Einfache Anwendungen aus der klassischen Mechanik

1. Schiefe Ebene

(1-1)

$$\text{Energie:} \quad E = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + V(\vec{r})$$

$$\text{Potential:} \quad V(\vec{r}) = mgy$$

Generalisierte Koordinaten

(1-2)

Generalisierte Koordinaten: $\vec{r} = \begin{pmatrix} s\cos(\alpha) \\ s\sin(\alpha) \end{pmatrix}$

Jacobi-Matrix: $J = \left(\frac{\partial \vec{r}}{ds}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

Metrik: $G = J^t J = 1$

Inverse Metrix. $G_i = G^{-1} = 1$

Energie und Bewegung

(1-3)

$$\text{Hamilton-Funktion:} \quad H = \frac{1}{2m}\underbrace{\vec{p}^{\,2}}_{p_s G_i p_s} + mg\sin(\alpha)s = \frac{1}{2m}p_s^2 + mg\sin(\alpha)s$$

$$\text{Bewegungsgl.:} \quad \begin{cases} m\dot{s} = \dfrac{\partial H}{\partial p_s} = p_s \\ \dot{p}_s = -\dfrac{\partial H}{\partial s} = -mg\sin(\alpha) \end{cases}$$

(1-4)

$$\text{Lösung:} \quad \begin{cases} p_s = p_0 - mg\sin(\alpha)t \\ s = s_0 + \overbrace{\dfrac{p_0}{m}}^{\equiv v_0} t - \dfrac{1}{2}\sin(\alpha)gt^2 \end{cases}$$

$$\text{Bahnkurve:} \quad \vec{r}(t) = \left(s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\sin(\alpha)gt^2\right)\begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

2. Freier Fall

(2-1)

$$\text{Energie:} \quad E = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + V(\vec{r})$$

$$\text{Potential:} \quad V(\vec{r}) = mgy$$

Koordinaten

(2-2)

$$\text{Koordinaten:} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{Metrik:} \quad G = G_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bewegungsgleichungen

(2-3)

$$\text{Hamilton-F.:} \quad H = \frac{1}{2m}(p_x, p_y) G_i \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + mgy = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + mgy$$

$$\text{x-Richtung:} \quad m\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \rightarrow \quad p_x \text{ konstant}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{p_x}{m} t, \quad x_0, p_x \text{ konstant}$$

$$\text{y-Richtung:} \quad m\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -mg, \quad p_y = p_{y0} + mgt$$

$$y(t) = y_0 + \frac{p_{y0}}{m} t + \frac{1}{2} g t^2, \quad y_{0,} p_{y0} \text{ konstant}$$

$$\text{Bahnkurve:} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{p_x}{m} t \\ y_0 + \frac{p_{y0}}{m} t + \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

3. Kepler-Problem

(3-1)

$$\text{Energie:} \quad E = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + V(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r}$$

Generalisierte Koordinaten

(3-2)

$$\text{Generalisierte Koordinaten:} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\text{Jacobi-Matrix:} \quad J = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\text{Metrik:} \quad G = (g_{ij}) = J^t J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Inverse Metrik:} \quad G_i = (g^{ij}) = G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

Dynamik

(3-3)

$$\text{Hamilton-Funktion:} \quad H = \frac{1}{2m}(p_r, p_\varphi) G_i \begin{pmatrix} p_r \\ p_\varphi \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{\alpha}{r}$$

Trennung der Variablen

(3-4)

$$\text{Energie:} \quad E = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{\alpha}{r}$$

$$\text{Trennung:} \quad \underbrace{p_\varphi}_{\substack{\text{keine Funktion} \\ \text{von } r,\, p_r}} = \pm \underbrace{\sqrt{2mr^2 E + \alpha r - r^2 p_r^2}}_{\substack{\text{keine Funktion} \\ \text{von } \varphi,\, p_\varphi}} = const$$

Drehimpuls

(3-5)

$$\text{Impuls auf Bahnkurve:} \quad m\dot{q}^i = g^{ij} p_j$$

$$\text{also:} \quad m\dot{\varphi} = \underbrace{g^{\varphi r}}_{0} p_r + \underbrace{g^{\varphi\varphi}}_{\frac{1}{r^2}} p_\varphi$$

$$\text{d.h.:} \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{mr^2} p_\varphi$$

