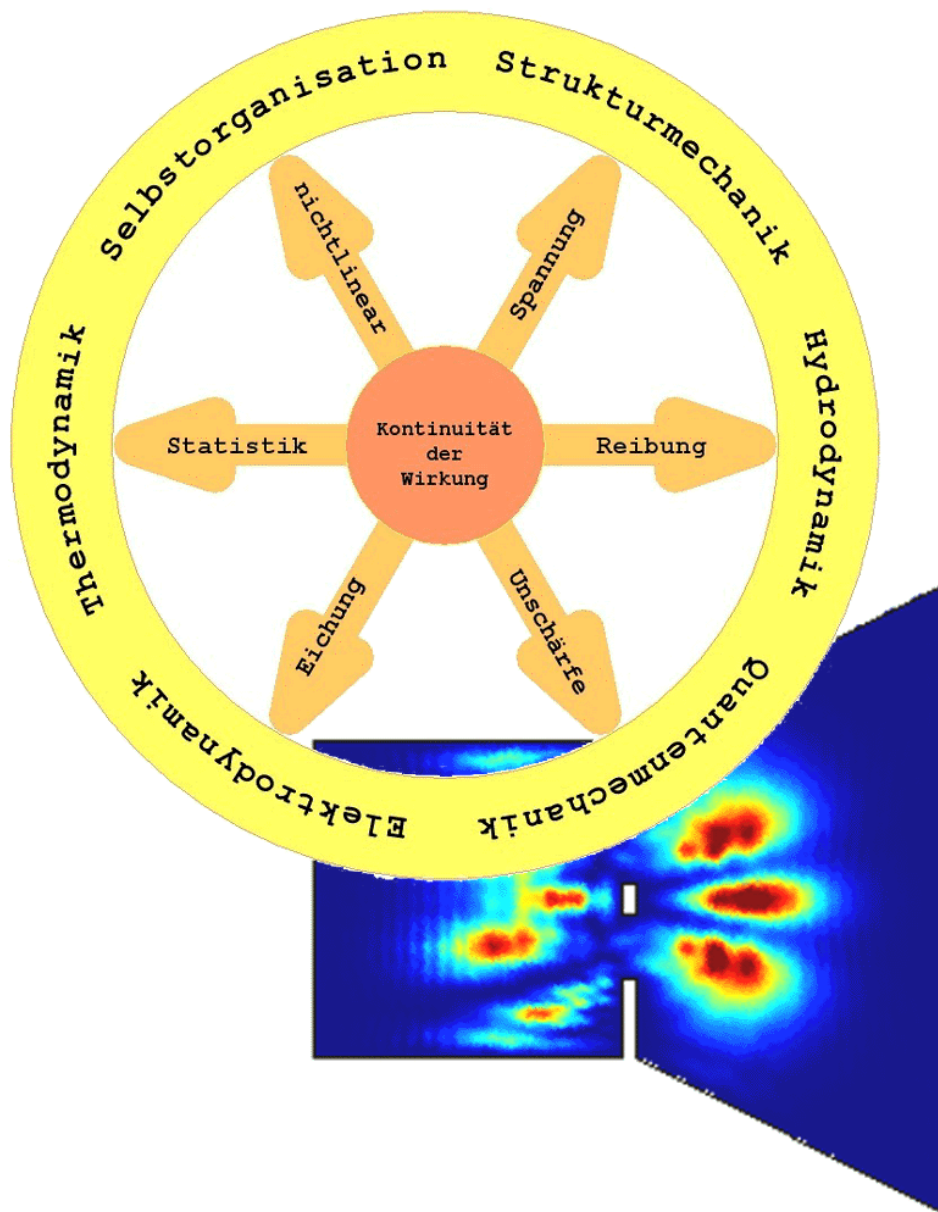


# Die ganzheitliche Physik

*Die einheitliche Begründung ihrer Grundgesetze mit objektiver Kausalität  
und ihre einheitliche Behandlung mit dem Computerprogramm FEMLAB*





In diesem Buch geht es natürlich darum, die Physik selber zu verstehen, das ist ganz wichtig. Darüber hinaus geht es aber auch noch um anderes. Warum sind die physikalischen Gesetze denn überhaupt so wie sie sind? Und wie kann beides, nämlich die physikalischen Inhalte und ihren Grund anschaulich und ohne unnötige Komplikationen vermittelt werden?



# Dank

Wie die Wirkungsfunktion mathematisch definiert ist, oder wie man das Hamiltonsche Prinzip anwendet, lernt jeder Physiker. In den letzten Jahren durfte ich darüber hinaus erfahren, wie tiefeschürfend der Begriff 'Wirkung' weit über seine physikalische Bedeutung hinaus ist. Ich durfte auch verstehen, warum das Hamiltonsche Prinzip überhaupt gilt und vieles andere.

