sind mit der Feldstärke proportional, die g_j sind (wegen § 6) untereinander gleich und wir setzen

$$(26) \quad g_1 = g_2 = g_3 = g.$$

Wegen der doppelten Vorzeichen stellt (24) wieder ein doppeltes Gleichungssystem dar.

Für den komplexen Brechungsindex in beiden Wellen ergibt sich, wenn wir Glieder, die aus einem hingeschriebenen durch zyklische Vertauschung der Indizes entstehen, durch Punkte bezeichnen,

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} n^2 - 1 = 2 \pi N e^2 \\ \sum \frac{p_2 p_3 + \dots - i v [p_1 (h_{23} + h_{32}) + \dots] + v^2 [h_{23} h_{32} + \dots - (h_{13} h_{31} + h_{31} h_{13}) - \dots]}{p_1 p_2 p_3 + v^2 [p_1 h_{23} h_{32} + \dots] - i v^3 [h_{23} h_{31} h_{12} + h_{32} h_{13} h_{21}]} \end{array} \right.$$

Die Summe Σ deutet an, daß die beiden Glieder mit dem \pm Vorzeichen in den h_{jk} zu nehmen sind. Jedes Glied gibt nach § 4 die Zeemankomponenten der einen Seite (\pm).

Wir setzen nunmehr wieder

$$(28) \quad \begin{cases} p_j = p + \pi_j, & p = k + i v h - m v^2 \\ h = \frac{1}{3} (k_1 + k_2 + k_3), & h = \frac{1}{3} (h_1 + h_2 + h_3), \end{cases}$$

woraus dann folgt

$$(29) \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0.$$

Dann erhält man

$$(30) \quad n^2 - 1 = 2 \pi N e^2 \sum \frac{3 p^2 + v p a - v^2 b}{p^3 - v^2 p c + v^3 d},$$

wobei

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} a = -i[(h_{23} + h_{32}) + \dots], \\ b = -[h_{23} h_{32} + \dots] + [h_{13} h_{21} + h_{31} h_{12}] + \dots \\ \quad + \frac{i}{\nu} [\pi_1 (h_{23} + h_{32}) + \dots] - \frac{1}{\nu^2} [\pi_2 \pi_3 + \dots], \\ c = -[h_{23} h_{32} + \dots] - \frac{1}{\nu^2} [\pi_2 \pi_3 + \dots], \\ d = -i[h_{23} h_{31} h_{12} + h_{32} h_{13} h_{21}] + \frac{1}{\nu} [\pi_1 h_{23} h_{32} + \dots] \\ \quad + \frac{1}{\nu^3} \pi_1 \pi_2 \pi_3. \end{array} \right.$$

Die π_j sind vom Felde unabhängig, also ist bei kleinen Werten derselben, insbesondere bei enger Lagerung der drei feldlosen Linien der Fall möglich, daß durch Steigerung der Feldstärke und somit durch Anwachsen der h_{jk} schließlich die in die π_j multiplizierten Glieder neben den anderen unmerklich werden. Die von den π_j befreiten Werte a, b, c, d mögen mit a_0, b_0, c_0, d_0 bezeichnet werden; dieselben sind nach dem p. 409 Bemerkten stets reelle Größen.

Bei so starken Feldern gruppieren sich dann die durch (30) dargestellten Absorptionslinien symmetrisch zu der Mittelfrequenz

$$\nu_0 = \sqrt{k/m}.$$

10. Damit die durch das einzelne Glied der Summe Σ (bei Vernachlässigung der π_j) dargestellten Streifen sich in einen einzigen zusammenziehen, muß der Nenner den Zähler als Faktor haben. Die Bedingungen hierfür sind

$$(32) \quad a_0^2 = 9 c_0^2 - 3 b_0^2, \quad 9 d_0 = a_0 b_0,$$

und die Formel (30) wird bei ihrer Erfüllung zu

$$(33) \quad n^2 - 1 = 6 \pi N e^2 \sum \frac{1}{p - \frac{1}{3} \nu a_0}.$$

Die Werte a_0, \dots stellen sich bei Einsetzen der Ausdrücke (25) für die h_{jk} folgendermaßen dar:

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \mp 2 [g_{23} + \dots], \\ b_0 = [(f_{23}^2 + g_{23}^2) + \dots] + 2 [(f_{31} f_{12} - g_{31} g_{12}) + \dots], \\ c_0 = [(f_{23}^2 + g_{23}^2) + \dots], \\ d_0 = \mp 2 [g_{23} f_{31} f_{12} + \dots - g_{23} g_{31} g_{12}]. \end{array} \right.$$

a_0 ist, wie oben bemerkt, reell, dabei im allgemeinen von Null verschieden. Sein Auftreten in der Formel (30) modifiziert also nur die *Lage* der dadurch ausgedrückten Absorptionsstreifen gegenüber der durch

$$n_0^2 - 1 = 6 \pi N e^2 \sum \frac{1}{p}$$

gegebenen, ändert aber nicht deren Halbwertsbreite und Stärke.

Somit ergibt sich in Übereinstimmung mit dem oben allgemein Erörterten das Resultat: *Fließen bei starken Feldern die Komponenten des Zeemaneffektes für das betrachtete Serientriplet zusammen, so ist die resultierende Zerlegung eine andere, als diejenige, welche die einzelnen Konstituenten für sich liefern. Die Halbwertsbreite ist die mittlere von derjenigen der Konstituenten, ihre Stärke die Summe von jenen.*

Zu dem letzteren sei bemerkt, daß mit N oben die Anzahl von *Elektronensystemen* zu drei in der Volumeneinheit bezeichnet ist. Würden die Koppelungen zwischen ihnen gelöst sein, so würden also $3N = \mathfrak{N}$ einzelne Elektronen in der Volumeneinheit vorhanden sein.

Zu dem ersteren ist zu sagen, daß das bezügliche Resultat einigermäßen überraschend ist, und daß man wohl erwartet hätte, als Resultante des Zusammenfließens von drei Systemen mit gleicher Aufspaltung ein resultierendes System von *ebensolcher* Aufspaltung zu erhalten. Das Resultat stimmt aber vollständig mit den Beobachtungen an den Linien vom D -Typ überein. Diese Linien entsprechen einzeln in der s - und in der p -Welle theoretisch drei Duplets mit Aufspaltungen von $\frac{4}{3}$ und $\frac{2}{3}$ der normalen, und sie liefern in starken Feldern ein einziges System mit der Aufspaltung normal und Null. Es wird nun die weitere Aufgabe sein, zu zeigen, wie gerade *diese* resultierenden Aufspaltungen zustande kommen.

11. Hierzu sind zunächst die Bedingungen (32) zu entwickeln. Dieselben haben recht komplizierte und allgemein schwer zu übersehende Form. Indessen erkennt man leicht *eine partikuläre Lösung* derselben, die sich durch Symmetrie und Einfachheit derartig auszeichnet, daß man zunächst versuchen wird, mit ihr auszukommen.

Diese Lösung ist

$$h_{23} = h_{31} = h_{12} = h', \quad h_{32} = h_{13} = h_{21} = h'',$$

wobei h' und h'' neue Bezeichnungen sind; sie drückt aus, daß die äußeren Koppelungen der drei komplexen Freiheitsgrade einander zyklisch gleich sind.