Keplerscher Flächensatz

(3-6)

$$\text{Impuls auf Bahnkurve:}\quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = const$$

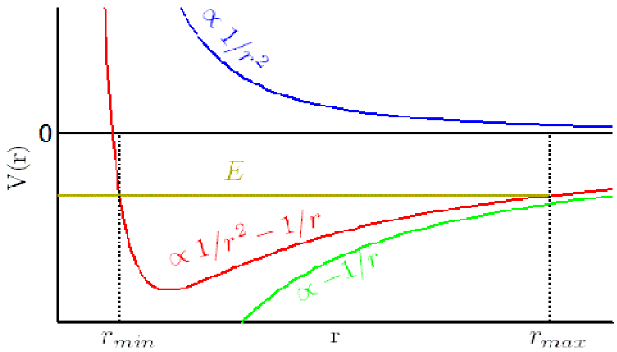
$$\text{Überstrichene Fläche:}\quad dA = \frac{1}{2} r \underbrace{dl}_{rd\varphi} = \frac{1}{2} r^2 d\varphi = const$$

Effektives Potential

Da der Winkelimpuls konstant ist, kann das Problem als eindimensionales radiales Problem mit einem effektiven Potential behandelt werden.

(3-7)

$$\text{Energie:}\quad E = \frac{1}{2m} p_r^2 + \underbrace{\frac{1}{2mr^2} p_\varphi^2 - \frac{\alpha}{r}}_{V_{eff}}$$



Die Umkehrpunkte r_{min} und r_{max} können als Nullstellen des Radialimpulses p_r berechnet werden.

Periodendauer - Umlaufzeit

(3-8)

$$\text{Umlaufzeit:}\quad T = 2\int_{t(r_{\min})}^{t(r_{\max})} dt = 2\int_{t(r_{\min})}^{t(r_{\max})} \frac{m\dot{r}}{p_r} dt = 2m\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{p_r} dr$$

$$= 2m\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{\sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2mr^2} p_\varphi^2 + \frac{\alpha}{r}\right)}} dr$$

Winkel – Radius

(3-9)

$$\varphi-\varphi_0=\int\dot{\varphi}dt=\int\overbrace{\frac{p_\varphi}{mr^2}}^{\dot{\varphi}}\overbrace{\frac{m\dot{r}}{p_r}}^{=1}dt=\int\frac{p_\varphi}{r^2}\frac{1}{p_r}dr=\int\frac{p_\varphi}{r^2\sqrt{2m\left(H-\frac{1}{2mr^2}p_\varphi^2+\frac{\alpha}{r}\right)}}dr$$

$$=\int\frac{1}{r^2\sqrt{\left(\frac{2mE}{p_\varphi^2}+\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2 r}-\frac{1}{r^2}\right)}}dr\underbrace{=}_{\substack{u=\frac{1}{r}\\ du=-\frac{1}{r^2}dr}}-\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2mE}{p_\varphi^2}+\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}u-u^2\right)}}du$$

$$=\arccos\left(\frac{-2u+\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}}{\sqrt{\left(\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2+4\frac{2mE}{p_\varphi^2}}}\right)$$

oder: $$\frac{-2u+\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}}{\sqrt{\left(\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2+4\frac{2mE}{p_\varphi^2}}}=\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)$$

Rücktransformation auf die Radialkoordinate *r:*

(3-10)

Also: $$u=\frac{1}{r}=\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}-\sqrt{\left(\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2+\frac{2mE}{p_\varphi^2}}\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)=\underbrace{\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}}_{\frac{1}{p}}\left(1+\underbrace{\sqrt{1+\frac{2p_\varphi^2E}{m\alpha^2}}}_{\varepsilon}\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}\left(1+\varepsilon\right)\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)$$

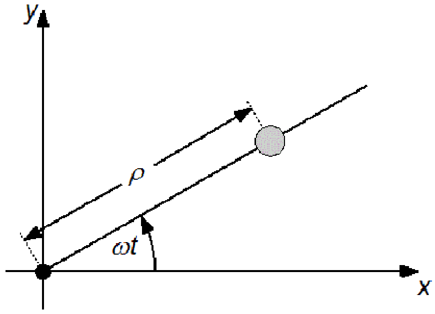
$$r=p\frac{1}{1+\varepsilon\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)}$$

4. Rheonome Zwangsbedingungen

Perle

Eine Perle gleitet auf einem geraden Draht, der mit einer Winkelgeschwindigkeit ω in der *x*-*y*-Ebene rotiert.

