

1. Anwendungen der nichtlinearen Zeitreihenanalyse in der Hautmedizin

In der Medizin gibt es unzählige Möglichkeiten, die Methoden der Analyse nichtlinearer Zeitreihen einzusetzen. Laufend werden neue Messgeräte entwickelt, die alle möglichen physiologischen Größen aufnehmen und in Form von Zeitreihen festhalten. In aller Regel sind viele der dabei registrierten Körperfunktionen aufs engste miteinander verwoben und selbst Einflüsse der Umgebung wirken merklich ein. Die Inhalte der Zeitreihen werden so sehr komplex und sind mit herkömmlichen Methoden wie der Fourier-Analyse kaum auszuwerten.

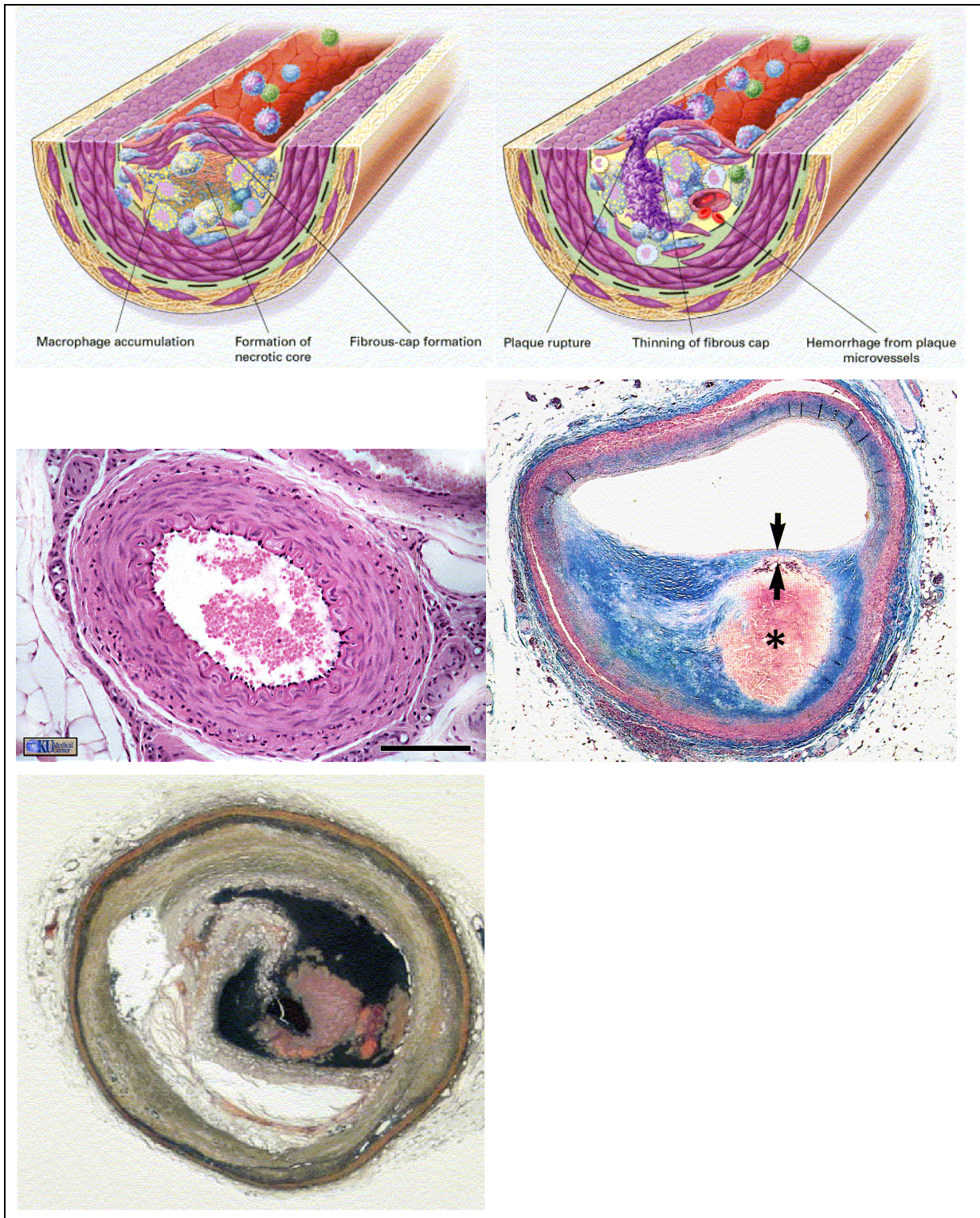
Typische Beispiele für unser Thema findet man bei der Auswertung von Elektroenzephalogrammen (EEG) und bei Elektrokardiogrammen (EKG), bei denen die elektrische Aktivität des Gehirns und des Herzens erfasst wird. Wir wollen uns hier aber vor allem mit LASER-Doppler-Fluss-Messdaten der Mikrozirkulation des Blutes in der Haut befassen. Zur Aufnahme der Messdaten wird die Hautoberfläche mit LASER-Licht bestrahlt und das an roten Blutkörperchen reflektierte Licht registriert. Die Intensität des reflektierten Lichtes gibt dabei Auskunft über die Menge der vorhandenen Blutkörperchen und die Doppler-Verschiebung des Lichtes gibt Auskunft über ihre Geschwindigkeit. Insgesamt kann so der Blutfluss erfasst werden. In seiner Dynamik spiegeln sich ganz verschiedene physiologische Eigenheiten wieder. Dazu gehören

- die Pumpeigenschaften des Herzens;
- die Stärke, Elastizität und Verkalkung der Blutadern;
- verschiedene Eigenheiten der Atmung oder
- die Steuerung der Hautdurchblutung durch das Nervensystem (Vasomotion).

Die unterschiedlichsten Krankheiten wie Hautkrebs oder Arteriosklerose und Einflüsse durch Alkohol, Nikotin oder andere Drogen lassen sich damit feststellen.

Die Physiologie der Haut und Messung ihrer Durchblutung

Fig. 1-1 zeigt einen Querschnitt durch die menschliche Haut und eine schematische Darstellung derselben. Die Haut besteht im wesentlichen aus drei Schichten: der Epidermis (Oberhaut), dem Corium (Unterhautgewebe) und dem Subkutis (Lederhaut). In der Lederhaut bestehen kapillare Verbindungen zwischen dem System der Arterien oder spezieller der Endarteriolen, und dem der Venen. Dies ist im rechten Teil von Fig. 1-1 gut zu erkennen. Aus arteriellem Blut wird venöses. Die verbindenden Kapillaren gehen bis dicht unter die Hautoberfläche, so dass der Blutfluss in ihnen direkt beobachtet werden kann.



