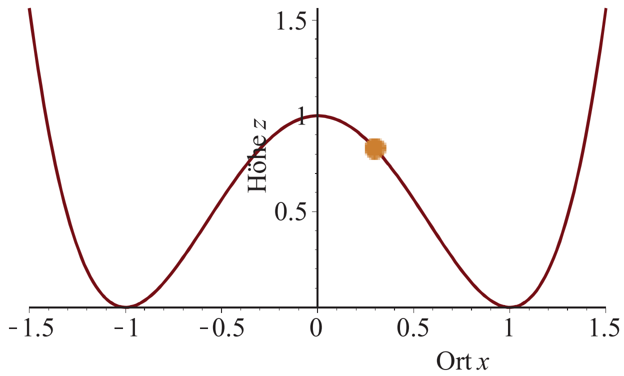
Murmel in einer Mulde (mit Maple)

1) Problem

Eine Murmel (Punktteilchen) bewegt sich in einer Mulde, die in der x-z-Ebene durch

$$z = \left(1 - x^2\right)^2 \tag{1.1}$$

beschrieben wird.



Die Murmel unterliegt dem
Potential

$$V = m\, g\, z \tag{1.2}$$

Für die numerischen Berechnungen verwenden wir die
Parameter

$$Par := E0 = 1.001\ m\, g, m = 1, g = 1, x0 = 0 \tag{1.3}$$

2) Koordinaten und Metrik

Ortsvektor:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Generalisierte Koordinate q:

$$x = q, z = \left(1 - q^2\right)^2 \tag{2.2}$$

also:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} q \\ \left(1 - q^2\right)^2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Jacobi-Matrix:

(2.4)

$$J = \begin{bmatrix} 1 \\ -4\left(1-q^2\right) q \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Metrik:

$$G = Jt.J$$

$$G = \left[\, 1+16\left(1-q^2\right)^2 q^2 \,\right] \tag{2.5}$$

Inverse Metrik:

$$Gi = \frac{1}{G}$$

$$Gi = \left[\, \frac{1}{1+16\,q^2-32\,q^4+16\,q^6} \,\right] \tag{2.6}$$

3) Hamilton-Funktion und Bewegungsgleichungen

Hamilton-Funktion:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{p}{m} \end{bmatrix} .Gi.\left[\, p \,\right] + m\,g\,V \tag{3.1}$$

also

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{p^2}{m\left(1+16\,q^2-32\,q^4+16\,q^6\right)} + m^2\,g^2\left(1-q^2\right)^2 \tag{3.2}$$

Bewegungsgleichungen :

$$\frac{\partial}{\partial t}\,q = \frac{\partial}{\partial p}\,H,\ \frac{\partial}{\partial t}\,p = -\left(\frac{\partial}{\partial q}\,H\right) \tag{3.3}$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,q = \frac{p}{m\left(1+16\,q^2-32\,q^4+16\,q^6\right)},\ \frac{\partial}{\partial t}\,p = \frac{1}{2}\,\frac{p^2\left(32\,q-128\,q^3+96\,q^5\right)}{m\left(1+16\,q^2-32\,q^4+16\,q^6\right)^2} + 4\,m^2\,g^2\left(1-q^2\right)q \tag{3.4}$$

4) Oszillationszeit T

Wir lösen die konstante Energie E nach dem Impuls:

$$p = \left(32\,m\,H\,q^6+2\,m\,H+32\,m\,H\,q^2-64\,m\,H\,q^4-192\,m^3\,g^2\,q^6-2\,m^3\,g^2 - 28\,m^3\,g^2\,q^2+126\,m^3\,g^2\,q^4+128\,m^3\,g^2\,q^8-32\,m^3\,g^2\,q^{10}\right)^{1/2}, p = -\left(32\,m\,H\,q^6+2\,m\,H+32\,m\,H\,q^2-64\,m\,H\,q^4-192\,m^3\,g^2\,q^6-2\,m^3\,g^2 - 28\,m^3\,g^2\,q^2+126\,m^3\,g^2\,q^4+128\,m^3\,g^2\,q^8-32\,m^3\,g^2\,q^{10}\right)^{1/2} \tag{4.1}$$