Dafür habe ich vielen zu danken.

Ganz wichtig waren sicher meine Studenten. Ihr noch ungeprägtes, freies Denken und ihre unbeugsame Beharrlichkeit, die manchmal gar nicht so leicht zu ertragen ist, haben mich weit über die Physik hinaus geführt.

Ganz wichtig war auch die Aufmerksamkeit und Hilfe von Kollegen wie Prof. Erich Körber und Prof. Otto E. Rössler.

Die FEMLAB GmbH, und vor allem ihr Geschäftsführer, Dr. Bernhard Fluche, haben mich sehr bei der Umsetzung der theoretischen Grundlagen in Praktika und in Übungen mit FEMLAB unterstützt.

Meine Frau Angelika hat mit großem Enthusiasmus die wichtige Aufgabe des Korrekturlesens übernommen.

Allen erwähnten und unerwähnten danke ich von ganzem Herzen.

Tübingen, im November 2005

*Kurt Bräuer*



# Inhalt

<b>Dank.....</b>	<b><i>i</i></b>
<b>Inhalt.....</b>	<b><i>iii</i></b>
<b>Prolog .....</b>	<b><i>v</i></b>
<b>1.    <i>Raum, Zeit und Kraft</i>.....</b>	<b><i>1</i></b>
<b>2.    <i>Wirkungen</i> .....</b>	<b><i>13</i></b>
<b>3.    <i>Klassische Mechanik und elastische Festkörper</i>.....</b>	<b><i>35</i></b>
<b>4.    <i>Kontinuität als umfassende Grundlage der Physik</i> .....</b>	<b><i>49</i></b>
<b>5.    <i>Hydrodynamik</i>.....</b>	<b><i>57</i></b>
<b>6.    <i>Quantenmechanik</i>.....</b>	<b><i>67</i></b>
<b>7.    <i>Relativität</i>.....</b>	<b><i>93</i></b>
<b>8.    <i>Elektrodynamik</i> .....</b>	<b><i>107</i></b>
<b>9.    <i>Selbstorganisation und Morphogenese</i>.....</b>	<b><i>125</i></b>
<b>10.   <i>Anhang: Die Methode der Finiten Elemente</i>.....</b>	<b><i>143</i></b>
<b>11.   <i>Referenzen</i> .....</b>	<b><i>161</i></b>
<b>12.   <i>Index</i> .....</b>	<b><i>163</i></b>



# Prolog

## Die Grundlagen der Physik

### *Messen*

Eine wesentliche Grundlage der Physik sind Messungen. Primär misst man Abstände, Zeiten und Kräfte. Daraus können dann auch andere Größen abgeleitet werden wie Geschwindigkeiten, Energien oder Temperaturen. Auch andere stoffliche Veränderungen wie die Schwärzungen von Photoplatten oder Farbänderungen bei glühenden Metallen können quantitativ erfasst werden.

### *Gesetzmäßigkeiten beschreiben*

Das Wesentliche der Physik besteht darin, die Gesetzmäßigkeiten, die den messbaren Größen zugrunde liegen, aufzudecken und zu beschreiben.

Eine sehr wichtige Gesetzmäßigkeit ist die Trägheit der Materie. Materie ändert ihren Bewegungszustand nicht ohne Grund. Nur wenn Kräfte auf sie einwirken, ändert sie ihren Zustand, zum Beispiel ihre Bewegung. Das ist die Grundlage der Mechanik und wird zum Beispiel in den berühmten Newtonschen Axiomen formuliert.

Andere Gesetzmäßigkeiten beruhen nicht auf materiellen oder trägen Zusammenhängen. Diese äußern sich zum Beispiel in Lichtphänomenen oder in der bekannten Wirkung von Magneten auf Eisenspäne. Solche Kraftwirkungen werden mit Hilfe von elektromagnetischen Feldern beschrieben. Sie sind in allen Bereichen der unbelebten und der belebten Natur wichtig, zum Beispiel bei der Bildung atomarer Strukturen, bei chemischen Reaktionen, bei der Funktion von Computern oder der Telekommunikation. Alle biologischen Phänomene, etwa beim Körperstoffwechsel, der Steuerung des Herzschlages oder bei den Gehirnfunktionen beruhen wesentlich auf der Elektrodynamik.