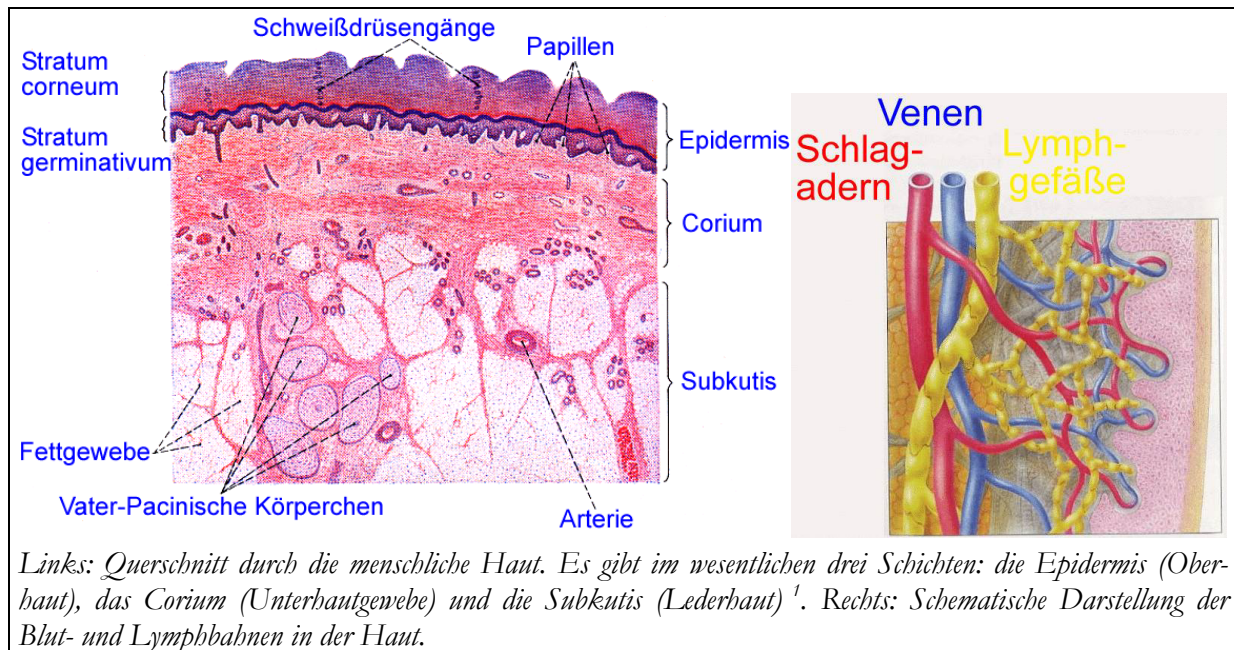


Fig. 1-1

Ein sehr modernes Verfahren zur Beobachtung des Blutflusses in den kapillaren Schlaufen ist die LASER-Doppler-Fluß-Messung. Wie in Fig. 1-2 links dargestellt ist, wird dazu LASER-Licht in die Haut eingestrahlt. Dieses wird vom roten Hämoglobin der Blutkörperchen reflektiert und von einer Sonde registriert. Zwei Informationen über den Blutfluss werden damit gewonnen:

- Die Intensität I des reflektierten Lichtes ist proportional zur Menge der Blutkörperchen N pro Blutvolumenelement V und zur Fläche A des beobachteten Bereichs der Haut und
- die Frequenzverschiebung des registrierten Lichtes $\Delta\nu$ relativ zum eingestrahlteten ist wegen dem Doppler-Effekt proportional zur Geschwindigkeit v der Blutkörperchen.

Mit der gemittelten Geschwindigkeit $\bar{v}$ kann dann der Blutfluss F bestimmt werden. Es ist die

$$\begin{aligned}
 \text{Dichte: } \rho &\equiv \frac{N}{V}; & \text{Strom: } j &\equiv \bar{v} \rho = \bar{v} \frac{N}{V}; \\
 \text{Intensität: } I &\propto \rho A; & \text{Fluß: } F &\equiv j A \propto \bar{v} I.
 \end{aligned}
 \tag{1-1}$$

¹ Epidermis = Oberhaut, Corium = Unterhautgewebe, Subkutis = untere Lederhaut, Stratum corneum = Hornhaut, Stratum germinativum = Keimschicht, Papillen = warzenartige Erhebungen.

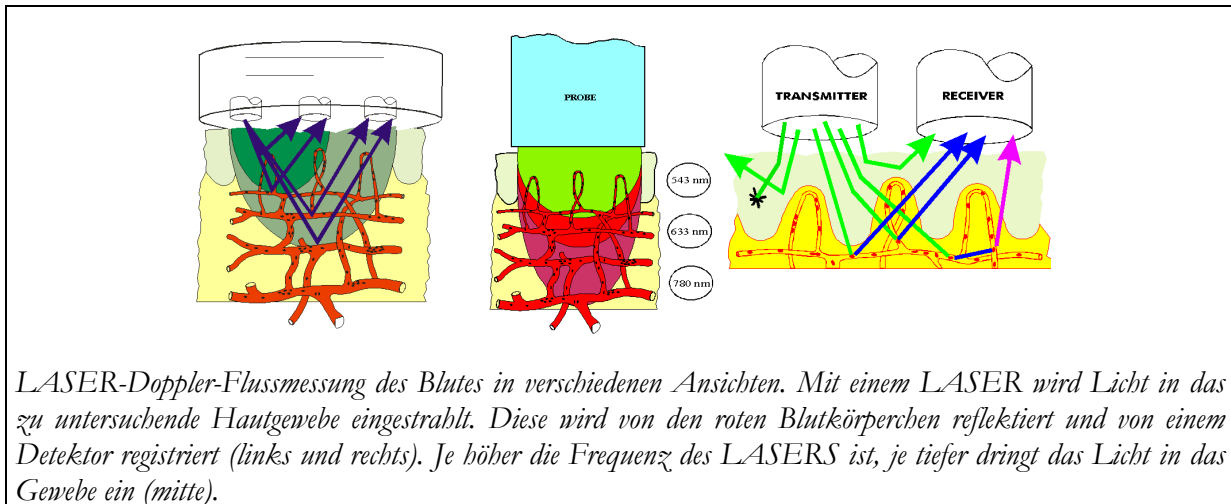


Fig. 1-2

Fig. 1-3 zeigt schematisch die betrachtete Fläche A als Kreis und das Blutstromfeld j in Form von Vektorpfeilen.

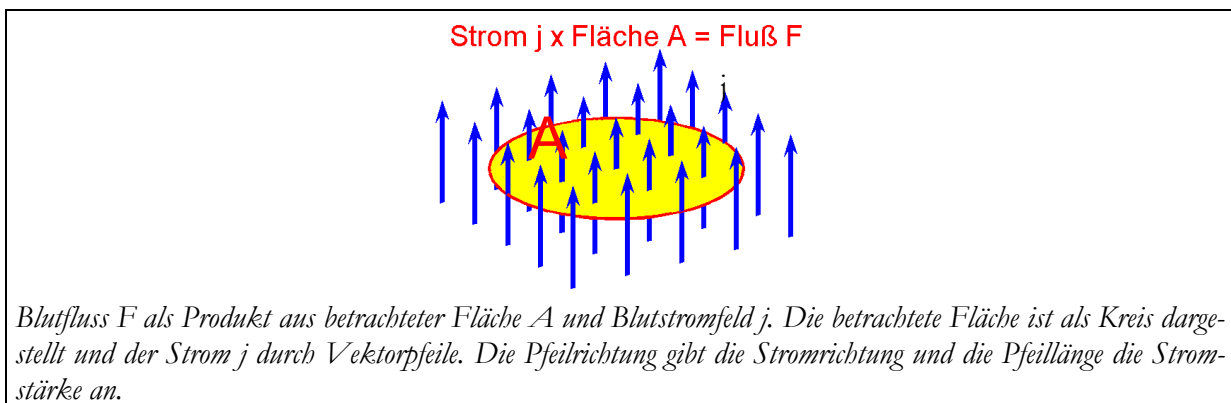


Fig. 1-3



Fig. 1-4

Fig. 1-5 zeigt zwei Beispiele für den so bestimmten Blutfluss als Funktion der Zeit, oben für gesunde Haut und unten für kranke. Die schnellen Variationen rühren im wesentlichen von Puls-

wellen her, die durch den Herzschlag erzeugt werden. Die langsameren Variationen haben ihren Ursprung in Einflüssen der Atmung und der Vasomotion.