Zur Zeit $t=0$ befindet sie sich bei $\rho(0)=\rho_0$ in Ruhe.



Koordinaten

(4-1)

Generalisierte Koordinaten: $\vec{r}=\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\end{pmatrix}$

Grundvektoren: $\vec{g}^{\rho}=\dfrac{\partial\vec{r}}{d\rho}=\cos\varphi\hat{e}_x+\sin\varphi\hat{e}_y$

$\vec{g}^{\varphi}=\dfrac{\partial\vec{r}}{d\varphi}=-\rho\sin\varphi\hat{e}_x+\rho\cos\varphi\hat{e}_y$

Jacobi-Matrix: $J=\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\rho},\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}$

Metrik: $G=\left(g_{ij}\right)=J^{t}J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho^2\end{pmatrix}$

Inverse Metrik $G_i=\left(g^{ij}\right)=G^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho^{-2}\end{pmatrix}$

Rheonome Zwangsbedingung

(4-2)

Hamilton-Funktion: $H=\dfrac{1}{2m}\left(p_\rho,p_\varphi\right)G_i\begin{pmatrix}p_\rho\\ p_\varphi\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\dfrac{1}{\rho^2}p_\varphi^2\right)$

φ-Impuls: $\dot{\varphi}=\dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\dfrac{1}{m\rho^2}p_\varphi$

Rheonome Zwangsbed.: $\dot{\varphi}=\omega$

also: $p_\varphi=m\rho^2\omega$

Elimination des Freiheitsgrades

(4-3)

Wirkungsdifferential: $$dS = \left(p_\rho \dot{\rho} + \underbrace{p_\varphi \omega - \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 \right)}_{\equiv E_\rho} \right) dt$$

Hamilton-Funktion: $$H_\rho = \frac{1}{2m} p_\rho^2 + \frac{1}{2m\rho^2}\left(m\rho^2 \omega \right) - m\rho^2\omega^2 = \frac{1}{2m} p_\rho^2 - \frac{m}{2}\rho^2\omega^2$$

Bewegungsgleichungen

(4-4)

HG: $$\begin{cases} m\dot{\rho} = m\dfrac{\partial H_\rho}{\partial p_\rho} = p_\rho \\ \dot{p}_\rho = -\dfrac{\partial H_\rho}{\partial \rho} = m\rho\omega^2 \end{cases}$$

DGL: $\ddot{\rho} = \omega^2 \rho$

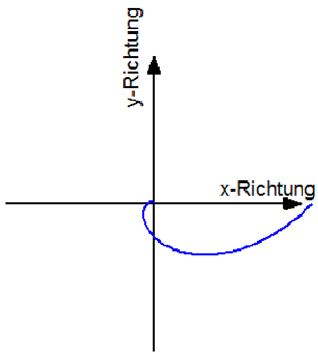
Lösung

(4-5)

Allgemeine Lösung: $\rho = ae^{\omega t} + be^{-\omega t}$

Anfangswerte: $$\begin{cases} \rho(0) = \rho_0 = a + b \\ \dot{\rho}(0) = 0 = \omega(a - b) \end{cases} \quad \rightarrow \quad a = b = \frac{\rho_0}{2}$$

also: $$\rho = \rho_0 \frac{1}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t} \right) = \rho_0 \cosh(\omega t)$$



5. Harmonischer Oszillator mit Reibung

Zunächst geben wir die Energiefunktion an, die die Bewegungsgleichungen des HO mit Reibung hat. Dann wählen wir generalisierte Koordinaten, mit denen sich die Bewegungsgleichungen leicht lösen lassen.