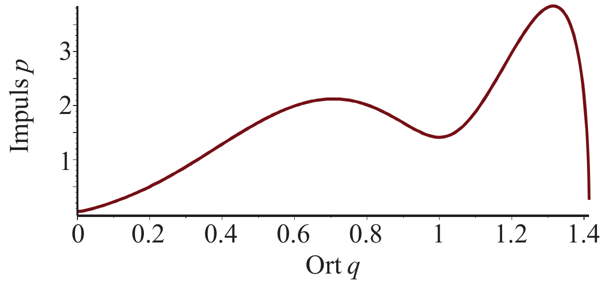
positiver Zweig:

$$p = \left(32\,m\,H\,q^6+2\,m\,H+32\,m\,H\,q^2-64\,m\,H\,q^4-192\,m^3\,g^2\,q^6-2\,m^3\,g^2 \tag{4.2}$$

$$-28\,m^3 g^2 q^2 + 126\,m^3 g^2 q^4 + 128\,m^3 g^2 q^8 - 32\,m^3 g^2 q^{10})^{1/2}$$

Mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Parametern:

$$p = \sqrt{-159.968\,q^6 + 0.002 + 4.032\,q^2 + 61.936\,q^4 + 128\,q^8 - 32\,q^{10}} \tag{4.3}$$



Anfangsimpuls:

$$p0 = 0.04472135955 \tag{4.4}$$

Die Periode bekommt man, indem man 1=v/v über die Zeit integriert (mit Substitution dt -> dq)
Periode:

$$T = 2\left(\int_{0.}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial t}\,q}\,\mathrm{d}q\right) \tag{4.5}$$

Integration

$$T = 2\left(\int_{0.}^{\sqrt{2}} \frac{1 + 16\,q^2 - 32\,q^4 + 16\,q^6}{\sqrt{-159.968\,q^6 + 0.002 + 4.032\,q^2 + 61.936\,q^4 + 128\,q^8 - 32\,q^{10}}}\,\mathrm{d}q\right)$$

$$T = 8.711603478 \tag{4.6}$$

5) Geschwindigkeit der Kugel

Wir lösen die konstante Energie E nach dem Impuls:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,q = \frac{p}{m\,(1 + 16\,q^2 - 32\,q^4 + 16\,q^6)}$$

$$v = \frac{p}{1 + 16\,q^2 - 32\,q^4 + 16\,q^6} \tag{5.1}$$

6) Numerische Lösung der Bewegungsgleichung

Parameter:

$$E0 = 1.001\,m\,g,\ m = 1,\ g = 1,\ x0 = 0 \tag{6.1}$$

Bewegungsgleichungen:

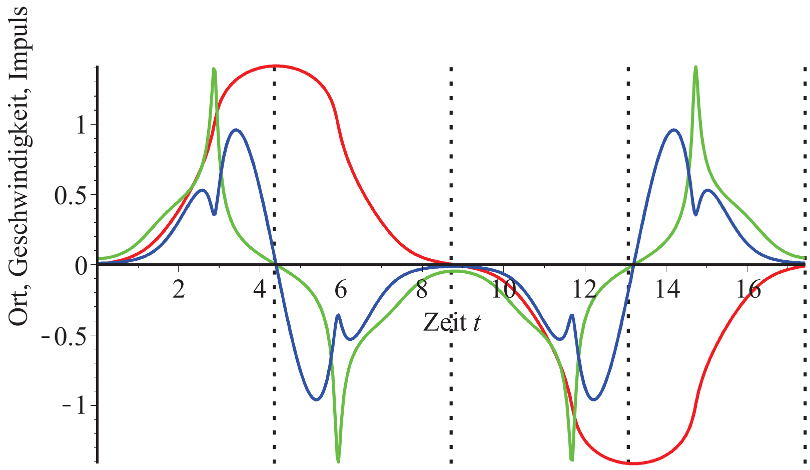
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,q(t) = \frac{p(t)}{1 + 16\,q(t)^2 - 32\,q(t)^4 + 16\,q(t)^6},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,p(t) \tag{6.2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p(t)^2 \left(32\, q(t) - 128\, q(t)^3 + 96\, q(t)^5\right)}{\left(1 + 16\, q(t)^2 - 32\, q(t)^4 + 16\, q(t)^6\right)^2} + 4 \left(1 - q(t)^2\right) q(t)$$