Schreibt man nun

$$(36) \quad h' = f' \mp i g', \quad h'' = -f' \mp i g',$$

so wird

$$a_0 = \mp 6 g',$$

und Gleichung (33) lautet

$$(37) \quad n^2 - 1 = 6 \pi N e^2 \sum \frac{1}{k - m \nu^2 \pm \nu(g + 2g') + i \nu f'}.$$

Führt man die mittlere Frequenz $\nu_0 = \sqrt{k/m}$ ein und auch den in Frequenzen gemessenen Abstand μ von ihr, indem man setzt

$$\nu = \nu_0 + \mu,$$

bei gegen ν_0 kleinem μ , so wird aus (37)

$$(38) \quad n^2 - 1 = 6 \pi \frac{N e^2}{\nu_0} \sum \frac{1}{-2 m \mu \pm (g + 2g') + i f'}.$$

Die Orte der durch diese Formel bestimmten Absorptionslinien sind nach p. 409 durch das Verschwinden der reellen Teile der Nenner bestimmt.

Die Frage nach der Lage der Einzelkomponenten, in die sich die ursprünglichen drei jeder Seite zusammenziehen, ist somit auf die Frage der Bestimmung der Werte der Parameter von g und g' zurückgeführt — oder genauer, da die g durch die Zerlegung der einzelnen, nicht gekoppelten Linie bereits festgelegt sind, *allein auf die Bestimmung der Parameter der zyklischen Koppelung der drei Freiheitsgrade in g'* . Diese Aufgabe läßt sich im Falle der D -Duplets mit Hilfe der bekannten Intensitätsverhältnisse bei den Zeemaneffekten der zweifachen Linie D_2 lösen, wie wir unten zeigen werden. Es ist sehr bemerkenswert, daß Parameter, die bei einzelnen (mehrfachen) Linien wesentlich die *Intensitätsverhältnisse* zwischen den Zeemankomponenten bestimmen, in Systemen gekoppelter verschiedener Linien eine große Rolle bei der Bestimmung der *geometrischen* Verhältnisse des Zeemaneffektes spielen.

12. Bis hierher haben wir den allgemeinen Fall eines Serientriplets betrachtet, dessen Konstituenten sowohl in der s -, als in der p -Welle Duplets liefern. Nun wollen wir die Spezialisierung einführen, die durch Systeme vom Charakter der D -Linien verlangt wird, also zwei der Konstituenten ursprünglich zusammenfallen lassen und ihre Koppelung so wählen, daß der Erfahrung entsprochen wird. Diese Konstituenten mögen (2) und (3) sein, was ausgedrückt wird durch die Festsetzung $p_2 = p_3$. Es soll also das System

$$(39) \quad \begin{cases} p_2 \zeta_2 + i \nu h_{23} \zeta_3 = e Z, \\ i \nu h_{32} \zeta_2 + p_2 \zeta_3 = e Z \end{cases}$$

sowohl für die s -, als für die p -Welle ein Quadruplet von der bei D_2 beobachteten Aufspaltung und Intensitätsverteilung liefern.

Man erhält zunächst

$$(40) \quad n^2 - 1 = 2 \pi N e^2 \sum \frac{2 p_2 - i \nu (h_{23} + h_{32})}{p_2^2 + \nu^2 h_{23} h_{32}},$$

oder da

$$h_{23} = f_{23} \mp i g_{23}, \quad h_{32} = -f_{23} \mp i g_{23}$$

auch

$$(41) \quad n^2 - 1 = 4 \pi N e^2 \sum \frac{p_2 \mp \nu g_{23}}{p_2^2 - \nu^2 r^2}, \quad r^2 = f_{23}^2 + g_{23}^2.$$

Dies schreiben wir

$$(42) \quad n^2 - 1 = 2 \pi N e^2 \sum \left(\frac{1 \mp g_{23}/r}{p_2 - \nu r} + \frac{1 \pm g_{23}/r}{p_2 + \nu r} \right)$$

oder bei

$$\nu = \nu_2 + \mu$$

und gegen ν_2 kleinem μ auch¹⁾

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} n^2 - 1 &= \frac{2 \pi N e^2}{\nu_2} \sum \left(\frac{1 \mp g_{23}/r}{-2 m \mu + i f_2 \pm g_2 - r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \pm g_{23}/r}{-2 m \mu + i f_2 \pm g_2 + r} \right). \end{aligned} \right.$$

1) Bei Verwendung der zur obigen analogen Formel in meiner letzten Notiz (Ann. d. Phys. 40. p. 368. 1913) ist auf p. 373 das Vorzeichen von g_2 und f_2 (dort g und f) verkehrt geschrieben, woraus p. 374 $g_{12} = -r\beta$ statt $g_{12} = +r\beta$ geschlossen ist. Das Versehen ist ohne Folgen.

Es liegen hiernach die Streifen

$$(44) \left\{ \begin{array}{l} \text{bei } 2m\mu = -(g_2 + r) \text{ mit der Stärke } 1 + g_{23}/r, \\ \quad = -(g_2 - r) \text{ „ „ „ } 1 - g_{23}/r, \\ \quad = +(g_2 - r) \text{ „ „ „ } 1 - g_{23}/r, \\ \quad = +(g_2 + r) \text{ „ „ „ } 1 + g_{23}/r. \end{array} \right.$$

Für die p -Welle reichen nun die Beobachtungen zu der sicheren Bestimmung aller Parameter aus. Nach dem p. 414 Entwickelten ist die bzw. Aufspaltung eine solche mit Abständen $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{3}$ normal, wobei je die äußere Komponente verschwindende Stärke hat. Bezeichnet man den der normalen Aufspaltung entsprechenden (Lorentzschen) Wert von g mit g_n , so folgt für die p -Welle

$$(45) \quad g_2 = \frac{2}{3} g_n, \quad f_{23} = 0, \quad g_{23} = -r = -\frac{1}{3} g_n.$$

Diese Bestimmung ist als *vollkommen sicher* zu betrachten; an Stelle einer immerhin unsicheren Messung der Stärke der Außenkomponenten tritt hier nämlich die viel schärfere Bestimmung derselben zu *Null*.

Bei der s -Welle liegen die Verhältnisse nicht ganz so günstig. Hier sind zwar die Abstände $\frac{3}{3}$ und $\frac{5}{3}$ normal völlig zuverlässig bekannt, aber bezüglich des Verhältnisses der Stärken der Innen- und der Außenkomponenten liegt eine ähnlich scharfe Angabe, wie oben, nicht vor. Man weiß seit langem, daß die Außenkomponenten *geringere* Stärke haben, als die inneren, und man kann nach den von mir gegebenen Formeln aus Messungen der linearen und der zirkularen Doppelbrechung auf das bzw. Verhältnis schließen, indessen sind diese Schlüsse nicht besonders zuverlässig. In der Tat ist das Spektralbereich, innerhalb dessen die für derartige Bestimmung maßgebenden Messungen der linearen und der zirkularen Doppelbrechung ausgeführt werden müssen, nur ein *sehr kleiner Bruchteil* des Abstandes der beiden D -Linien. Herr Hansen, der bereits vor längerer Zeit einige nach meiner Methode mit dem hiesigen stigmatischen Gitterspektrographen gemachte photographische Aufnahmen über lineare Doppelbrechung in Na-Dampf publiziert hat¹⁾, widmet sich seitdem

1) W. Voigt u. H. M. Hansen, Phys. Zeitschr. 13. p. 217. 1912.

dem Studium der quantitativen Gesetze dieser beiden Doppelbrechungen und wird die bez. Resultate demnächst gleichfalls veröffentlichen. Er schreibt mir aus Kopenhagen in bezug auf die hier allein interessierende Frage, die ich ihm vorgelegt hatte, folgendes: „Ich habe gefunden für das Verhältnis zwischen den Maximalwerten $n\kappa$ für die beiden s -Komponenten von D_2 den Wert 3,5, etwas höher als man¹⁾ erwarten sollte. Der longitudinale Effekt gab 3,6, der transversale Effekt 3,4; die Genauigkeit ist jedoch wesentlich geringer, als die Übereinstimmung vermuten läßt.“ Ich werde für die weitere Rechnung aus einem bald hervortretenden Grunde den Wert *drei* annehmen, der nach den Worten des Hrn. Hansen mit der Beobachtung vereinbar ist; es läßt sich leicht erkennen, welche Wirkung eine Abweichung hiervon auf die zu ziehenden Folgerungen haben würde.