(5-1)

Hamilton-Funktion: $H = \frac{1}{2m} p^2 e^{-2\gamma t} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 e^{2\gamma t}$

Bewegungsgleichungen: $\begin{cases} m\dot{q} = m\frac{\partial H}{\partial p} = pe^{-2\gamma t} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q e^{2\gamma t} \end{cases}$

also: $m\ddot{q} = -\underbrace{\dot{p}}_{m\omega^2 q e^{2\gamma t}} e^{-2\gamma t} - 2\gamma \underbrace{p}_{p=m\dot{q}e^{2\gamma t}} e^{-2\gamma t}$

also HO mit Reibung: $\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega^2 q = 0$

Generalisierten Koordinaten

(5-2)

Transformation: $q = Qe^{-\gamma t}$

Jacobi-Matrix: $J = \frac{\partial q}{\partial Q} = e^{-\gamma t}$

Metrik: $G = J^t \cdot J = e^{-2\gamma t}$

Inverse Metrik: $G_i = G^{-1} = e^{2\gamma t}$

Hamilton-Funktion

(5-3)

Wirkungsfeld: $dS = \underbrace{pdq}_{\substack{pd\left(Qe^{-\gamma t}\right) \\ = pe^{-\gamma t}dQ - pe^{-\gamma t}Q\gamma dt \\ = PdQ - \gamma PQdt}} - Edt = PdQ - \underbrace{\left(E + \gamma QP\right)}_{E_Q} dt$

Energiefeld: $E_Q = \frac{1}{2m} \underbrace{G_i}_{e^{2\gamma t}} P^2 e^{-2\gamma t} + \frac{m\omega^2}{2} \underbrace{G}_{e^{-2\gamma t}} Q^2 e^{2\gamma t} + \gamma QP$

$= \frac{1}{2m} P^2 + \frac{m\omega^2}{2} Q^2 + \gamma QP$

Bewegungsgleichung

(5-4)

Hamilton-Funktion: $$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}Q^2 + \gamma QP$$

Bewegungsgleichung: $$\begin{cases} m\dot{Q} = m\dfrac{\partial H}{\partial P} = P + \gamma m Q \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial H}{\partial Q} = -m\omega^2 Q - \gamma P \end{cases}$$

also: $$m\ddot{Q} = \dot{P} + \gamma m\dot{Q} = -m\omega^2 Q - \gamma P + \gamma\left(P + \gamma m Q\right)$$
$$= -m\underbrace{\left(\omega^2 - \gamma^2\right)}_{\equiv\Omega^2}Q$$

Lösung: $$Q(t) = Q_0 \sin\left(\Omega t + \varphi\right)$$
$$q(t) = Q_0 \sin\left(\Omega t + \varphi\right)e^{-\gamma t}$$

Probe

(5-5)

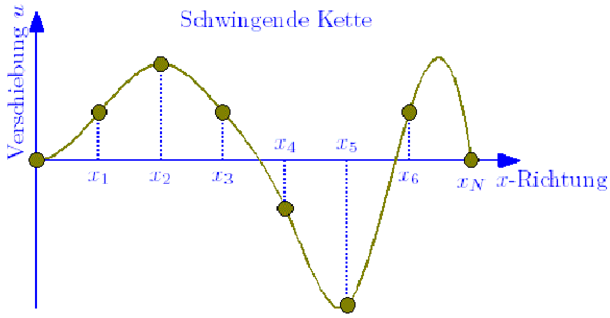
Bewegungsgleichung: $$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega^2 q = 0$$

Lösung: $$q = Q_0 \sin\left(\Omega t + \varphi\right)e^{-\gamma t}$$

Ableitungen: $$\begin{cases} \dot{q} = \Omega Q_0 \cos\left(\omega t + \varphi\right)e^{-\gamma t} - \gamma q \\ \ddot{q} = -\underbrace{\Omega^2}_{\omega^2-\gamma^2} q - \gamma\Omega Q_0 \cos\left(\Omega t + \varphi\right)e^{-\gamma t} - \gamma\dot{q} \end{cases}$$