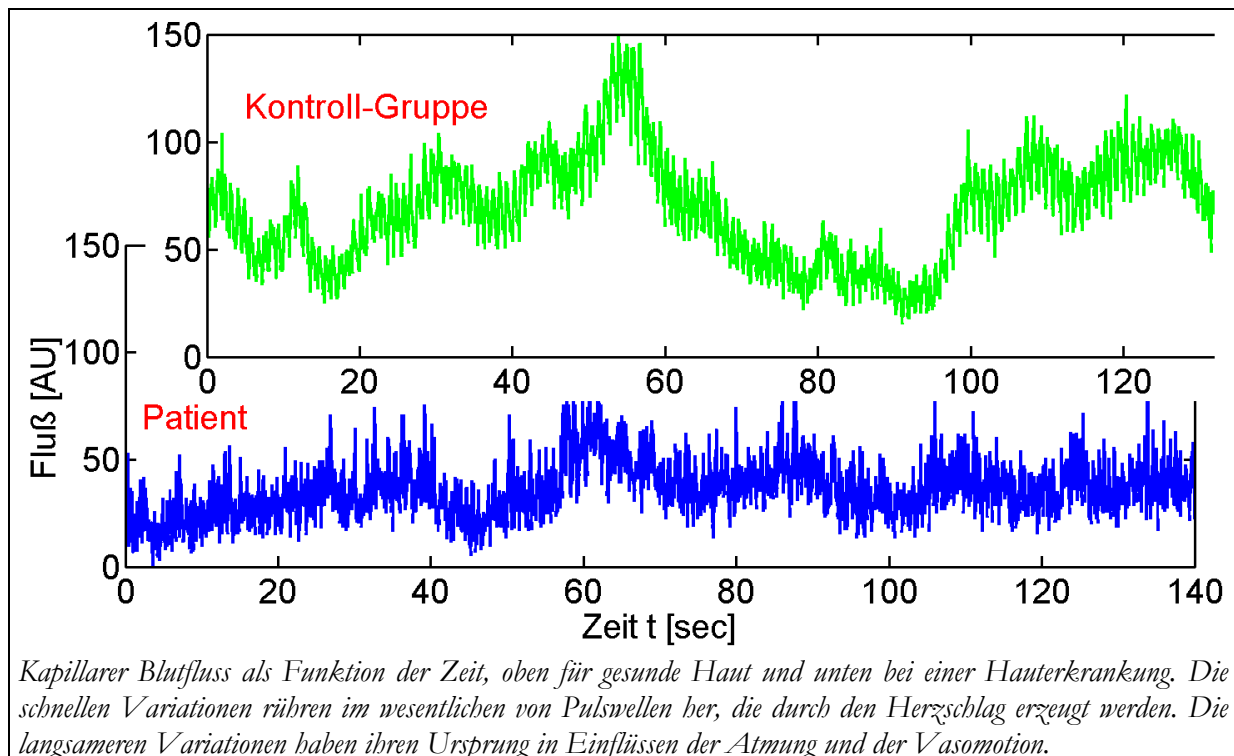


Fig. 1-5

Die folgenden Anwendungen wurden in gemeinsamen Projekten mit den Hautärzten Dr. Hans-Martin Häfner und Prof. Dr. Michael Jünger, Universitätsklinik Greifswald, erarbeitet.

Unterscheidung zwischen Melanomen und gutartigen Hautveränderungen

Eine wichtige dermatologische Frage ist immer, ob es sich bei einer auffälligen Veränderung der Haut um ein bösartiges Melanom, also um Hautkrebs handelt der dringend behandelt werden muss, oder ob es sich um eine harmlose Hautveränderung wie einem Muttermal handelt.

Fig. 1-6 zeigt ein bösartiges Melanom. Mit bloßem Auge ist eine sichere Diagnose jedoch nicht möglich. Konventionell wird der Hautbereich entfernt und im Labor analysiert. Das ist zum einen aufwendig und zum andern für den Patienten zumindest unangenehm. Weiterhin besteht die Gefahr, dass sich durch den operativen Eingriff Metastasen² im Körper verteilen, was unbedingt zu vermeiden ist.

Daher werden nichtinvasive Untersuchungsmethoden dringend gesucht. Praktiziert wird bereits die Auflichtmikroskopie von Hauttumoren mit einer 10-fach vergrößernden Lupe. Die Hautläsion wird durch ein Glasscheibchen mit unterliegender Ölimmersion betrachtet, da so Reflexionen an der Hautoberfläche verhindert werden und der Einblick in die oberen Hautschichten möglich ist. Für die Beurteilung ist sehr viel Erfahrung notwendig und die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Diagnose liegt bei 70 bis 90 %.

Eine ganz neue Methode zur Beurteilung der kritischen Hautbereiche besteht nun darin, den Blutfluss mit der LASER-Doppler-Methode zu messen und die so gewonnenen irregulären Zeit-

² Tochtergeschwüre

reihen einer nichtlinearen Datenanalyse zu unterziehen. Fig. 1-7 zeigt zwei Beispiele, wobei links die gesunde Haut und rechts das Zentrum eines Melanoms derselben Person erfasst wurde.

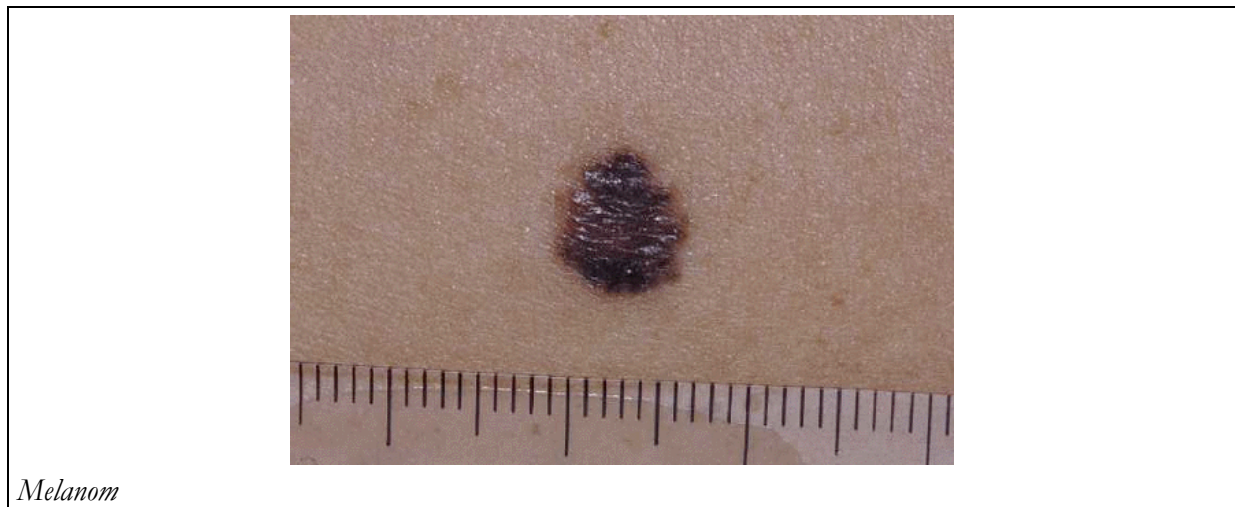


Fig. 1-6

Oben in Fig. 1-7 sind die beiden Zeitreihen zu sehen. Die dargestellte zeitliche Entwicklung des Blutflusses ist in beiden Fällen sehr ähnlich, im malignen Fall links ist die Amplitude jedoch wesentlich größer. Ganz allgemein ist Krebsgewebe besser durchblutet als gesundes Gewebe.

In der Mitte von Fig. 1-7 sind Wavelet-Koeffizienten dargestellt, wie es im vorausgehenden Kapitel ausführlich erläutert wurde. Die darüber gezeichneten Zeitreihen werden hier sowohl zeitlich als auch nach ihren Skalierungsebenen s aufgelöst. Die schnellen Änderungen des Blutflusses sind oben und die langsamen unten. Jede Skalierungsebene umfasst einen bestimmten Frequenzbereich, der von der Wahl des Mutter-Wavlets abhängt. Die Einheiten für die Skalierungsebenen s wurden so gewählt, dass sie grobe mit einer Frequenzskala übereinstimmen. Es handelt sich jedoch um willkürliche Einheiten.