Anfangswerte:

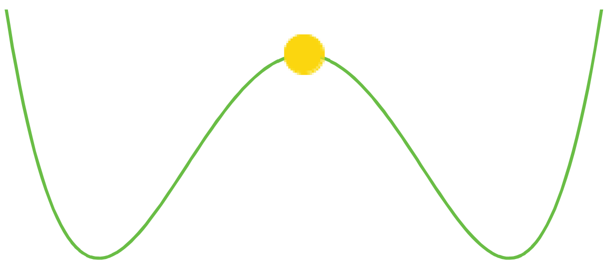
$$q(0) = 0, p(0) = 0.04472135955 \tag{6.3}$$

Plot: Ort, Geschwindigkeit und Impuls als Funktion der Zeit



7) Animation der Bewegung

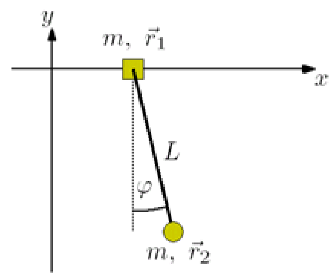
Parameter siehe Abschnitt 6)



Rollenpendel

1) Problem

Der Aufhängepunkt $\vec{r}_1$ eines ebenen Pendels rollt reibungsfrei auf der x-Achse und wird durch Schwingungen der Pendelmasse bei $\vec{r}_2$ hin und her bewegt. Das Pendel hat die Länge L und Massen des Aufhängepunktes und der Pendelmasse sind jeweils m. Auf die Pendelmasse wirkt die Schwerkraft $m\vec{g}$. (Die gesamte Pendelmasse ist auf den Punkt $\vec{r}_2$ konzentriert).



Zur Beschreibung des gesamten Systems wählen wir

Ortsvektor: $$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + L\sin\varphi \\ -L\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Impulsvektor: $$\vec{p} = \underbrace{p_x \vec{g}^x + p_\varphi \vec{g}^\varphi + p_L \vec{g}^L}_{\vec{g}^{\{x,\varphi,L\}}\text{: Kontravariante Grundvektoren}}$$

$$m = 1,\ g = 1,\ L = 1,\ E = 0.9999 \tag{1.1}$$

2) Koordinaten und Metrik

Ort

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ x + L\sin(\phi) \\ -L\cos(\phi) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Jacobi-Matrix

$$J = \text{'}VectorCalculus_{Jacobian}(\vec{r}, [x, \phi])\text{'} \tag{2.2}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L\cos(\phi) \\ 0 & L\sin(\phi) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Metrik

$$G = Jt.J$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & L\cos(\phi) \\ L\cos(\phi) & L^2\cos(\phi)^2 + L^2\sin(\phi)^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.3)}$$

Inverse Metrik

$$Gi = \frac{1}{G} \quad \textbf{(2.4)}$$

$$Gi = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\cos(\phi)^2 - 2} & \frac{\cos(\phi)}{L\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} \\ \frac{\cos(\phi)}{L\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} & -\frac{2}{L^2\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.4)}$$

Geschwindigkeit-Impuls

$$\begin{bmatrix} m\left(\frac{\partial}{\partial t} x\right) \\ m\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi\right) \end{bmatrix} = Gi.\begin{bmatrix} p_x \\ p_\phi \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5)}$$

$$\begin{bmatrix} m\left(\frac{\partial}{\partial t} x\right) \\ m\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{p_x}{\cos(\phi)^2 - 2} + \frac{\cos(\phi)\, p_\phi}{L\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} \\ \frac{\cos(\phi)\, p_x}{L\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} - \frac{2\, p_\phi}{L^2\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5)}$$

3) Dynamik

kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{\begin{bmatrix} p_x & p_\phi \end{bmatrix}.Gi.\begin{bmatrix} p_x \\ p_\phi \end{bmatrix}}{m} \quad \textbf{(3.1)}$$

$$T = -\frac{1}{2}\,\frac{p_x^2}{m\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} + \frac{p_x\cos(\phi)\, p_\phi}{m\,L\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} - \frac{p_\phi^2}{m\,L^2\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} \quad \textbf{(3.1)}$$