Eine ganz andere Art von physikalischer Gesetzmäßigkeit liegt der Schwerkraft zugrunde. Sie lässt sich als Eigenheit eines gekrümmten Raumes verstehen. Da sich träge und die schwere Masse in Messungen als identisch erweisen, kann rein mathematisch die schwere Masse auf Massenträgheit in einem gekrümmten Raum zurückgeführt werden. Schwere wird als Trägheit erfasst.

Die Gesetzmäßigkeit von Wärme lässt sich als statistisches Phänomen unzähliger mikroskopischer Freiheitsgrade der Materie begründen. Diese unzählbaren mikroskopischen Freiheitsgrade können verschiedene makroskopische Phänomene hervorrufen. Dabei führen verschiedene Kombinationen mikroskopischer Freiheitsgrade zu identischen makroskopischen Phänomenen. Mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit erscheint immer das makroskopische Phänomen, das mit den meisten Kombinationen mikroskopischer Freiheitsgrade verknüpft ist. So ist es einfach sehr wahrscheinlich, dass die ungestörte Bewegungsenergie der mikroskopischen Freiheitsgrade gleichmäßig auf alle Raumbereiche verteilt ist und daraus folgt, dass die Temperatur eines Gases im Gleichgewicht dann an jedem Raumpunkt dieselbe ist und einen ganz bestimmten Wert hat.

## Physik und Weltbild

Die Erkenntnisse der Physik haben unser Weltbild fundamental geprägt. Die Welt erscheint uns heute in erste Linie als Raum, der mit Materie erfüllt ist. Diese unterliegt wiederum einer beständigen Veränderung. Wir identifizieren die Welt mit Raum und Materie. Wir kennen die physikalischen Gesetze, denen die Materie unterliegt und damit erscheint uns die Entwicklung der Welt im Großen und Ganzen als berechenbar.

Wir erleben uns als in diesen Raum hineingeboren, wir erleiden oder genießen unser Leben, und wir verschwinden früher oder später wieder aus diesem Raum auf Nimmerwiedersehen.

### *Naiver Realismus und moderne Physik*

Als so genannte naive Realisten gehen wir ganz selbstverständlich davon aus, dass die Welt tatsächlich so ist, wie sie uns erscheint, nämlich als mit Materie erfülltes Raumgebilde.

Die meisten Philosophen haben es jedoch aufgegeben, zu beweisen, dass die Welt tatsächlich so ist, wie sie uns erscheint. Es erweist sich als unmöglich, sich auf die Welt als Solche zu beziehen. Wir können immer nur Aussagen machen über unsere Bewusstseinsinhalte und keine über eine Welt, die in irgendeiner Form unabhängig von uns existiert. In der modernen Physik äußert sich das sehr dramatisch.

Misst man die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen, so findet sich jeder Beobachter im Zentrum eines so genannten Lichtkegels. Man meint damit, dass sich ein Lichtsignal um jeden Beobachter auf einer immer größer werdenden Kugeloberfläche ausbreitet. Der Beobachter findet sich im Zentrum dieser Kugel. Das ist selbst dann so, wenn sich zwei Beobachter relativ zueinander bewegen und dasselbe Lichtsignal beobachten.

So etwas ist natürlich nicht möglich, wenn sich beide Beobachter in einem absoluten, beiden gemeinsamen Raum befinden. In einem solchen Raum hat jede Kugel genau einen Mittelpunkt, es könnte sich entweder nur einer der Beobachter in diesem Zentrum finden oder die Beobachter könnten sich nicht von einer gemeinsamen Position entfernen. Im Experiment findet sich jedoch jeder Beobachter im Zentrum einer solchen Lichtausbreitungskugel, auch wenn er sich relativ zu einem anderen bewegt.

Das kann nur bedeuten, dass Raum und Zeit keine eigenständige, vom Beobachter unabhängige Existenz haben, sondern ausschließlich Beziehungen zwischen Bewusstseinsinhalten sind. Raum ist Bewusstseinsraum und Zeit ist Bewusstseinszeit. Wir glauben, in einem absoluten Raum und einer absoluten Zeit zu existieren, diese kann aber so nicht stimmen.

Atome erscheinen je nach Versuchsanordnung als Punktladungen oder als Energieschalen. Ihre Erscheinungsform ist kontextabhängig. Ohne genaue Bezeichnung der Versuchsanordnung macht es keinen Sinn, über Atome zu sprechen. Das haben die Urväter der Quantenmechanik sehr deutlich zum Ausdruck gebracht. Atome sind keine Objekte, auch keine Quantenobjekte. Sie haben keine eigenständige Existenz, sie erscheinen erst im Zusammenhang mit sehr ausgefeilten Versuchsanordnungen. Genau genommen sind Atome Aspekte der durch die Versuchsanordnung hervorgerufenen Phänomene.