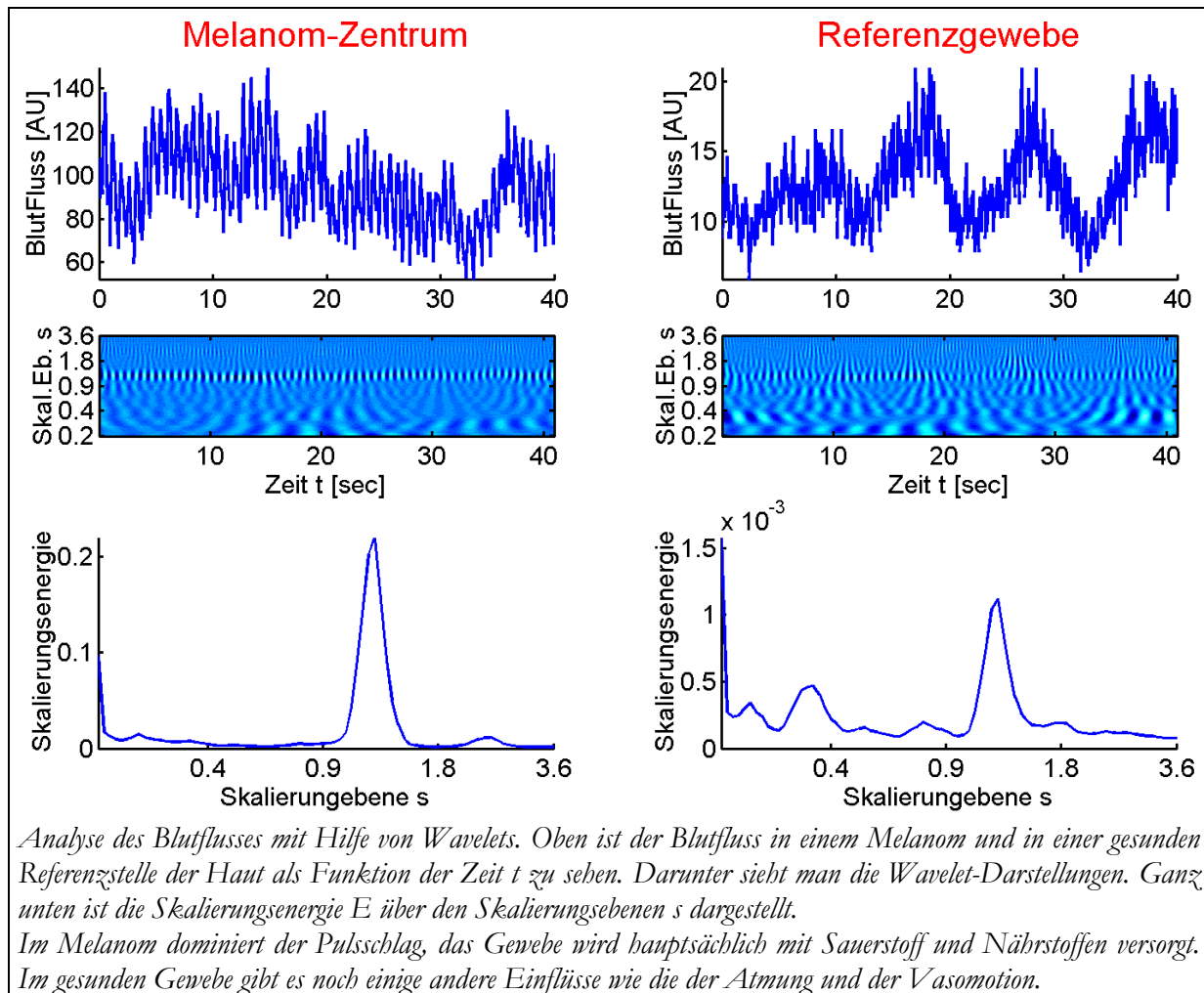


Fig. 1-7

In beiden Wavelet-Darstellungen ist auf der Skalierungsebene von etwa $s=1$ das regelmäßige Pulsieren des Blutes nach dem Herzschlag zu erkennen. Im malignen Fall links dominiert dieses Signal alles andere. In der gesunden Haut rechts sind neben dem Pulsschlag auch bei $s \approx 0.2$ Vasomotionseinflüsse und bei $s \approx 0.4$ Atmungseinflüsse ausgeprägt. Auf den im Vergleich zu den Pulswellen noch schnelleren Zeitskalen mit $s > 1$ handelt es sich um Reflektionen der Pulswellen an den Enden der Blutgefäße.

Die so dargestellten Unterschiede der Durchblutung sind sehr typisch. Gesundes Gewebe hat sehr viele Kontroll- und Regelmechanismen, die in einer Wavelet-Darstellung erkennbar werden. Diese fallen in malignem Gewebe weg und es dominiert die Versorgung mit Sauerstoff und Nährstoffen. Krebszellen sind auf Wachstum und Vermehrung optimiert und von anderen Körperfunktionen entkoppelt.

Für eine statistische Erfassung der Befunde ist es nun wichtig, diese qualitativen Aussagen zu quantifizieren und möglichst aussagekräftige Kenngrößen zu finden. Als sehr hilfreich dabei hat sich die Energie der Wavelet-Darstellung erwiesen. Diese wird nun eingeführt.

Wir beginnen mit der Zeitreihe ξ , aufgenommen mit einer Frequenz f_{samp} zu den Zeiten t_n :

$$\xi(t_n), \quad t_n = \frac{n-1}{f_{\text{samp}}}, \quad n \in [1, N]. \quad (1-2)$$

Die Wavelet-Darstellung V zum Zeitindex τ und der Skalierungsebene s_σ erhält man nun durch die Entwicklung der Zeitreihe ξ nach den Wavelets ϕ

$$V_{\tau s_\sigma} = \sum_{n \in \{1 \dots N\}} \phi_{s_\sigma}(t_n - t_\tau) \xi(t_n). \quad (1-3)$$

Der Index s bezieht sich dabei auf die Oktaven und der Subindex σ auf die Stimmen, so wie es im vorausgehenden Kapitel erläutert wurde. Die Wavelet-Darstellung V wird auch als Vasomotionsfeld bezeichnet.

Die Feldenergie ist zum Beispiel in der Elektrodynamik definiert als Integral über das Quadrat der Feldamplituden. Wir definieren hier die Feldenergie des Vasomotionsfeldes E auf jeder Skalierungsebene s_σ ganz entsprechen durch

$$E_{s_\sigma} = \sum_{\tau \in \mathbb{N}} V_{\tau s_\sigma}^2. \quad (1-4)$$

Diese Größe ist in Fig. 1-7 unten für das gesunde und das maligne Gewebe dargestellt. Hier werden die Unterschiede zwischen den beiden Vasomotionsfeldern sehr deutlich. Während im malignen Gewebe die Vasomotionsenergie fast ausschließlich auf den Pulsschlag beschränkt ist, verteilt sie sich in benignem Gewebe fast gleichmäßig auf alle Skalierungsebenen. Der Unterschied zwischen den beiden Energieverteilungen kann nun durch eine einzige Kennzahl, dem Energiekontrast

$$\Delta E = C^{-1} \sum_{s, \sigma} \left| E_{s_\sigma}^{(\text{gesund})} - E_{s_\sigma}^{(\text{pigment})} \right|, \quad (1-5)$$

$$C = \sum_{s, \sigma} \left| E_{s_\sigma}^{(\text{gesund})} + E_{s_\sigma}^{(\text{pigment})} \right| \Rightarrow \Delta E \in [0, 1]$$

ausgedrückt werden. Dieser Energiekontrast hat sich als äußerst signifikant erwiesen.

Bei einem Patienten mit einer auffälligen Hautveränderung wird der Blutfluss in diesem Hautbereich und in einem daneben liegenden, normalen Hautbereich gemessen. Über die Wavelet-Analyse wird der Energiekontrast der beiden Vasomotionsfelder bestimmt. Bisher wurden mehrere hundert Fälle untersucht [HÄFN01a] und festgestellt, dass dieser Kontrast bei Melanomen größer als $\Delta E=0.75$ und bei benignen Hautveränderungen kleiner als $\Delta E=0.75$ ist. Es ist damit möglich, maligne Hautveränderungen in vivo, also ohne chirurgischen Eingriff sicher zu diagnostizieren. Das Ergebnis der Studie ist in Fig. 1-8 zu sehen.