Der Maximalwert von $n\kappa$ ist nun in unserem Falle, wo die Halbwertsbreiten der Komponenten der Zerlegung einander gleich sind, mit dem Zähler $1 \pm g_{23}/r$ in (43) proportional. Wir erhalten sonach aus den Beobachtungen die folgenden Beziehungen für die s -Schwingungen:

$$(46) \quad \begin{cases} g_2 = \frac{4}{3} g_n, & r = \frac{1}{3} g_n, & \frac{1 + g_{23}/r}{1 - g_{23}/r} = \frac{1}{3}, \\ & \text{d. h. } g_{23} = -\frac{1}{2} r. \end{cases}$$

Die Kombination der beiden letzten Formeln mit der Definition $r^2 = f_{23}^2 + g_{23}^2$ liefert schließlich

$$(47) \quad g_2 = \frac{4}{3} g_n, \quad g_{23} = -\frac{1}{2} r = -\frac{1}{6} g_n, \quad 3 g_{23}^2 = f_{23}^2.$$

13. Diese an der D_2 -Linie unter Umständen, wo die Wirkung ihrer Koppelung an D_1 unmerklich ist, ausgeführten Bestimmungen gestatten nun die Antwort auf die letzte noch bestehende Frage: *wo* nach der Theorie die Einzellinien liegen, auf die sich bei hohen Feldern das System $D_1 + D_2$ zusammenzieht.

Die Parameter g_2 , f_{23} und g_{23} der vorstehenden *speziellen* Betrachtungen sind nichts anderes, als g , f' und g' der früheren *allgemeinen*.

1) Nach dem Aussehen der Linien in den Photogrammen des Zeemaneffektes.

Es war das Resultat von § 11, daß bei hinreichenden Feldstärken die Abstände $\bar{\mu}$ der p - und der s -Komponenten von der Nullage mit der Frequenz $\nu_0 = \sqrt{k/m}$ durch die Formel

$$(48) \quad \bar{\mu} = \pm \frac{g + 2g'}{2m}$$

dargestellt würden, unter g und g' je die Werte verstanden, die je für die p - und die s -Komponenten Gültigkeit haben.

Nun ist nach obigem:

für die p -Komponenten

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_p = \frac{2}{3} g_n, \quad g_p' = -\frac{1}{3} g_n, \\ \text{also } \bar{\mu}_p = 0, \end{array} \right.$$

für die s -Komponenten

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_s = \frac{4}{3} g_n, \quad g_s' = -\frac{1}{3} g_n, \\ \text{also } \bar{\mu}_s = \pm \frac{g_n}{2m}. \end{array} \right.$$

Diese Werte $\bar{\mu}_p$ und $\bar{\mu}_s$ entsprechen aber dem normalen Triplet.¹⁾

Hiermit ist das Auftreten eines normalen Triplets bei den D-Duplets in starken Feldern aus der Koppelungstheorie abgeleitet unter Benutzung numerischer Daten, die sich nur auf das Verhalten der einzelnen D-Linien bei unmerklich wirkender gegenseitiger Koppelung beziehen.

Der allgemeinste Ansatz der Theorie ist dabei, wie rekapituliert werden mag, nach folgenden Gesichtspunkten spezialisiert.

Die Grundhypothese, daß überhaupt Koppelung zwischen D_1 und D_2 besteht, verlangt die Proportionalität der Anzahl

1) Wäre das Stärkeverhältnis der s -Komponenten von D_2 nicht, wie oben angenommen, 1:3, sondern 1:(3 + δ), so würde resultieren

$$\bar{\mu}_s = \pm \frac{g_n}{6m} \left(4 - \frac{4 + 2\delta}{4 + \delta} \right) = \pm \frac{g_n}{3m} \frac{6 + \delta}{4 + \delta}.$$

Der Einfluß einer Abweichung δ von dem angenommenen Wert ist also relativ klein. Die Gesamtheit der Ergebnisse läßt indessen den Wert 1:3 als höchst wahrscheinlich erscheinen.

der Freiheitsgrade der D_1 - und D_2 -Linie für die p - und die s -Schwingungen. Die Gestaltung der bez. Zeemaneffekte und die Beobachtungen über die Wirkungsstärken der Linien D_1 und D_2 außerhalb des Magnetfeldes führt übereinstimmend auf die Annahme von *einem* komplexen Freiheitsgrad für D_1 , von *zwei* für D_2 , denen die doppelten Zahlen reeller Freiheitsgrade entsprechen.

Die Erfahrungstatsache, daß in starken Feldern ein zur *Mittellinie symmetrischer* Zeemaneffekt eintritt, führt mit Strenge zur Forderung *gleicher innerer Koppelungen* für alle drei komplexen Freiheitsgrade; die andere, daß unter denselben Umständen für die p - und für die s -Schwingungen an jeder Seite der Mittellinie *nur eine* Zeemankomponente erscheint, führt (wenngleich nicht mit gleicher Notwendigkeit) dazu, auch die *äußeren Koppelungen* (zyklisch) *gleich* anzunehmen.

Diese Annahmen sind aus ganz allgemeinen, nicht speziell auf die D -Duplets bezüglichen Erwägungen geschlossen, zugleich auch die denkbar einfachsten, und, indem sie die Anzahl der im allgemeinen Ansatz verfügbaren Parameter auf die möglichst kleine Zahl reduzieren, scheinen sie die Darstellung der Beobachtungen bezüglich der bei stärksten Feldern wirklich eintretenden magnetischen Aufspaltungen möglichst zu erschweren. Trotzdem liefern die an den *getrennten* D_1 - und D_2 -Linien beobachteten Aufspaltungen durch ihre geometrischen und Intensitätsdaten glatt das Resultat der Beobachtung: *das normale Triplet*.

Dies scheint mir kein ganz geringer Erfolg der Koppelungshypothese zu sein, und man wird zugeben, daß sie hier geleistet hat, was man von einer Theorie mit starkem phänomenologischen Einschlag billigerweise verlangen darf. Die *Begründung* der speziellen Zahlwerte $g_p = \frac{2}{3} g_n$, $g_p' = -\frac{1}{3} g_n$, $f_p' = 0$, $g_s = \frac{4}{3} g_n$, $g_s' = -\frac{1}{6} g_n$, $3g'^2 = f'^2$, die mit der immer wiederkehrenden Zahl 3 etwas, ich möchte sagen Überzeugendes haben, vermag sie natürlich nicht zu geben; dazu kann wohl nur ein spezielles Modell führen. *Gar einfach* wird ein solches freilich nicht ausfallen, denn dasselbe muß *zwölf* charakteristische Freiheitsgrade zur Verfügung stellen!