Lösung $\rightarrow$ Bew.Gl.: $$\overbrace{\left(-\left(\cancel{\omega^2} - \cancel{\gamma^2}\right)q - \cancel{\gamma\Omega Q_0 \cos\left(\Omega t + \varphi\right)e^{-\gamma t}} - \cancel{\gamma\dot{q}}\right)}^{\ddot{q}}$$
$$+\overbrace{\left(\cancel{\gamma\dot{q}} + \cancel{\gamma\Omega Q_0 \cos\left(\Omega t + \varphi\right)e^{-\gamma t}} - \cancel{\gamma^2 q}\right)}^{2\gamma\dot{q}} + \cancel{\omega^2 q} = 0$$

6. Reibungsfrei schwingende Kette



Diskret

Verschiebung und Potential

(6-1)

Position eines Kettenteils auf der x-Achse: $x^j = \frac{j}{N}$

Verschiebung bei x_j in y-Richtung: $u^j \equiv u\left(x^j, t\right)$

Potential: $V = \frac{\eta}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left(u^{j+1} - u^j\right)^2$

Randbedingung: $u^0 = u^N = 0$

Vollständiges Orthonormalsystem

(6-2)

Basis: $b_\kappa^j = \sqrt{\frac{2}{N}}\sin\left(\frac{j\kappa\pi}{N}\right), \quad j, \kappa \in 1..N$

Orthogonalität: $\sum_{\kappa=1}^{N} b_\kappa^j b_\kappa^l = \delta^{jl}$

Vollständigkeit: $\sum_{j=1}^{N} b_\kappa^j b_\lambda^j = \delta_{\kappa\lambda}$

Generalisierte Koordinaten

(6-3)

Generalisierte Koord.: $\vec{u} \equiv u^i \hat{e}_i = Q^\kappa b_\kappa^i \hat{e}_i$

Grundvektoren: $\vec{g}_\lambda = \frac{\partial \vec{u}}{\partial Q^\lambda} = b_\lambda^i \hat{e}_i$

Jacobi-Matrix: $J = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial Q^\lambda}\right) = \left(b_\lambda^i\right)$

Metrik: $G = J^t J = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = G_i$

Energie

(6-4)

Kinetisch: $T = \frac{\vec{P}^2}{2m} = \frac{1}{2m} P_\kappa P_\lambda$

(6-5)

Nebenrechungen: $$\sum_{j=0}^{N-1}\left(u^{j+1}\right)^2=\sum_{j=1}^{N}\left(u^{j}\right)^2=Q^\kappa Q^\lambda\underbrace{\sum_{j=1}^{N}b_\kappa^j b_\lambda^j}_{\delta_{\kappa\lambda}}=g_{\kappa\lambda}Q^\kappa Q^\lambda$$

$$b_\lambda^{j+1}=\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\left(\frac{j\kappa\pi}{N}+\frac{\kappa\pi}{N}\right)=b_\lambda^j\cos\left(\frac{\kappa\pi}{N}\right)+b_\lambda^1\cos\left(\frac{j\kappa\pi}{N}\right)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}u^j u^{j+1}=\sum_{j=0}^{N-1}Q^\kappa Q^\lambda b_\kappa^j b_\lambda^{j+1}$$

$$=Q^\kappa Q^\lambda\left(\cos\left(\frac{\kappa\pi}{N}\right)\underbrace{\sum_{j=1}^{N}b_\kappa^j b_\lambda^j}_{\delta_{\kappa\delta}}+b_\lambda^1\underbrace{\sum_{j=1}^{N}b_\kappa^j\cos\left(\frac{j\kappa\pi}{N}\right)}_{=0}\right)$$

$$=\sum_\kappa\cos\left(\frac{\kappa\pi}{N}\right)\delta_{\kappa\lambda}Q^\kappa Q^\lambda$$

(6-6)

Potentielle Energie: $$V=\frac{\eta}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left(u_{j+1}-u_j\right)^2=\frac{\eta}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\left(u^{j+1}\right)^2-2u^{j+1}u^j+\left(u^j\right)^2\right)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}K_{\kappa\lambda}}_{\equiv\eta\left(1+\cos\left(\frac{\kappa\pi}{N}\right)\right)g_{\kappa\lambda}}Q^\kappa Q^\lambda$$