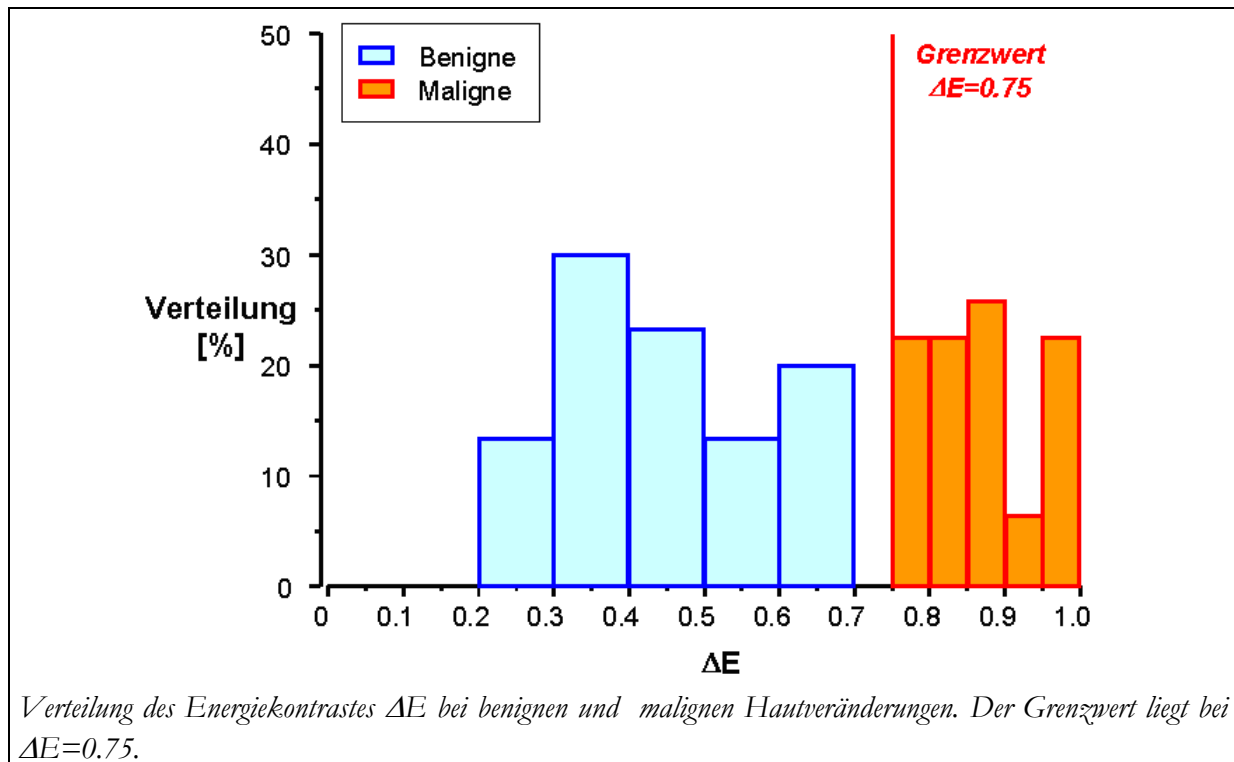


Fig. 1-8

Bestimmung arterieller Verschlusskrankheiten über die Entropie des dermalen³ Blutflusses

Eine sehr häufige und schwerwiegende Durchblutungsstörung ist die Arteriosklerose. Durch Kalkablagerungen bilden sich in den Arterien Verschlüsse und verhindern eine Versorgung der Körperteile mit Blut, Nährstoffen und auch die Temperaturregulierung.

Zur Untersuchung wird herkömmlich ein Kontrastmittel in die Blutbahnen eingegeben, dessen Ausbreitung im Körper durch Röntgenaufnahmen verfolgt werden kann. Diese Methode ist sehr sicher, sie ist aber auch aufwendig und belastet den Körper nicht unerheblich.

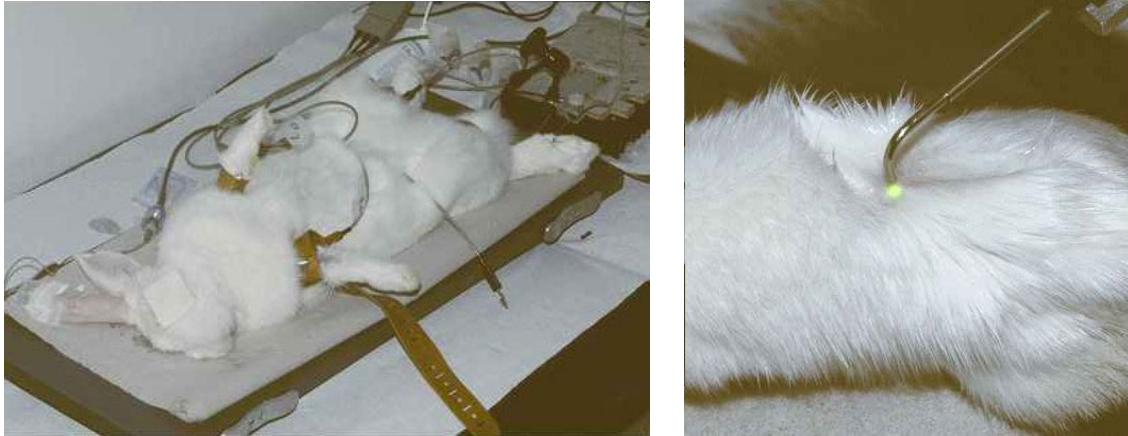
In einer Studie an Hasen konnte nun gezeigt werden [HÄFN01b], dass ein unmittelbarer Zusammenhang besteht zwischen dem Grad der Verkalkung der Arterien und der Entropie des Blutflusses.

Dazu wurden 15 Weiße Neuseelandkaninchen über 12 Wochen hinweg mit 0.5%igem Cholesterinfutter versorgt und der LASER-Doppler-Fluss in der Haut im Abstand von 4 Wochen gemessen. Nach 16 Wochen wurden die Tiere geopfert und das Ausmaß der Arterienverkalkung morphologisch untersucht.

Bei der Datenanalyse erwies sich die Entropie des Blutflusses, die im vorausgehenden Kapitel eingeführt wurde, als äußerst sensibler Parameter für die Einflüsse der Kalkablagerungen auf den Blutfluss. Es wurde eine signifikante Korrelation zwischen Ausmaß der Verkalkung und dem ermittelten Entropiewert festgestellt.

Fig. 1-9 zeigt ein Kaninchen bei der Aufnahme der Blutflussdaten. Es wurde betäubt und fixiert. Rechts im Bild ist die LASER-Sonde und der untersuchte Bereich der Haut zu erkennen.

³ dermal = die Haut betreffend



Kaninchen bei der Aufnahme der Blutflussdaten. Wie links zu sehen ist, wurde es betäubt und fixiert. Rechts im Bild ist die LASER-Sonde und der Untersuchte Bereich der Haut zu erkennen.

Fig. 1-9

Fig. 1-10 zeigt den Querschnitt durch die verkalkte Arterie eines Kaninchens, welches zwölf Wochen lang mit cholesterinhaltiger Nahrung versorgt wurde. Die Arterie ist fast vollständig verschlossen, das Blut kann nur noch durch den schmalen Kanal im oberen Bereich fließen.

Überraschend wurde festgestellt, dass der dermale Blutfluss der Kaninchen nach etwa 8 Wochen zunahm. Darin ist eine kompensatorische Hyperperfusion in der Peripherie zu sehen. In der zwölften Woche sinkt der mittlere Blutfluss wieder ab und die Blutflussmittelwerte werden vergleichbar mit den Werten vor der Cholesterinaufnahme. Rückschlüsse auf die arterielle Verkalkung lassen sich aus den Blutflusswerten nicht ziehen. Die Blutflusswerte der Studie sind in Fig. 1-11 dargestellt.



Querschnitt durch die verkalkte Arterie eines Kaninchens, das zwölf Wochen lang mit cholesterinhaltiger Nahrung versorgt wurde. Die Arterie ist fast vollständig verschlossen, das Blut kann nur noch durch einen schmalen Kanal im oberen Bereich fließen.