Inzwischen mag die Gestalt, welche die Grundformeln der Koppelungstheorie für drei Freiheitsgrade eines Serientriplets

nach dem Bisherigen gewonnen haben, hier fixiert werden. Aus (24) wird

$$(51) \quad \begin{cases} p_1 \zeta_1 + i\nu h' \zeta_2 + i\nu h'' \zeta_3 = eZ, \\ i\nu h'' \zeta_1 + p_2 \zeta_2 + i\nu h' \zeta_3 = eZ, \\ i\nu h' \zeta_1 + i\nu h'' \zeta_2 + p_3 \zeta_3 = eZ, \end{cases}$$

bei

$$(52) \quad \begin{cases} p_j = k_j - m\nu^2 \pm \nu g + i\nu f_j, & j = 1, 2, 3; \\ h' = f' \mp i g', & h'' = -f' \mp i g'. \end{cases}$$

Für die komplexen Brechungsindizes gilt

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} n^2 - 1 = 2\pi N e^2 \\ \sum \frac{p_2 p_3 + \dots - i\nu(h' + h'')(p_1 + \dots) + 3\nu^2 [h' h'' + \dots - h'^2 - h''^2]}{p_1 p_2 p_3 + \nu^2 h' h'' (p_2 + \dots) - i\nu^3 (h'^3 + h''^3)} \end{array} \right.$$

Der Fall der *D*-Duplets entsteht hieraus durch die Annahme

$$p_2 = p_3.$$

14. Einige allgemeine Erwägungen mögen hier noch angeschlossen werden.

Ich habe schon in meiner ersten Arbeit über die Kopplungstheorie der komplexen Zeemanefekte darauf aufmerksam gemacht, daß die Verfolgung der *Absorptionseffekte* viel fruchtbarer ist, als die der *Emissionseffekte*. Einmal setzt erstere die gegenseitige Einwirkung der verschiedenen aussendenden Elemente innerhalb eines ausgedehnten Körpers von vornherein in Rechnung und bietet daher eine größere Annäherung an die Wirklichkeit, sodann gibt sie Aufklärung nicht nur über die geometrischen, sondern auch über die Intensitätsverhältnisse der Zeemanefekte, und endlich umfaßt sie mit dem eigentlichen Zeemanefekte zusammen die ihn begleitenden Erscheinungen der zirkularen und der linearen Doppelbrechung. Mir scheint die vorstehende Untersuchung, bei der die Intensitätsverhältnisse eine so entscheidende Rolle spielen, diese meine Auffassung kräftig zu stützen. Ich glaube, daß ein Weg über die *Emissionsverhältnisse* zur Lösung der hier erledigten Aufgabe kaum geführt hätte.

Hieran sei noch ein anderes geschlossen. Die direkte Veranlassung zu meiner ersten Arbeit über die komplexen Zeemanefekte gab die von Hrn. Runge ausgesprochene Regel

über Beziehungen der bei jenen Effekten auftretenden Aufspaltungen zur *normalen* Aufspaltung, eine Regel, die zum ersten Male eine Gesetzmäßigkeit in der bunten Vielheit der Erscheinungen feststellte. Die Koppelungshypothese vermag keine allgemeinen Beziehungen dieser Art zu liefern, und das habe ich von allem Anfang an als einen Übelstand bezeichnet.

Berücksichtigt man aber einerseits, daß neuere Beobachtungen Aufspaltungen ergeben haben, die nur durch sehr große Zahlen mit der Rungeschen Regel in Beziehung gesetzt werden können, und die daher deren Anwendung recht künstlich erscheinen lassen, ferner andererseits, *auf welche Weise* bei dem vorstehend durchgeführten Problem Aufspaltungen zustande kommen, welche kleinzahlige Bruchteile der normalen sind, so wird man wohl zu dem Schluß gedrängt, daß die Rungesche Regel zwar unbedingt eine Teilwahrheit enthält, daß sie aber doch nicht den eigentlichen Kernpunkt trifft. Die bei dem obigen Problem in dem Ausdruck für die Aufspaltung auftretende Wurzelgröße $r = \sqrt{f_{23}^2 + g_{23}^2}$, der bei komplizierteren Zerlegungen auch kompliziertere entsprechen, macht das *allgemeine* Auftreten ganzzahliger Bruchteile recht unwahrscheinlich. Möglicherweise liegt die *eigentliche* Gesetzmäßigkeit in den Zahlenwerten der Koppelungsparameter, die bei dem obigen Beispiel ein so merkwürdig einheitliches System bilden.

Die Klärung dieser Frage stellt ein wichtiges Problem, für dessen Lösung nach den obigen theoretischen Entwicklungen wiederum neben den geometrischen auch die Intensitätsverhältnisse der komplexen Zeemaneffekte erforscht werden müssen. Bezügliche Beobachtungen sind im hiesigen Institut eingeleitet.

15. Eine Diskussion des Ausdruckes (53) für *mittlere* Feldstärken ist sehr umständlich und vorderhand kaum lohnend, da über das bez. Verhalten von *D*-Duplets bislang nur äußerst lückenhafte Beobachtungen vorliegen. *Was* vorliegt, ist eigentlich nur die von Hrn. Back¹⁾ an dem Na-Duplet gemachte Wahrnehmung, daß, noch *bevor* eine *geometrische* Einwirkung der Koppelung sich geltend macht, eine Beeinflussung der

1) E. Back, Ann. d. Phys. 39. p. 930. 1912.

Intensität der Zeemankomponenten im Sinne einer Dissymmetrie in bezug auf die Lage der feldlosen Linie merklich wird. Man kann sich *von dem Sinne* dieser Einwirkung Rechenschaft geben, indem man den Fall schwächster Felder berechnet, bei denen die Zerlegung klein ist gegen den Abstand der feldlosen Linien. Dies soll nachstehend zunächst für den Fall dreier verschiedenen gekoppelten Freiheitsgrade (also für ein spezielles Serientriplet) gemacht werden, bevor das *D-Duplet* in Angriff genommen wird.

Im Falle so kleiner Felder, daß im Zähler und Nenner des Quotienten nur die niedrigste Ordnung in bezug auf die h_{jk} beibehalten zu werden braucht, nimmt die Formel (53) die Gestalt an

$$(54) \quad n^2 - 1 = 2\pi N e^2 \sum \frac{3p^2 - 3i\nu p(h' + h'') + (\pi_2 \pi_3 + \dots)}{p^3 + p(\pi_2 \pi_3 + \dots + 3\nu^2 h' h'') + \pi_1 \pi_2 \pi_3}.$$

Die Wurzeln des Nenners bei *fehlendem* Feld sind $-\pi_1$, $-\pi_2$, $-\pi_3$; bei schwachen Feldern setze ich dafür $-(\pi_1 + \alpha_1)$, $-(\pi_2 + \alpha_2)$, $-(\pi_3 + \alpha_3)$, wobei nun die α_j die Verschiebungen der Zeemankomponenten infolge der Koppelungen bestimmen, und führe die Rechnung nur bis auf die erste Ordnung in bezug auf die α_j .

Die einfache Rechnung liefert

$$(55) \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{3\nu^2 h' h''}{\Delta} \pi_1 (\pi_2 - \pi_3), \dots \\ \Delta = \pi_1^2 (\pi_2 - \pi_3) + \dots \end{cases}$$

Die Stärken der Komponenten werden nach p. 409 gemessen durch die Zähler der Partialbruchzerlegung. Setze ich für den Quotienten in (54)

$$\frac{A_1}{p + \pi_1 + \alpha_1} + \dots,$$

dann sind bei fehlendem Felde alle $A_j = 1$. Schreibt man somit $A_j = 1 + \beta_j$, so wird β_j eine Korrektion sein, welche auf der Koppelung beruht.

Die Rechnung ergibt in erster Näherung

$$(56) \quad \beta_1 = \frac{3i\nu(h' + h'')}{\Delta} \pi_1 (\pi_2 - \pi_3), \dots$$

Damit sind die Probleme der geometrischen und der Intensitätswirkungen der Koppelungen bei schwächsten Feldern gelöst.