Wir halten die Atome für die absolute Grundlage unserer materiellen Existenz. Aber diese Grundlage löst sich bei genauerer Untersuchung auf. Atome werden zur Erscheinung, so wie ein Regenbogen, der sehr materiell und greifbar erscheint, dem man sich aber nicht nähern und den man auch nicht fassen kann.

Die Welt erstrahlt in ihren Regenbogenfarben nur im Zusammenhang mit unseren Augen und unserem Gehirn, das die Sinneseindrücke verarbeitet. Goethe formulierte das in seinem Entwurf einer Farbenlehre von 1810 so:

*Wär' nicht das Auge sonnenhaft,  
Wie könnten wir das Licht erblicken?  
Lebt' nicht in uns des Gottes eigne Kraft,  
Wie könnt' uns Göttliches entzücken?*

Dass wir die Welt so erleben, wie wir sie erleben, liegt nicht daran, dass die Welt eben so ist, sondern ganz wesentlich auch daran, dass wir eben so sind, wie wir sind.

Unser Gehirn ist sehr komplex und raffiniert, aber es ist relativ langsam. Zur Verarbeitung eines Sinneseindrucks braucht es fast eine Sekunde. Dazu hat der amerikanische Neurophysiologe Benjamin Libet sehr aufregende Experimente durchgeführt [LIBE91], [NORR97]. Nach einer Berührung am Finger kommt es zu einer ganzen Menge neuronaler Aktivitäten im Gehirn. Unter anderem wird

unmittelbar nach dem Hautkontakt im Gehirn eine Zeitmarke gesetzt. Die Nervenimpulse werden weiter verarbeitet und das führt letztlich zu dem bekannten bewussten Erleben der Berührung. Der ganze Vorgang dauert jedoch fast eine ganze Sekunde.

Die zeitliche Zuordnung der Berührung zu anderen Erlebnisinhalten erfolgt anhand der Zeitmarke, die wenige Millisekunden nach dem Kontakt gesetzt wurde. So erscheint uns alles in einem in sich stimmigen, zeitlichen Kontext. Es ist nur sehr verwirrend, dass die neuronale Aufbereitung der Sinneswahrnehmung fast eine Sekunde benötigt und dass wir das nicht merken, sondern den Eindruck haben, aller Sinneseindrücke unmittelbar bewusst zu werden. Das Bewusstseinsphänomen kann jedoch noch fast eine Sekunde nach dem Kontakt durch Störimpulse auf das Gehirn unterbunden werden.

Diese physiologischen Forschungsergebnisse sind, wie die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik, kaum zu bereifen. Sie bedeuten letztendlich, dass unser bewusstes Erleben der Wirklichkeit etwa eine Sekunde hinter dem eigentlichen Weltgeschehen hinterherhinken müsste, so es dieses eigentliche Geschehen als direkte Grundlage unseres bewussten Welterlebens überhaupt gäbe. Sie führen uns recht brutal vor Augen, dass ein naiver Realismus nicht haltbar ist. Wir täuschen uns über das Wesen unserer Existenz.

Es erscheint angebracht, sich mit den Grundlagen unserer bewussten Welterfahrung auseinander zu setzen und die Wurzeln der physikalischen Zusammenhänge aufzuspüren. Das sollte unter anderem auch ein besseres Verständnis der Physik und ihre bessere Einordnung in ein umfassenderes Weltbild ermöglichen.

## **Die Objektivität unserer bewussten Welterfahrung**

Bewusstsein beruht auf Wissen, auf Erkennen, auf Identifikation von Sinneseindrücken mit Gedächtnisinhalten. Und Gedächtnis oder Informationsspeicher ist immer beschränkt.

Damit wir die Welt bewusst erleben können, muss sie durch einzelne Exzerpte oder Auszüge dargestellt werden. Diese erscheinen im Bewusstsein räumlich angeordnet in einem in sich geschlossenen Bild.

Da die Bildung der Exzerpte oder Wirklichkeitsauszüge durch Erkennen, also durch Identifikation mit Gedächtnisinhalten erfolgt, sind die Exzerpte mehr oder weniger kontextunabhängig. Sie haben bestimmte, meist wenige Eigenschaften. Die Art des Erkennens und das ihm zugrunde liegende Gedächtnis ist Folge unserer kollektiven kulturellen Entwicklung, und daher erscheinen die Objekte auch allen Beobachtern mehr oder weniger gleich. Das objektive Erscheinen der Welt ist eine Konsequenz unserer bewussten Welterfahrung, wie sie sich in den letzten Jahrtausenden entwickelt hat. Die Objekte erscheinen

nebeneinander, hintereinander oder übereinander angeordnet. Raum ist die Beziehung zwischen den objektiven Bewusstseinsinhalten.