Fig. 1-10

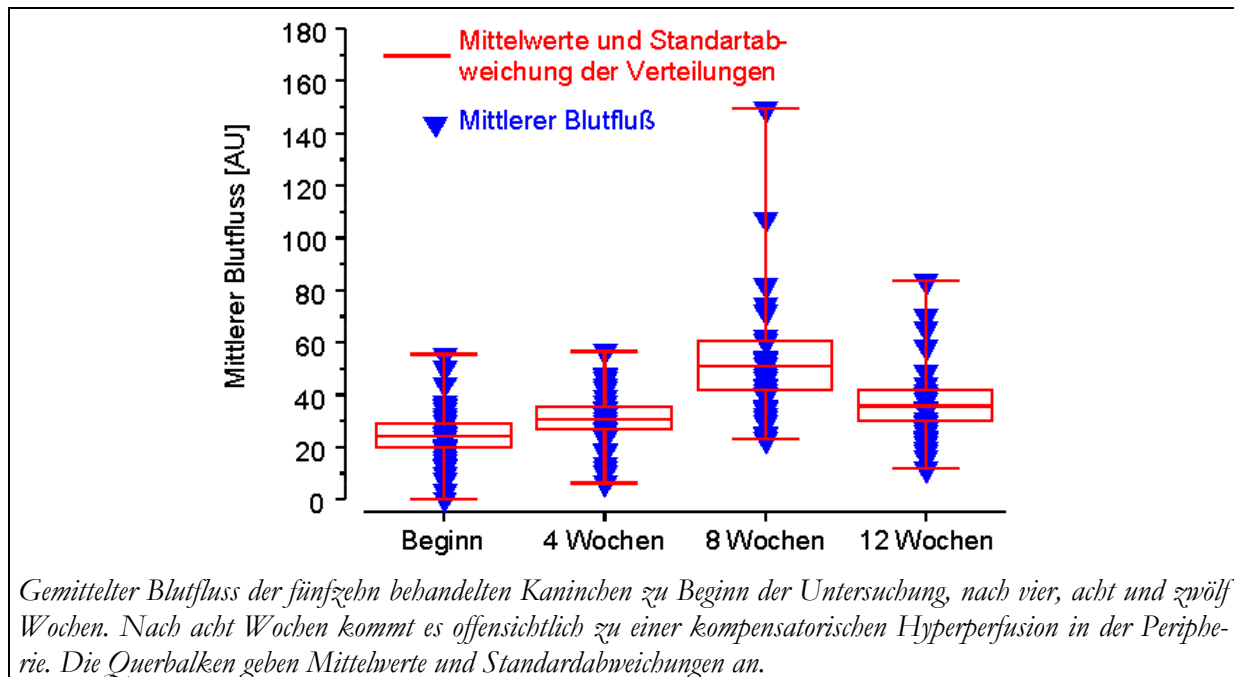


Fig. 1-11

Als sehr sensitiv auf Einflüsse der arteriellen Verkalkung auf die Hautdurchblutung erwies sich die Entropie des Blutflusses. Diese wurde wie im vorausgehenden Kapitel eingeführt und definiert. Aus jeder Zeitreihe des Blutflusses wurde die Systemtrajektorie in einem 6-dimensionalen Einbettungsraum rekonstruiert und dann einer Biorthogonalzerlegung unterzogen. Aus den Eigenwerten der Kovarianzmatrix wurde dann die Entropie bestimmt.

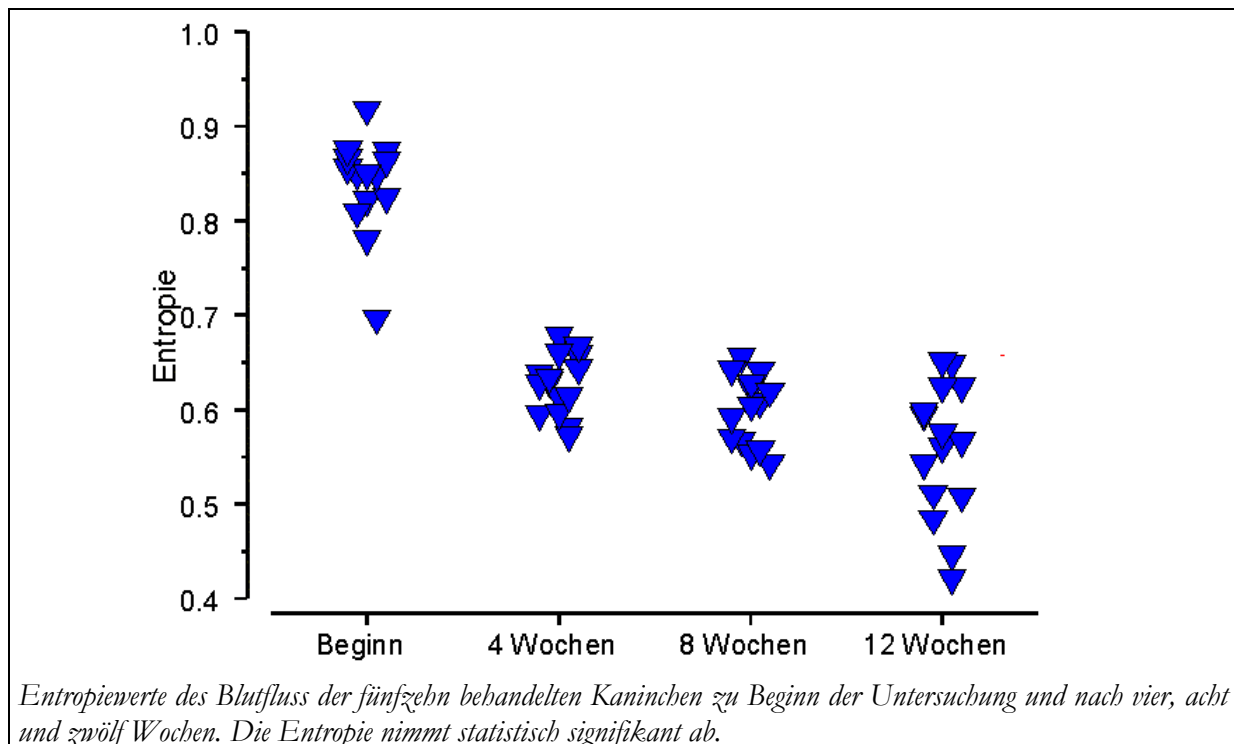


Fig. 1-12

Dieser Entropiewert gibt an, wie die Dynamik des Blutflusses auf einzelne Einflüsse verteilt ist. Der Wert ist klein, wenn wenige Einflüsse dominieren und er ist groß, wenn viele Freiheitsgrade

wie Herzschlag, Atmung, Vasomotion usw. gleichermaßen einwirken. Die Verhältnisse bei den Kaninchen ist in Fig. 1-12 zu sehen. Im Verlauf der Behandlung nimmt die Entropie im Blutfluss der Kaninchen deutlich ab; das heißt die Dynamik wird einfacher, der Einfluss verschiedener Freiheitsgrade wie Atmung und Vasomotion gehen verloren. Die Korrelation zwischen Entropie und Plaquanteil ist in Fig. 1-13 dargestellt.

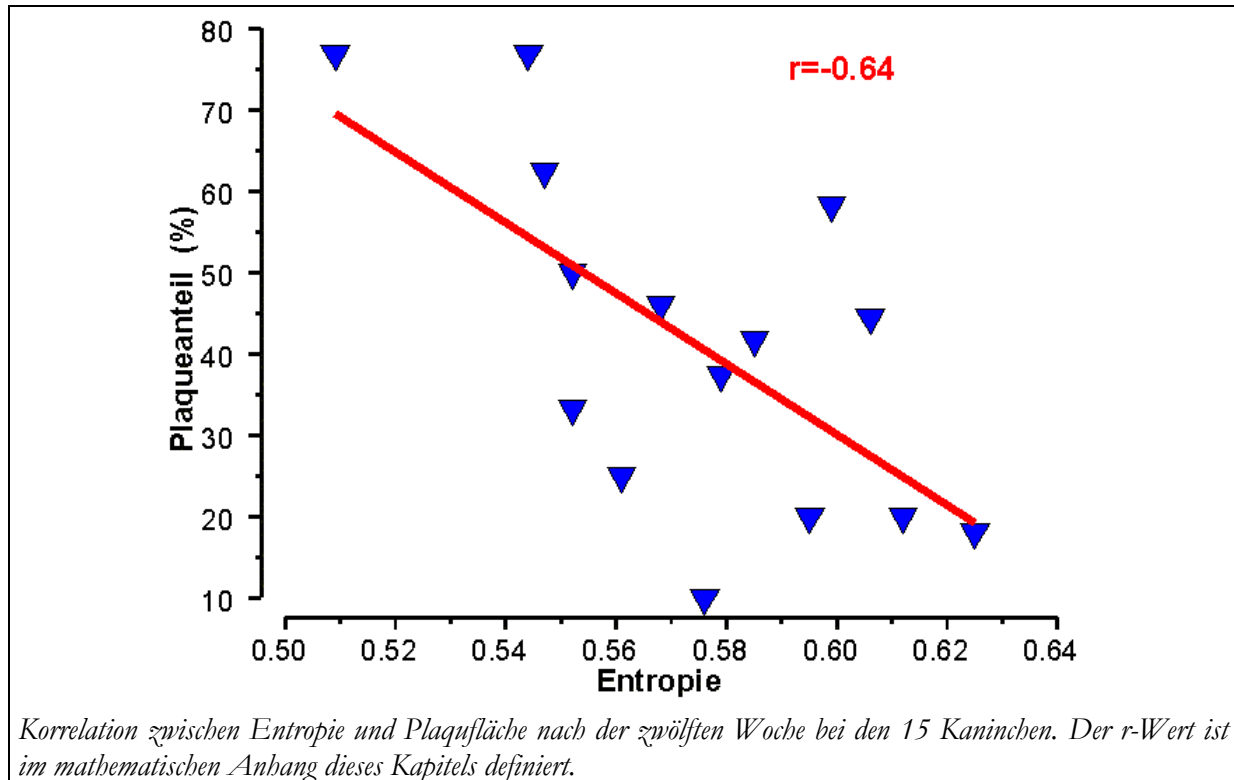


Fig. 1-13

Raynaud-Syndrom

Beim Raynaud-Syndrom handelt es sich um eine Unterversorgung der Haut mit Blut aufgrund von Gefäßkrämpfen. Sie tritt meist an den Arterien der Finger auf, ist schmerzhaft und führt langfristig zur Schädigung der Gefäßwände, zu deren Absterben und Brand. Zur Heilung ist ein frühzeitiges Erkennen von größter Bedeutung. In einer klinischen Studie konnte gezeigt werden, dass dies durch eine nichtlineare Analyse des Blutflusses in den betroffenen Hautregionen tatsächlich möglich ist [BRÄU99a].