Da die π_j für die Diskussion als reell betrachtet werden dürfen, da weiter

$$(57) \quad k' h'' = -(f'^2 + g'^2) = -r^2, \quad i(h' + h'') = \pm 2g'$$

ist, und da f' wie g' dem Feld proportional sind, so zeigen die Ergebnisse der Theorie folgendes an.

Die Verschiebungen infolge der Koppelungen sind bei schwachen Feldern klein von *zweiter* Ordnung, die Intensitätsänderungen *erster* Ordnung. Die Verschiebungen sind für die Linien an beiden Seiten (vgl. § 4) einander gleich, insofern die Ausdrücke für die α_j kein doppeltes Vorzeichen aufweisen; die Intensitätsänderungen sind hingegen für die Linien der beiden Seiten verschieden, da die β_j doppeltes Vorzeichen haben. Sowohl $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ als $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ ist = 0, die Verschiebungen, wie die Intensitätsänderungen finden also bei den drei gekoppelten Linien nicht im gleichen Sinne statt.

Die Absolutwerte der α_j und β_j hängen im übrigen ganz wesentlich von den π_j ab, die sich ihrerseits durch die Eigenfrequenzen und die Halbwertsbreiten der gekoppelten Linien bestimmen.

16. Es ist ersichtlich, daß die vorstehenden Formeln beim Übergang von dem Serientriplet zum Seriiduplet, also bei $\pi_2 = \pi_3$ *versagen*: die Determinante Δ wird in diesem Falle gleich Null, α_2 , α_3 und β_2 , β_3 werden unendlich. Der Grund für dieses Verhalten (dergleichen bei den Betrachtungen der vorigen Abschnitte *nicht* vorkam) ist leicht ersichtlich. Wie aus den Entwicklungen von § 12 hervorgeht, wirkt eine Koppelung auf eine Doppellinie ($\pi_2 = \pi_3$) ganz anders, als auf ein Duplet ($\pi_2 \cong \pi_3$); sie liefert bei schwachen Feldern im ersten Falle Verschiebungen von einer anderen Größenordnung, — nicht dem Quadrate, sondern dem Feld selbst proportional.

Um dies zu berücksichtigen, gehen wir nunmehr von denjenigen Näherungswerten der Wurzeln des Nenners (53) aus, die sich aus (42) ergeben, nämlich $-\pi_1$, $-\pi_2 + \nu r$, $-\pi_2 - \nu r$, und setzen die korrigierten Wurzeln zu

$$-(\pi_1 + \alpha_1), \quad -(\pi_2 - \nu r + \alpha_2), \quad -(\pi_2 + \nu r + \alpha_2)$$

an. Eine einfache Rechnung ergibt für die $\pm s$ -Welle

$$(58) \quad \alpha_1 = \begin{Bmatrix} -\alpha_3 \\ -\alpha_2 \end{Bmatrix} = -\frac{2\nu^2 h' h''}{\pi_1 - \pi_2}, \quad \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = 0, \quad \text{wobei } \pi_1 + 2\pi_2 = 0.$$

Für die $\pm p$ -Welle tritt nur α_3 , α_2 anstelle von α_2 , α_3 .

Weiter führen wir eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{A_1}{p + \pi_1 + \alpha_1} + \frac{A_2}{p + \pi_2 - \nu r + \alpha_2} + \frac{A_3}{p + \pi_2 + \nu r + \alpha_3}$$

ein und drücken die A_j durch Näherungswerte aus, indem wir setzen für die

$$\begin{aligned} +p\text{-Welle: } & A_1 = 1 + \beta_1, \quad A_2 = 2 + \beta_2, \quad A_3 = \beta_3, \\ -p\text{-Welle: } & A_1 = 1 + \beta_1, \quad A_2 = \beta_2, \quad A_3 = 2 + \beta_3, \\ +s\text{-Welle: } & A_1 = 1 + \beta_1, \quad A_2 = \frac{3}{2} + \beta_2, \quad A_3 = \frac{1}{2} + \beta_3, \\ -s\text{-Welle: } & A_1 = 1 + \beta_1, \quad A_2 = \frac{1}{2} + \beta_2, \quad A_3 = \frac{3}{2} + \beta_3. \end{aligned}$$

Die Durchführung der Rechnung ergibt für beide Wellen

$$(59) \quad \beta_1 = -2\beta_2 = -2\beta_3 = \frac{2i\nu(h' + h'')}{\pi_1 - \pi_2}.$$

Bei Übergang zu den reellen Größen f' und g' , $r^2 = f'^2 + g'^2$ hat man schließlich in erster Annäherung

$$(60) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \begin{Bmatrix} -\alpha_3 \\ -\alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{2\nu^2 r^2}{\pi_1 - \pi_2}, & \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = 0, \\ \beta_1 = -2\beta_2 = -2\beta_3 = \pm \frac{4\nu g'}{\pi_1 - \pi_2}, \end{cases}$$

— Ausdrücke, zu denen analoge Bemerkungen zu machen sind, wie am Ende des vorigen Abschnittes an (55) und (56) geschlossen wurden.

Die Verschiebungen α_j sind klein zweiter, die Stärkeänderungen β_j klein erster Ordnung; die ersten finden bei den entsprechenden Linien, wie eine genaue Diskussion der Formeln zeigt, trotz der doppelten Vorzeichen bei α_2 und α_3 auf beiden Seiten im gleichen, die letzteren im entgegengesetzten Sinne statt. Die Doppellinie erleidet nur die halben Veränderungen β_j der einfachen, aber die gleichen α_j .

Um nun den Sinn der Intensitätsveränderung im Falle der D -Duplets festzustellen, ist in Erinnerung zu rufen, daß bei ihnen g' negativ ist. Es gilt nämlich nach (45) und (46)

$g_p' = -r$, $g_s' = -\frac{1}{2}r$. D_2 hat die größere Frequenz als D_1 , somit ist

$$\pi_2 > 0, \pi_1 < 0 \text{ und } \pi_1 - \pi_2 = -3\pi_2 < 0.$$

Demgemäß gibt die Formel (56) für β_1 einen Wert $\pm P$, für β_2 aber $\mp \frac{1}{2}P$, wobei P positiv. Das obere Vorzeichen bezieht sich dabei auf die Linien auf der Seite größerer Frequenz; demgemäß sagt die Theorie aus, daß in schwachen Feldern die Komponentensysteme von D_1 und D_2 durch die Koppelung auf der einander zugewandten Seite verstärkt, auf der einander abgewandten Seite geschwächt werden. Und zwar ist die Dissymmetrie stärker bei der p -, als bei der s -Welle, stärker bei der D_1 -, als bei der D_2 -Linie.

Dies ist nun genau der Inhalt der Backschen Beobachtung an dem Na-Duplet $\lambda = 2852 \text{ \AA.-E.}$; das Photogramm läßt auch erkennen, daß die Intensitätsänderung bei der Linie D_1 erheblich stärker ist, als bei D_2 .

17. Ist im Vorstehenden (so weit vom Standpunkt der Koppelungshypothese überhaupt möglich) das Verhalten der D -Duplets im Magnetfelde erklärt, so ist die Mehrzahl der übrigen von den Herren Paschen und Back untersuchten Seriensysteme einer ähnlich durchgreifenden Bearbeitung leider noch nicht fähig. Bei einigen, wie z. B. bei dem Paar $He\ 5876$, ist der Charakter der einen Konstituente *überhaupt* nicht aufgeklärt. In der Tat: ein Zeemantriplet *mit unvollkommener Polarisation der Komponenten* ist eben kein Triplet im Sinne der Theorie, nämlich nicht die Äußerung von nur drei Freiheitsgraden, sondern von mindestens sechs, vielleicht von mehr. Bei anderen, wie z. B. bei dem O -Triplet 3947 , ist zwar das *geometrische* Verhalten der magnetischen Zerlegung für die einzelnen Konstituenten klargestellt, es fehlt aber jede brauchbare Angabe über das nicht minder wesentliche Verhalten der *Intensitäten*. Ich vertage also das Eingehen auch auf den letzteren wichtigen Fall.