Potential

$$V = -m\,g\,L\cos(\phi) \quad \textbf{(3.2)}$$

Hamilton-Funktion

$$H = T + V \quad \textbf{(3.3)}$$

$$H = -\frac{1}{2}\,\frac{p_x^2}{m\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} + \frac{p_x\cos(\phi)\, p_\phi}{m\,L\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} - \frac{p_\phi^2}{m\,L^2\left(\cos(\phi)^2 - 2\right)} - m\,g\,L\cos(\phi) \quad \textbf{(3.3)}$$

Trennung der Variablen

$$p_x = \left(\frac{1}{L} \left(\cos(\phi)\, p_\phi + \left(\cos(\phi)^2 p_\phi^2 - 2\, H\, m\, L^2 \cos(\phi)^2 + 4\, H\, m\, L^2 - 2\, p_\phi^2 - 2\, m^2\, g\, L^3 \cos(\phi)^3 + 4\, m^2\, g\, L^3 \cos(\phi) \right)^{1/2} \right), \frac{1}{L} \left(\cos(\phi)\, p_\phi - \left(\cos(\phi)^2 p_\phi^2 - 2\, H\, m\, L^2 \cos(\phi)^2 + 4\, H\, m\, L^2 - 2\, p_\phi^2 - 2\, m^2\, g\, L^3 \cos(\phi)^3 + 4\, m^2\, g\, L^3 \cos(\phi) \right)^{1/2} \right) \right) \tag{3.4}$$

also ist p_x eine Konstante der Bewegung

4) Winkelfreiheitsgrad für p_x=0

Hamilton-Funktion

$$H = -\frac{p_\phi^2}{m\, L^2 \left(\cos(\phi)^2 - 2 \right)} - m\, g\, L \cos(\phi) \tag{4.1}$$

Impuls

$$p_\phi = \sqrt{-L\, m^2\, g \cos(\phi)^3 + 2\, L\, m^2\, g \cos(\phi) - E\, m \cos(\phi)^2 + 2\, m\, E}\; L \tag{4.2}$$

Geschwindigkeit-Impuls

$$\begin{bmatrix} m \left(\frac{\partial}{\partial t}\, x \right) \\ m \left(\frac{\partial}{\partial t}\, \phi \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos(\phi)\, p_\phi}{L \left(\cos(\phi)^2 - 2 \right)} \\ -\dfrac{2\, p_\phi}{L^2 \left(\cos(\phi)^2 - 2 \right)} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Umkehrpunkte (p_phi=0)

$$E = -m\, g\, L \cos(\phi_0) \tag{4.4}$$

$$\phi_0 = \pi - \arccos\left(\frac{E}{m\, g\, L} \right) \tag{4.4}$$

Periode

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = -\frac{2\,p_\phi}{L^2\left(\cos(\phi)^2-2\right)m} \quad (4.5)$$

$$T = 2\left(\int_{-\phi_0}^{\phi_0} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial t}\phi}\,d\phi\right)$$

$$T = 2\left(\int_{-\pi+\arccos(0.9999)}^{\pi-\arccos(0.9999)} \left(-\frac{1}{2}\,\frac{\cos(\phi)^2-2}{\sqrt{-\cos(\phi)^3+2\cos(\phi)-0.9999\cos(\phi)^2+1.9998}}\right)d\phi\right)$$

$$T = 19.57 \quad (4.5)$$

5) Bewegungsgleichungen (p_x=0)

x-Koordinate

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{\cos(\phi(t))\,p_\phi(t)}{m\,L\left(\cos(\phi(t))^2-2\right)} \quad (5.1)$$

phi-Koordinate

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{2\,p_\phi(t)}{L^2\left(\cos(\phi(t))^2-2\right)m} \quad (5.2)$$

phi-Impuls

$$\frac{d}{dt}p_\phi(t) = -\left(\frac{\partial}{\partial\phi}H\right) \quad (5.3)$$

$$\frac{d}{dt}p_\phi(t) = -\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\left(-\frac{p_\phi^2}{m\,L^2\left(\cos(\phi)^2-2\right)} - m\,g\,L\cos(\phi)\right)\right)$$

$$\frac{d}{dt}p_\phi(t) = \frac{2\,p_\phi(t)^2\cos(\phi(t))\sin(\phi(t))}{m\,L^2\left(\cos(\phi(t))^2-2\right)^2} - m\,g\,L\sin(\phi(t)) \quad (5.3)$$