Untersucht wurden neun Patienten im Alter zwischen 29 und 74 Jahren und eine entsprechende Kontrollgruppe. Der Blutfluss wurde im Nagelfalz unter strenger Kontrolle der Körpertemperatur gemessen.

Zur nichtlinearen Analyse wurden Systemtrajektorien in einem zwölfdimensionalen Einbettungsraum rekonstruiert, wie das im vorausgehenden Kapitel beschrieben wurde. Zur Bestimmung der Einbettungsparameter, speziell der Zeitverzögerung τ wurden Füllfaktoren berechnet. Als speziell sensitiv erwies sich die fraktale Dimension der Systemtrajektorien. Fig. 1-14 zeigt die Verteilung der lokalen Korrelationsdimension D_2 im Falle eines Patienten und bei einem Gesunden.

Deutlich zu erkennen ist, dass es beim Gesunden wesentlich weniger Freiheitsgrade gibt als beim Patienten. Beim Gesunden würde ein fünfdimensionaler Einbettungsraum für die Rekonstruktion ausreichen. Die Freiheitsgrade sind im wesentlichen Vasomotion, Atmung, Herzschlag und Re-

flektionen der Pulswellen an den Gefäßenden. Beim Gesunden sind offensichtlich keine weiteren Einflüsse vorhanden. Beim Kranken sind viel mehr Einflüsse festzustellen, die eigentlich nur auf die Verkrampfung der Ringmuskeln an den Kapillargefäßen und die dadurch bewirkten Schädigungen zurückgeführt werden können.

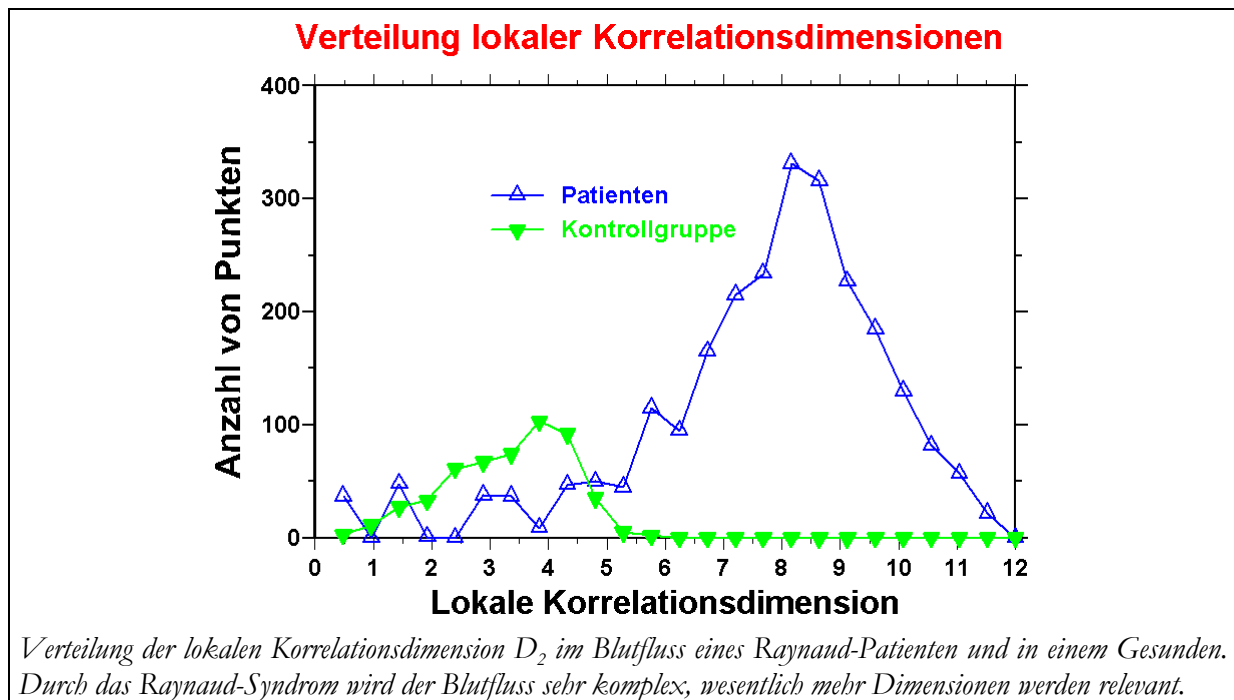


Fig. 1-14

Fig. 1-15 zeigt den Überblick über die beiden untersuchten Gruppen. Das oben Gesagte gilt für alle untersuchten Personen. Bei Gesunden werden wenig Freiheitsgrade registriert, die mittlere lokale Korrelationsdimension liegt in allen Fällen unter 5.5. Bei den Patienten liegt sie jeweils über diesem Grenzwert. Bei der maximalen Korrelationsdimension sind die Verhältnisse ganz ähnlich.

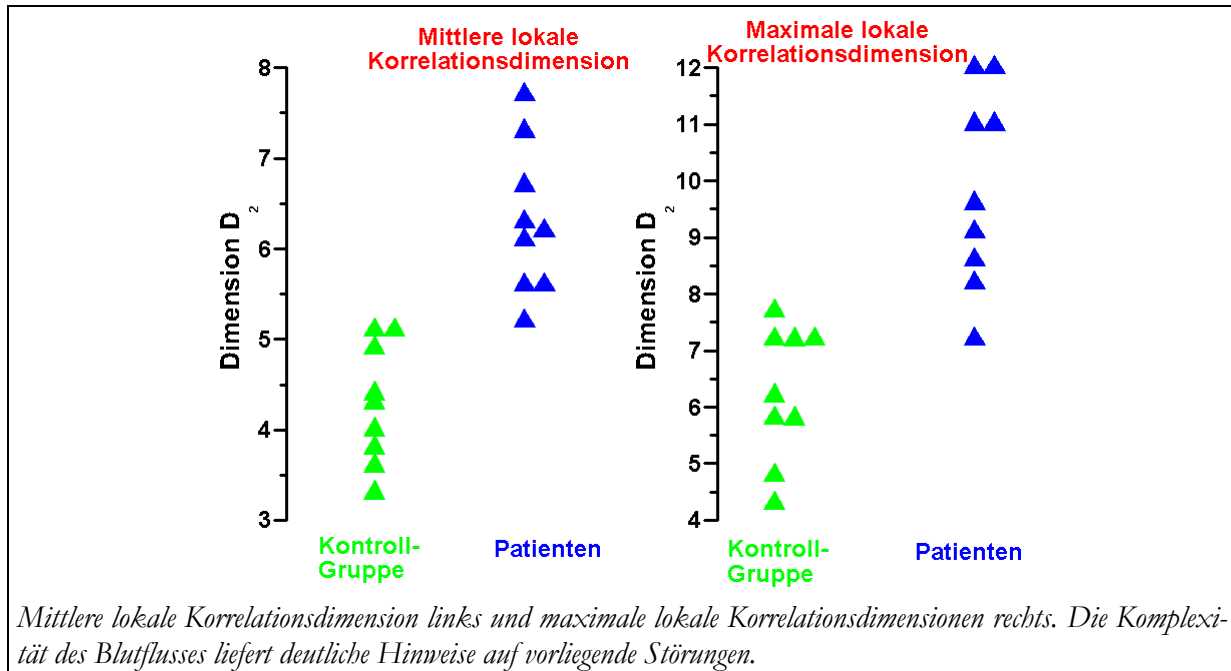


Fig. 1-15

Mathematischer Anhang

Mittelwert

Für eine Messgröße

$$x_i, \quad i \in \{1..N_{Dat}\} \quad (1-6)$$

ist der Mittelwert definiert durch

$$\bar{x} = \frac{1}{N_{Dat}} \sum_{i \in \{1..N_{Dat}\}} x_i. \quad (1-7)$$

Standardabweichung

Die Standardabweichung wird berechnet mit

$$s = \sqrt{\frac{1}{N_{Dat} - 1} \sum_{i \in \{1..N_{Dat}\}} (x_i - \bar{x})^2}. \quad (1-8)$$

Sie ist ein Maß für die Abweichung der Daten vom Mittelwert.