Daß im Vorstehenden die wesentlichen Mittel für die Behandlung beliebig komplizierter Systeme gewonnen sind, mag indessen noch wahrscheinlich gemacht werden durch den Nachweis eines wichtigen allgemeinen Satzes, von dem in § 11 ein spezieller Fall zur Anwendung gekommen ist.

Die komplexen Brechungsindizes der p - und der s -Welle bei einem beliebigen System von α komplexen Freiheitsgraden $x_j \pm iy_j$ bzw. $z_j \pm iz_j$ drücken sich nach p. 406 für eine jede der beiden Wellen aus durch die α^2 Funktionen

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1, \quad i\nu h_{12}, \quad i\nu h_{13}, \quad \dots \quad i\nu h_{1\alpha}, \\ i\nu h_{21}, \quad p_2, \quad i\nu h_{23}, \quad \dots \quad i\nu h_{2\alpha}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ i\nu h_{\alpha 1}, \quad i\nu h_{\alpha 2}, \quad i\nu h_{\alpha 3}, \quad \dots \quad p_\alpha, \quad \text{wobei} \\ p_j = h_j + \nu(if_j \pm g_j) - m\nu^2, \quad h_{jk} = f_{jk} \mp ig_{jk}, \\ h_{kj} = -f_{jk} \mp ig_{jk}, \end{array} \right.$$

und zwar ist $n^2 - 1$ nach p. 409 proportional mit

$$(62) \quad Q = \frac{\sum_{hk} \Delta_{hk}}{\Delta},$$

wobei Δ die Gesamtdeterminante des Systems ist, und $\sum \Delta_{hk}$ die Summe aller seiner ersten Partialdeterminanten bezeichnet.

Es mag wiederholt werden, daß das allgemeine Schema mit lauter verschiedenen p_j ein System von α einfachen Spektrallinien darstellt, deren jede für sich allein durch das Magnetfeld in ein Quadruplet zerlegt wird. Sind mehrere p_j einander gleich, so sagt das aus, daß *mehrfache* Linien vorhanden sind, welche im Magnetfeld Sextette, Oktette . . . liefern (die aber u. a. auch zu Quintetten, Septetten . . . degenerieren können). Die Koppelungen zwischen verschiedenen Linien werden merklich wirksam nur dann, wenn ihre magnetischen Einzelzerlegungen Ausdehnungen haben, die mit den Abständen der Linien vergleichbar sind.

Damit das ganze durch Q bestimmte System von Absorptionsstreifen mit wachsendem Feld, wobei der Unterschied zwischen den p_h schließlich wirkungslos wird, in *einen einzigen* Streifen zusammengeht, ist nötig, daß dabei der Nenner Δ den Zähler $\sum \Delta_{hk}$ als Faktor enthält. Es ist oben bei $\alpha = 3$ gezeigt, daß dies eintritt, wenn (außer den inneren) die äußeren Koppelungen h_{jk} des Systems einander zyklisch gleich sind.

Ich will jetzt beweisen, daß dieses Resultat ganz allgemeine Gültigkeit hat, und daß man auch bei beliebig großen α den

Grenzwert Q und damit den Ort der resultierenden Absorptionsstreifen in den Parametern h_{jk} angeben kann.

Um die zyklische Gleichheit der Koppelungen kurz zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir das vorstehende System (61) für $p_j = p$

$$(63) \quad \begin{cases} p, a', b', c', \dots b'', a'', \\ a'', p, a', b', \dots c'', b'', \\ b'', a'', p, a', \dots a'', c'', \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b', c', d', e', \dots p, a', \\ a', b', c', d', \dots a', p; \end{cases}$$

es sind hierin alle der Diagonale $p, p, \dots p$ parallelen Reihen mit in sich gleichen Funktionen erfüllt, und die spiegelbildlich sich entsprechenden Reihen enthalten *konjugiert komplexe* Funktionen f' und f'' .

Ich werde zeigen, daß für jedes derartige System

$$(64) \quad Q = \frac{1}{p + \nu q}$$

ist, wobei q eine reelle Größe bezeichnet, die sich verschieden darstellt, je nachdem α eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Der Beweis forme man Δ dadurch um, daß man zur ersten Zeile alle folgenden hinzu addiert, was bekanntlich den Wert von Δ nicht ändert. Dann resultiert für *ungerades* α , wie man leicht erkennt, für Δ der Ausdruck

$$(65) \quad \Delta = (p + a' + a'' + b' + b'' + \dots) \sum_k \Delta_{1k}.$$

Nun gehen aber aus den Δ_{1k} für $k = 1, 2, \dots \alpha$ alle übrigen Partialdeterminanten durch zyklische Vertauschung der Indizes hervor, und es ist nach der speziellen Form von Δ

$$\Delta_{1k} = \Delta_{2, k+1} = \Delta_{3, k+2} = \dots$$

Somit ist auch

$$(66) \quad \sum_k \Delta_{1k} = \frac{1}{\alpha} \sum_{hk} \Delta_{hk},$$

und daher

$$(67) \quad Q = \frac{\alpha}{p + a' + a'' + b' + b'' + \dots}, \quad \alpha \text{ ungerade.}$$

Wenn α gerade ist, dann fällt eine (schiefe) Reihe (') mit der zugehörigen (") zusammen, bei $\alpha = 4$ z. B. b' und b'' , bei $\alpha = 6$ ebenso c' mit c'' . Hier muß also der bezügliche ausgezeichnete Parameter reell sein, weil nur so die beiden Forderungen der konjugiert komplexen Form und der Gleichheit vereinbar sind.

Es ergibt sich durch analoge Schlüsse wie oben

$$(68) \quad Q = \frac{\alpha}{p + (a' + a'') + (b' + b'') + \dots + f}, \quad \alpha \text{ gerade};$$

am Schluß des Nenners erscheint *einfach* diejenige (reelle) Funktion f für die $f' = f''$.

Hiermit ist die Behauptung bewiesen, denn die in den Nennern von (67) und (68) neben p auftretenden Aggregate sind nach der Annahme reell. Gemäß der Bedeutung der h_{jk} haben sie überdies für die Linien jeder Seite (vgl. p. 409) das entgegengesetzte Vorzeichen, so daß die Formeln (67) bzw. (68) zusammen mit

$$p = h + v(if \pm g) - mr^2$$

(wo g die innere Koppelung enthält) zwei zur mittleren Frequenz ν_0 symmetrisch liegende Streifen ausdrücken. Die Lage dieser Streifen bestimmt sich in jedem Falle einfach aus den Parametern in g, a', a'', \dots

Im Falle der D -Duplets reichten die vorliegenden Beobachtungen über das Verhalten der einzelnen Linien D_1 und D_2 im Magnetfelde aus, um die Betrachtung bis zu Ende zu führen. In anderen Fällen fehlen bisher derartige nötige Daten.

Wir sind also zu dem Resultat gekommen, daß, wenn die p - und die s -Schwingungen auf beliebig vielen komplexen Freiheitsgraden $x_j \pm iy_j$ und $z_j \pm iz_j$ beruhen, deren innere Koppelungen unter sich gleich und deren äußere Koppelungen zyklisch gleich sind, dann das ganze System von Zeemankomponenten bei hinreichend enger Lagerung der feldlosen Linien und genügenden magnetischen Feldern sich in ein scharfes Quadruplet symmetrisch zur mittleren Frequenz ν_0 zusammenzieht. Seine Aufspaltung bestimmt sich aus den Parametern, und das Beispiel der D -Duplets zeigt, wie dabei ein normales Triplet resultieren kann.