Gleichungssystem

$$\left[\frac{d}{dt}x(t) = \frac{\cos(\phi(t))\,p_\phi(t)}{\cos(\phi(t))^2-2}, \frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{2\,p_\phi(t)}{\cos(\phi(t))^2-2}, \frac{d}{dt}p_\phi(t) = \frac{2\,p_\phi(t)^2\cos(\phi(t))\sin(\phi(t))}{\left(\cos(\phi(t))^2-2\right)^2} - \sin(\phi(t)), x(0)=0, p_\phi(0)=0, \phi(0)=\pi \right. \quad (5.4)$$

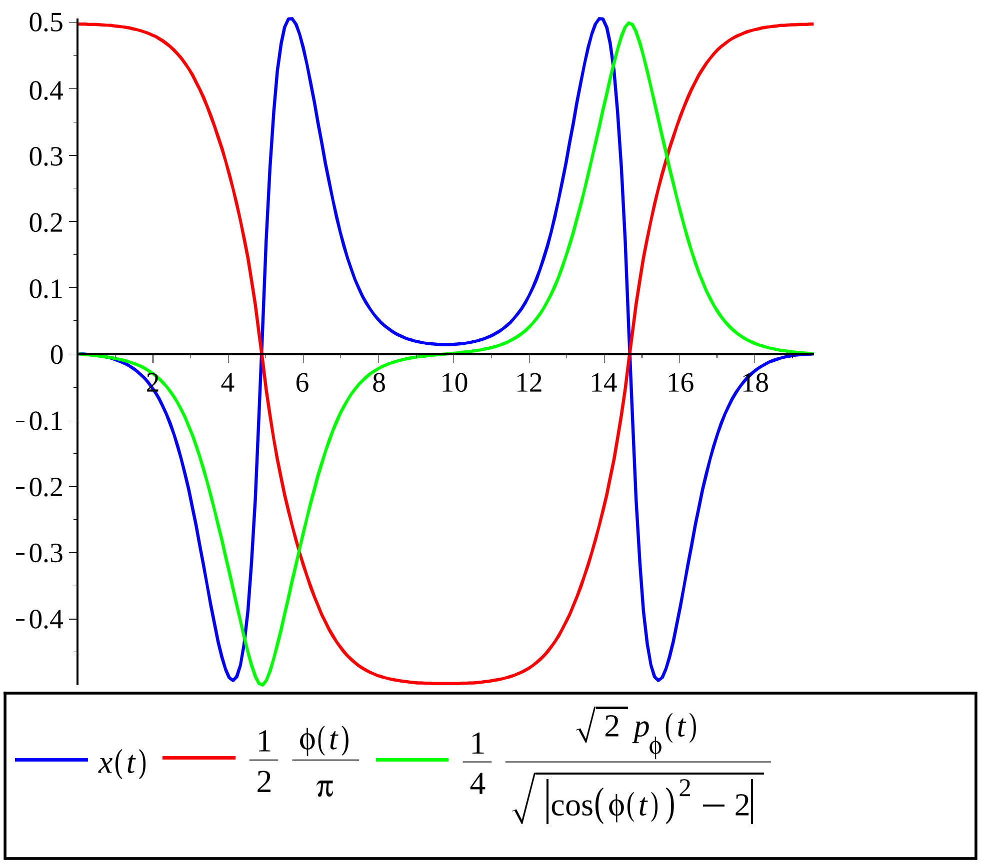
$$- \arccos(0.9999)$$

6) Graphische Darstellung

Kontravariantes Matrixelement

$$2 \left| \frac{1}{\cos(\phi(t))^2 - 2} \right| \quad \textbf{(6.1)}$$

Plot



7) Animation

$t = 0.$