Alfred Rieckers
Kurt Bräuer

Einladung zur Mathematik

Eine mathematische Einführung und Begleitung zum Studium der Physik und Informatik, Logos Verlag 2002

Lösungen zu den Übungsaufgaben

(Fehlerhinweise bitte an kurt.braeuer@uni-tuebingen.de)

Kapitel 4

Übungsbeispiel 4 (1)

a)

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}=\frac{(1+n)+(2+n-1)+\ldots}{n}=\frac{\frac{n}{2}(1+n)}{n}=\frac{(1+n)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)}{2}=\infty$$

die Folge konvergiert also nicht

b)

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}=\frac{\frac{n}{2}(1+n)}{n+2}-\frac{\frac{n}{2}(n+2)}{n+2}=\frac{\frac{n}{2}(1+n-n-2)}{n-2}=\frac{-\frac{n}{2}}{n-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{n}\right)}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\left|a-a_n\right|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}+\frac{n}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{n}\right)}\right|=\left|\frac{1}{2}\frac{1-\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\left(1-\frac{2}{n}\right)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n-2}\right|<\varepsilon\quad\forall n>n_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}+2$$

Die Folge konvergiert also und der Grenzwert ist *-1/2*

c)

$i^n : i, -1, -i, 1, i \ldots$

Diese Reihe konvergiert nicht, sie ist unbestimmt divergent

d)

$$\left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$$

es handelt sich also um eine Nullfolge

e)

$$n\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} - 1\right) = n\left(1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \ldots - 1\right) = n\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \ldots\right) = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\tfrac{1}{n} + \ldots\right)$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\tfrac{1}{n} + \ldots\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$|a - a_n| = \left|\frac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\tfrac{1}{n} + \delta_n\right)\right| = \left|\tfrac{1}{8}\tfrac{1}{n} + \delta_n\right| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon = \frac{1}{8\left(\varepsilon - \delta_{n_\varepsilon}\right)}$$

Die Folge konvergiert also und der Grenzwert ist *1/2*

Übungsbeispiel 4 (2)

$$\sqrt{3} = 2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}} = 2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}} = 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right) = 2\left(1 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8\cdot 16} + \ldots\right)$$
$$\simeq \tfrac{8\cdot 16 - 16 - 1}{8\cdot 8} = \tfrac{126-16-1}{64} = \tfrac{109}{64}$$
$$\simeq 1.70$$
$$\sqrt{3} \simeq 1.73$$

Übungsbeispiel 4 (3)

Harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$$

Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \frac{n}{n+1} \overset{!}{\leq} \delta < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

für jedes $\delta < 1$ existiert jedoch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{n}{n+1} \geq \delta$

Das Quotientenkriterium ist also nicht erfüllt, die Reihe muss nicht konvergieren.

Übungsbeispiel 4 (4)

Binomische Reihe:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots$$

damit:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k}_{=a_k}$$

die einzelnen Glieder lauten

$$\lim_{n\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$\lim_{n\to\infty} a_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2!}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_3 = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3!}$$

$$\vdots \;=\; \vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{k!}$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e$$

Übungsbeispiel 4 (5)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=\left(1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{24}x^4+\ldots\right)\left(1+y+\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{24}y^4+\ldots\right)$$

$$=1+x+y+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}y^2+xy+\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{2}x^2y+\tfrac{1}{2}xy^2$$
$$+\tfrac{1}{24}x^4+\tfrac{1}{24}y^4+\tfrac{1}{6}x^3y+\tfrac{1}{6}xy^3+\tfrac{1}{4}x^2y^2+\ldots$$
$$=1+x+y+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}y^2+xy+\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{2}x^2y+\tfrac{1}{2}xy^2$$
$$+\tfrac{1}{24}\left(x^4+y^4+4x^3y+4xy^3+6x^2y^2\right)+\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=1+x+y+\tfrac{1}{2}(x+y)^2+\tfrac{1}{6}(x+y)^3+\tfrac{1}{24}(x+y)^4+\ldots$$
$$=1+x+y+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}y^2+xy+\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{2}x^2y+\tfrac{1}{2}xy^2$$
$$+\tfrac{1}{24}\left(x^2+2xy+y^2\right)^2+\ldots$$
$$=1+x+y+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}y^2+xy+\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{2}x^2y+\tfrac{1}{2}xy^2$$
$$+\tfrac{1}{24}\left(x^4+y^4+4x^3y+4xy^3+6x^2y^2\right)+\ldots$$

beide Ausdrücke stimmen bis in die gewünschte Ordnung miteinander überein

Übungsbeispiel 4 (6)

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n}\right|=\left|\frac{(\alpha-n)}{n+1}x\right|=\left|\frac{n-\alpha}{n+1}x\right|<|x|<1\quad\forall n\geq\alpha\ \text{und}\ |x|<1$$