(6-7)

Gesamtenergie: $$E=\frac{P_\kappa P_\lambda}{2m}+\frac{1}{2}K_{\kappa\lambda}Q^\kappa Q^\lambda$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

(6-8)

Hamilton-Funktion: $$H=\frac{P_\kappa P_\lambda}{2m}+\frac{1}{2}K_{\kappa\lambda}Q^\kappa Q^\lambda$$

Hamiltonsche Bew.Gl: $$\begin{cases} m\dot{Q}^\kappa=m\dfrac{\partial E}{\partial P_\kappa}=P_\kappa \\ \dot{P}_\kappa=-\dfrac{\partial E}{\partial Q^\kappa}=K_{\kappa\lambda}Q^\lambda=\eta\left(1+\cos\left(\dfrac{\kappa\pi}{N}\right)\right)Q^\kappa \end{cases}$$

Bewegungsgl.: $$m\ddot{Q}^\kappa=g^{\kappa\lambda}\dot{P}_\lambda=\eta\left(1+\cos\left(\frac{\kappa\pi}{N}\right)\right)Q^\kappa$$

Lösung: $$Q^\kappa\propto\cos\left(\omega^\kappa\left(t-t_0\right)\right),\quad \text{mit }\underbrace{\omega^\kappa=\sqrt{\frac{\eta\left(1+\cos\left(\frac{\kappa\pi}{N}\right)\right)}{m}}}_{\substack{\text{irrationale Frequenzverhältnisse!}\\ \text{quasiperiodisch}}}$$

Kontinuierliches System

(6-9)

Verschiebung senkrecht zur x-Achse: $u(x), \quad u(0)=u(1)=0$

Potential:
$$V=\frac{\eta}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(u_{i+1}-u_i\right)^2=\frac{\eta\Delta x}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}\right)^2\Delta x$$
$$\to \underbrace{\frac{\tilde{\eta}}{2}}_{\tilde{\eta}=\eta\Delta x}\int\left(\vec{\nabla}u\right)^2 dx=-\frac{\tilde{\eta}}{2}\int u\Delta u dx$$

Basis

(6-10)

Basis: $b_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx), \quad k=1..\infty, \quad x\in[0,\pi]$

Orthonormalität: $\int_0^\pi b_k(x)b_k(x)dx=\delta_{kk'}$

Vollständigkeit: $\sum_k b_k(x)b_k(x')=\delta(x-x')$

Generalisierte Koordinaten

(6-11)

Generalisiert Koordinate: $u(x,t)=Q^k(t)b_k(x)$

Grundvektoren: $g_k(x)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial Q^k}=b_k(x)$

Metrik: $g_{kl}=\int_0^\pi g_k(x)g_l(x)dx=\delta_{kl}$

Kontravariante GV: $\int_0^\pi g^k(x)g_l(x)dx=\delta_l^k$

also: $g^k(x)=g_k(x)$

Energie

(6-12)

Kinetische Energie: $\frac{\vec{p}^2}{2m}=\frac{1}{2m}\int P_k g^k(x)P_l g^l(x)dx=\frac{1}{2m}\delta^{kl}P_kP_l$

Potentiell Energie: $V=-\frac{\tilde{\eta}}{2}\int u\Delta u dx=-\frac{\tilde{\eta}}{2}\int\left(Q^k g_k(x)\right)\underbrace{\Delta\left(Q^l g_l(x)\right)}_{-l^2Q^l g_l(x)}dx$
$$=\frac{1}{2}K_{kl}^2Q^kQ^l, \quad \text{mit } K_{kl}^2=\tilde{\eta}k^2\delta_{kl}$$

Energiefeld: $E=\frac{1}{2m}\delta^{kl}P_kP+\frac{1}{2}K_{kl}^2Q^kQ^l, \quad (\text{wie im Diskreten})$

Lösung

(6-13)

Bahnkurven: $Q^k \propto \cos\left(\omega^k\left(t-t_0\right)\right), \quad \text{mit} \quad \underbrace{\omega^k = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\eta}}{m}}k}_{\substack{\text{irrationale Frequenzverhältnisse!} \\ \text{quasiperiodisch}}}$