18. Die vorstehende Entwicklung knüpfte an den durch die spezielle Betrachtung der D -Duplets nahe gelegten Fall an, daß die Schwingungen parallel zu den Kraftlinien sich (ähnlich, wie die normal dazu) durch komplexe Freiheitsgrade $z_j \pm i\beta_j$ darstellen lassen. Der ganz abweichende Typ der O -Triplets legt, wie hier nicht ausgeführt werden mag, eine andere Auffassung nahe, an die jetzt angeknüpft werden mag.

Wir wollen annehmen, daß die p -Schwingungen sich auf α reelle Freiheitsgrade zurückführen lassen. Dann fehlen also die inneren Koppelungen; es ist

$$(69) \quad p_j = h_j \pm i\nu h_j - m\nu^2,$$

und in dem Schema (61) sind alle h_j und h_{jk} reell, dabei gilt $h_{jk} = -h_{kj}$.

Ist dieses System zyklisch gekoppelt, so gilt für dasselbe das Schema (63) mit

$$(70) \quad a'' = -a', \quad b'' = -b', \dots$$

Ist α gerade, fallen also zwei schiefe Reihen f' und f'' zusammen, so gilt für diese Funktion

$$(71) \quad f' = f'' = 0.$$

Ein solches System gestattet nun genau dieselbe Behandlung, die vorstehend angewandt ist; in der Tat stellt das neue ja nur einen speziellen Fall des früheren dar. Das Resultat ist aber sehr bemerkenswert. Wegen der Bedingungen (70) und (71) degenerieren die Formeln (67) und (68) übereinstimmend zu

$$(72) \quad Q = \frac{\alpha}{p}.$$

Dies sagt aber folgendes aus.

In dem Fall, daß die p -Schwingungen auf zyklisch gleichförmig gekoppelten reellen Freiheitsgraden beruhen, zieht sich das ganze System entsprechender Zeemankomponenten bei hinreichend naher Lagerung der feldlosen Linien und hinreichend starken Feldern in eine einzige Linie bei der mittleren Frequenz ν_0 zusammen. Hier entsteht also aus den p - und den s -Schwingungen zusammen jederzeit ein Triplet, dessen Aufspaltung sich durch die Parameter bestimmt.

Deuten die Vorgänge auf eine *ungerade* Zahl $(2h + 1)$ von Freiheitsgraden in den p -Schwingungen, so wird der *zweite* Fall zunächst als gegeben erscheinen. Bei einer *geraden* Zahl $(2h)$ wird im allgemeinen die Wahl zwischen der Darstellung durch $2h$ reelle oder h komplexe Freiheitsgrade offen stehen. Diese beiden Darstellungen sind nicht nur formell, sondern auch sachlich verschieden; die letztere erscheint als *einfacher*. Im Falle der D -Duplets ergibt dieselbe eine vollständige Erklärung der bisherigen Beobachtungen, so daß eine Heranziehung der ersten sich erübrigt.

Ebenso soll auf *kompliziertere* zyklische Koppelungen, für die den vorstehenden ähnliche Sätze gelten, hier nicht eingegangen werden.

Resultate.

1. Das Ziel der vorstehenden Untersuchung war die Ausgestaltung der Koppelungstheorie der Zeemaneffekte durch Benutzung der neuesten, besonders durch die Herren Paschen und Back festgestellten Erfahrungstatsachen. Es sind dafür die allgemeinen Formeln für ein *beliebiges* System gekoppelter Elektronen zugrunde gelegt worden. Die Koppelung selbst wird dabei durch Glieder in den Bewegungsgleichungen der Elektronen dargestellt, die mit der Feldstärke proportional sind; ihre Faktoren sind die Koppelungsparameter.

2. Die Erfahrungstatsache, daß in vielen Fällen, z. B. bei den Zeemanschen Quadruplets, Sextuplets usw., die s - und die p -Schwingungen (senkrecht und parallel zu den Kraftlinien) völlig analogen Gesetzen folgen, veranlaßte die Einführung einer Spezialisierung der Formeln, welche diese Tatsache einfachst ausdrückt. Die Formeln für die s -Schwingungen (die in der XY -Ebene verlaufend gedacht sein mögen) lassen sich in zwei gleichgestaltete Systeme mit den Variablen $x_j + iy_j$ und $x_j - iy_j$ fassen, wobei x_j und y_j die Elongationen des Elektrons (j) parallel X und Y bezeichnen. Es ist nun angenommen, daß die Elongationen parallel Z eine ähnliche Darstellung gestatten, derart, daß mit jeder Elongation z_j eines Elektrons diejenige z_j eines anderen (gleichartigen) derartig zusammen auftritt, daß die Aufstellung von zwei gleichen Formelsystemen je mit den Variablen $z_j + iz_j$ und $z_j - iz_j$ möglich

wird. Unter diesen Umständen lauten die Grundgleichungen für die s - und für die p -Schwingungen völlig gleich, und sie lassen sich gemeinsam behandeln.

3. Unter den Koppelungsfunktionen für die s -Schwingungen nehmen diejenigen eine isolierte Stelle ein, die ein x_j mit dem entsprechenden y_j koppeln; dieselben stellen die Wirkung des Feldes auf das anderweit nicht gekoppelte Elektron j dar. Ihnen entsprechen unter den Koppelungsfunktionen der p -Schwingungen solche, welche ein z_j an das zugehörige ξ_j binden; dieselben stellen die Feldwirkung auf dieses anderweit nicht gekoppelte Paar dar. Solche sich entsprechende singuläre Koppelungen mögen kurz *innere* Koppelungen heißen, und im Gegensatz dazu die übrigen als *äußere* bezeichnet werden.

4. Es ist eine der am besten festgestellten neuen Erfahrungstatsachen, daß gewisse ursprünglich unsymmetrische Liniengruppen bei hinreichend gesteigertem Magnetfeld Zeeman-effekte liefern, die symmetrisch sind zu dem geometrischen Mittelpunkt des ursprünglichen Liniensystems. Es ergibt sich, daß dies nach der Theorie *dann* eintritt, wenn die Parameter aller *inneren* Koppelungen des Systems einander gleich sind.

5. Diese Parameter sind bei denjenigen komplexen Zeeman-effekten *einzelner* Linien, die (wie häufig) an jeder Seite der ursprünglichen Lage ein *in sich zentrisch symmetrisches* System von Komponenten liefern, maßgebend für den Abstand des bez. Symmetriezentrums von der feldlosen Linie (also bei Duplets für den Abstand der Seitenkomponenten selbst, bei Quadruplets für denjenigen der Mitte zwischen den Seitenkomponenten usw.). Nach 4. müssen also bei Liniensystemen, die in starken Feldern den genannten symmetrischen Zeeman-effekt zeigen, jene Symmetriezentren für die s -Schwingungen einerseits, für die p -Schwingungen andererseits bei allen Linien des Systems *gleiche Abstände* von der feldlosen Linie aufweisen.