Lineare Korrelation, r-Wert

Für zwei Messgrößen

$$(x_i, y_i) \quad i \in \{1..N_{Dat}\} \quad (1-9)$$

ist der r-Wert definiert durch

$$r = \frac{\sum_{i \in \{1..N_{Dat}\}} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i \in \{1..N_{Dat}\}} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i \in \{1..N_{Dat}\}} (y_i - \bar{y})^2}} \in [-1, 1]. \quad (1-10)$$

Er gibt den Grad der linearen Korrelation der beiden Messgrößen an. Liegen die Paare in (1-9) auf einer Geraden, ist $|r|=1$. r ist positiv, wenn beide Messgrößen gemeinsam ansteigen oder abfallen. Steigt eine Messgröße an, wenn die andere abfällt, ist r negativ. Zur Veranschaulichung sind in Fig. 1-16 verschiedene Beispiele gezeigt.

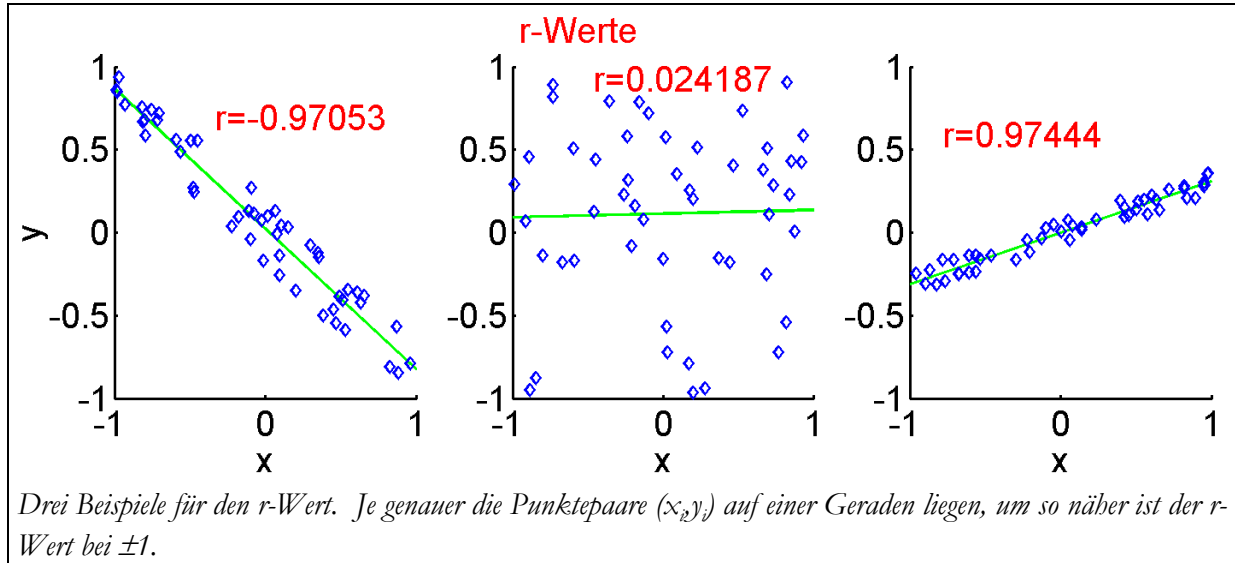


Fig. 1-16

Mutter-Wavelet und Wavelet

Als Mutter-Wavelet wurde verwendet

$$\phi(t) = \cos(at) \exp(-t^2), \quad a = 17.3932, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 0. \quad (1-11)$$

Die Wavelets werde abgeleitet als

$$\begin{aligned} \phi_s(t) &= \sqrt{s} \phi(st), \quad \text{mit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_s(t) dt &= \sqrt{s} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(st) dt = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(st) d(st) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) d(t) = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_s^2(t) dt &= s \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(st) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(st) d(st) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(t) d(t). \end{aligned} \quad (1-12)$$

Entropie des Blutflusses

Aus der Zeitreihe (ξ_n) werden mit einer Verzögerungszeit τ in $\dim_E$ Dimensionen N Attraktorpunkte rekonstruiert und mit einem Faktor F normiert:

$$\vec{x}_n = F\left(\xi_n, \xi_{n+\tau}, \dots, \xi_{n+(\dim_E-1)\tau}\right), \quad \frac{1}{N} \sum \vec{x}_n^2 = 1. \quad (1-13)$$

Wir beschreiben den rekonstruierten Attraktor als Zeitreihe:

$$X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(\dim_E)} & \dots & x_n^{(\dim_E)} \end{pmatrix}. \quad (1-14)$$

Für X machen wir dann den Biorthogonalen Ansatz

$$X = \sum_{k=1}^{\dim_E} \sqrt{\lambda_k} \vec{u}^{(k)} \left(\vec{v}^{(k)} \right)^T, \quad \text{mit } \vec{u}^{(k)} \in \mathbb{R}^n, \vec{v}^{(k)} \in \mathbb{R}^{\dim_E} \quad \text{und } \vec{u}^{(i)} \cdot \vec{u}^{(j)} = \vec{v}^{(i)} \cdot \vec{v}^{(j)} = \delta_{ij}. \quad (1-15)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} X \vec{v}^{(l)} &= \sqrt{\lambda_l} \vec{u}^{(l)}, \\ X^T \vec{u}^{(l)} &= \sqrt{\lambda_l} \vec{v}^{(l)} \quad \text{und} \\ \underbrace{X^T X}_R \vec{v}^{(l)} &= \lambda_l \vec{v}^{(l)}. \end{aligned} \quad (1-16)$$

Die Korrelationsmatrix ist also

$$R = \frac{1}{N} \sum \vec{x}_n \otimes \vec{x}_n = \frac{1}{N} \sum \begin{pmatrix} x_n^{(1)} x_n^{(1)} & x_n^{(1)} x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(1)} x_n^{(\dim_E)} \\ x_n^{(1)} x_n^{(2)} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} x_n^{(\dim_E)} & \dots & \dots & x_n^{(\dim_E)} x_n^{(\dim_E)} \end{pmatrix} \quad (1-17)$$

Die neuen Achsen $\vec{v}_k$ des Attraktors werden durch Lösen des Eigenwertproblems

$$R \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k \quad (1-18)$$

bestimmt. Entsprechend Kapitel 13 gibt der Eigenwert λ_k an, wie stark der Freiheitsgrad v_k im System vertreten ist. Wegen der Normierung der Zeitreihe in (1-13) gilt ferner

$$\sum_{k \in \{1..N\}} \lambda_k = 1. \quad (1-19)$$

Das erlaubt die Definition einer Entropie

$$S = -\frac{1}{\ln N} \sum_{k \in \{1..N\}} \lambda_k \ln \lambda_k. \quad (1-20)$$

Der Wert für Gleichverteilung ist

$$S^{(\text{Gleichvert.})} = -\frac{1}{\ln N} \sum_{k \in \{1..N\}} \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = -\frac{1}{\ln N} \ln \frac{1}{N} \sum_{k \in \{1..N\}} \frac{1}{N} = 1 \quad (1-21)$$

und für eine scharfe Verteilung

$$S^{(\text{scharf})} = -\frac{1}{\ln N} \sum_{k \in \{1 \dots N\}} \delta_{ki} \ln \delta_{ki} = -\frac{1}{\ln N} 1 \underbrace{\ln 1}_{=0} = 0. \quad (1-22)$$

Dabei wurde verwendet, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x}(\ln x)}{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0. \quad (1-23)$$

ist.