6. Bei den Duplets von der Art der D -Linien, welche die in 4. vorausgesetzte Erscheinung zeigen, ist diese Anforderung für die s -Schwingungen von selbst erfüllt. Die Linie D_2 liefert hier ein Quadruplet, D_1 ein Duplet, und der Abstand des letzteren ist gleich dem Abstände der Mittellinie zwischen den beiderseitigen Komponenten des Quadruplets. Für die p -Schwingung findet zunächst Analoges *nicht* statt;

hier geben beide Linien Duplets, und deren Abstände verhalten sich für D_1 und D_2 wie 2:1. Hieraus ergibt sich, daß man nach der Theorie das D_2 -Duplet als ein Quadruplet mit einem Komponentenpaar verschwindender Stärke ansehen muß, dergleichen die Theorie, wie ich schon 1907 hervorgehoben habe, signalisiert, und die trotz verschwindender Stärke gewisse Wirkungen üben. Diese Auffassung wird dadurch gestützt, daß neueste Beobachtungen für die D -Linie die doppelte Zahl von Freiheitsgraden nachgewiesen haben, wie für die D_1 -Linie. Es ist also der Zeemaneffekt für die D_2 -Linie theoretisch als ein Oktett anzusehen, — im Gegensatz zu dem Quadruplet von D_1 .

Das Elektronensystem, welches Duplets von der Art der D -Linien hervorbringt, hat hiernach drei komplexe Freiheitsgrade $x_h \pm iy_h$ und drei $z_h \pm i\delta_h$, somit also zwölf reelle. Sind sämtliche drei analoge komplexe Freiheitsgrade verschiedenartig, so ergibt das System ein gewisses Serientriplet, aus dem das D -Duplet durch Gleichartigsetzen von zwei Freiheitsgraden (für D_2) entsteht.

7. Eine weitere neuerdings festgestellte Tatsache ist die, daß bei Linien vom D -Typ in hinreichend hohen Feldern je drei analoge Freiheitsgrade zusammen *nur eine* Linie liefern, und zwar so, daß speziell für die s -Schwingung diese Linien *normalen* Abstand haben, für die p -Schwingung aber im geometrischen Mittelpunkt des ganzen Systems *zusammenfallen*, und so ein *normales Triplet* bilden. Für *ersteres* ist bei einem beliebigen System von zweimal drei komplexen Freiheitsgraden die ausreichende (aber nicht nötige) Bedingung diejenige, daß die *äußeren Koppelungen* der drei Freiheitsgrade 1, 2, 3 einander gleich, die Freiheitsgrade also *zyklisch gleichmäßig* gekoppelt sind, derart, daß 1 mit 2 ebenso verbunden ist, wie 2 mit 3 und wie 3 mit 1. Dies gilt dann auch für D -Duplets, wo zwei Freiheitsgrade auf D_2 , einer auf D_1 fallen.

8. Nach Einführung dieser aus sehr allgemeinen Erwägungen fließenden Annahmen über die inneren und die äußeren Koppelungen enthalten die Gleichungen für die s - und für die p -Welle nur noch je drei Koppelungsparameter, die sich vollständig aus dem Verhalten der *einzelnen* Linien D_2 und D_1 — wie dasselbe bei weit getrennten Duplets zur

Geltung kommt — bestimmen lassen. Von diesem Verhalten kommt einmal die Größe der magnetischen Aufspaltung von D_1 und D_2 und sodann das Verhältnis der Stärken in den s - und p -Quadruplets von D_2 in Frage. Bei dem p -Quadruplet ist das Stärkeverhältnis zwischen den inneren und den äußeren Linien gleich 1:0, bei dem s -Quadruplet liefert es die Beobachtung merklich gleich $1:1/3$. Aus diesen Daten ergibt sich dann in der Tat, daß die zwölf Freiheitsgrade der D -Duplets bei starken Feldern ein einfaches normales Triplet liefern.

9. Der Aufbau des Gebildes, auf dem die betrachteten Serientriplets und die darin als Spezialfall enthaltenen D -Duplets beruhen können, ist hiernach ein höchst symmetrischer. Die in demselben auftretenden zweimal drei komplexen Freiheitsgrade $x_j \pm iy_j$ und $z_j \pm iz_j$, $j = 1, 2, 3$ haben sämtlich unter sich gleiche innere und auch unter sich gleiche äußere Kopplungen. Den spezifischen Habitus erhält das Duplet durch den Umstand, daß zwei von den drei Paaren von Freiheitsgraden gleiche Eigenschwingungen haben, derart, daß D_2 einer Doppellinie (2 + 3) entspricht, D_1 einer einfachen (1). Bei größerem Abstand der feldlosen Linien und bei mäßigen Feldern entsteht dann bei D_1 das bekannte Quadruplet, bei D_2 das Oktett bzw. Sextett; bei geringen Abständen und hinreichend gesteigerten Feldern fließen alle zwölf bzw. zehn Komponenten in ein normales Triplet zusammen.

10. Die vorstehenden Entwicklungen gelten ganz allgemein für beliebig weit getrennte Serientriplets und -duplets, ebenso für beliebig schwache oder starke Felder. Außer dem Extremfall, daß die magnetische Aufspaltung groß ist gegen die ursprüngliche Trennung der Linien der feldlosen Triplets und Duplets, ist aber nur noch der zweite Extremfall erörtert worden, daß das umgekehrte Verhältnis stattfindet, da eine Beobachtung von Hrn. Back vorliegt, die eine qualitative Vergleichung mit diesem Fall der Theorie gestattet. Diese Beobachtung geht dahin, daß *noch bevor* durch Koppelungswirkungen merkliche *geometrische* Veränderungen in dem Zeemaneffekt der einzelnen Konstituenten eintreten, sich eine Beeinflussung der *Intensitätsverhältnisse* geltend macht. Bei einem engen Na-Duplet zeigte sich eine Verstärkung der einander zugewandten Zeemankomponenten der beiden Linien, die bei

D_1 beträchtlich stärker war, als bei D_2 , bei den p - stärker, als bei den s -Schwingungen. Die Resultate der Theorie stimmen mit diesen Wahrnehmungen vollkommen überein.

11. Für die theoretische Behandlung anderer Linienkombinationen, die bei Anwendung starker Magnetfelder normale Triplets zu liefern scheinen, fehlen bislang noch ausreichende experimentelle Unterlagen. Doch haben sich die folgenden allgemeinen Sätze ergeben, welche wesentliche Bedingungen für das Zustandekommen der genannten Erscheinungen erkennen lassen.

Beliebig viele *komplexe* Freiheitsgrade, die (in der bei den D -Duplets erörterten Art) zyklisch gleichmäßig gekoppelt sind, lassen bei einander nahen Frequenzen in starken Feldern alle Zeemankomponenten in ein scharfes symmetrisch zur Mittelfrequenz ν_0 liegendes Duplet zusammenrücken, dessen Aufspaltung sich einfach durch die Koppelungsparameter ausdrückt.

Beliebig viele *reelle* Freiheitsgrade liefern bei zyklisch gleichmäßiger Koppelung unter denselben Umständen eine einzige scharfe Linie an der Stelle der Mittelfrequenz ν_0 .

Linienysteme, die auf derartig gekoppelten Freiheitsgraden beruhen, werden also auch (analog wie die D -Duplets) bei geeigneten Parameterwerten normale Triplets ergeben.

12. Die vorstehenden Untersuchungen halten sich auf phänomenologischem Niveau und bescheiden sich damit, durch Aufklärung der quantitativen Beziehungen, denen das Verhalten der verschiedenen Freiheitsgrade unterliegt, die nötige *Vorarbeit* für die spätere Aufstellung eines Modelles der äußerst komplizierten Vorgänge zu liefern. Immerhin kann der Nachweis von der fundamentalen Bedeutung der *zyklischen Koppelungen der Freiheitsgrade* für die Erklärung der neuen Beobachtungen als der *Anfang* eines Modellaufbaues gelten.

Göttingen, im März 1913.

(Eingegangen 2. April 1913.)