Der berühmte Begründer der Tiefenpsychologie und Entdecker des kollektiv Unbewussten C.G. Jung führt unsere bewusste Welterfahrung auf archetypische Strukturen in unserem kollektiv Unbewussten zurück. Archetypen sind unbewusste Anordner, die Weltinhalte so ordnen, dass sie uns bewusst werden können. Bekannte Beispiele dafür sind die Anima, der alte Weise oder der Schatten [JUNG52], [JACO87], [ATMA95]. Diese strukturieren unser psychisches Erleben. Andere Archetypen sind die natürlichen Zahlen, Raum oder auch Zeit [FRAN90]. Tiefenpsychologisch sind sie alle von derselben Natur.

Die archetypischen Strukturen haben sich im Laufe der Menschheitsgeschichte ausgeprägt. Sie sind mit unserer Individualität gewachsen. Damit verbunden ist das Erleben einer objektiven Welt in Zeit und Raum.

Ein Baum erscheint uns als Objekt. Wir haben einen klaren Begriff davon, was ein Baum ist und haben auch sofort eine konkrete Vorstellung von einem Baum vor unserem inneren Auge. Der Baum erscheint uns als ein Ding, das unabhängig von anderen Dingen und auch von uns als Beobachter in Zeit und Raum existiert. Bei sorgfältigerem Betrachten wird es jedoch schon schwierig zu sagen, wo der Baum anfängt und wo er aufhört.

Ab wann ist das Kohlendioxid, das der Baum aus der Luft aufnimmt, ein Teil von ihm und wann hört der Sauerstoff, den er abgibt, auf, zu ihm zu gehören. Das gleiche gilt für das Wasser und die Nährstoffe, die er mit dem Erdreich austauscht oder für die Energie, die er von der Sonne bezieht. Ein Baum ist untrennbar und unendlich fein mit dem Rest der Welt verwoben. Ihn als Objekt in Raum und Zeit zu erkennen, ist eine Art, die Welt zu erleben. Die Welt selber ist keine Ansammlung von Objekten in Raum und Zeit.

Auch unsere Mitmenschen erscheinen uns als Objekte in Raum und Zeit. Wir ordnen ihnen ganz bestimmte Eigenschaften zu. Und welche wir ihnen zuordnen, hat oft weniger mit den Betroffenen selbst zu tun als eher mit unserer ureigenen Art, unsere Mitmenschen zu sehen. Es gibt unzählige bekannte Beispiele dafür. Wir erleben Frauen anders als Männer und Fremde anders als Familienmitglieder, ganz unabhängig davon, mit welchen Menschen wir es tatsächlich zu tun haben. Es ist auch ganz natürlich, unseren Schatten, also unbewusste Aspekte unserer eigenen Psyche, mit denen wir uns nicht gerne selber identifizieren, auf unsere Mitmenschen projizieren. In unseren Mitmenschen erleben wir immer auch wesentliche Aspekte unserer eigenen Persönlichkeit. Dies führt sehr oft zu Missverständnissen, Verwirrung und zu Konflikten. Unser Leben wäre sicher um vieles einfacher, wenn wir das besser durchschauen könnten.

In der Physik wurde die Objektivierung der Weltinhalte auf die Spitze getrieben. Das Basisobjekt der Mechanik ist der Massepunkt. Es ist ein Objekt ohne räum-

liche Ausdehnung. Seine einzigen Eigenschaften sind sein träge Masse und seine Position im Raum. Dieser Massepunkt ist eine reine Idee, in der Natur ist ein solcher nirgends zu finden. Diese Idee ist aber sehr mächtig und liegt ganz wesentlich unserem gesamten Weltbild und unserer Kultur zugrunde.

## Die Objektivierung räumlicher Bezüge

Die Wurzel unserer Raumerfahrung ist die Objektivität der Weltinhalte in unserem Bewusstsein. Raum ist die Ordnung, in der die Objekte in Erscheinung treten, Raum ist Bewusstseinsraum.

Der Raum selber ist ursprünglich kein Objekt, wir können ihn nicht unmittelbar als Raum erkennen, nur als Beziehung der Bewusstseinsinhalte. Raum hat keine eigenständige, kontextunabhängige Existenz, er ist nicht für alle Beobachter gleich.

Wir können den Raum jedoch ausmessen. Dazu benötigen wir ein Objekt, das als Maßstab dient. Wir nehmen einen Meterstab und prüfen, wie oft wir ihn an den Wänden unseres Zimmers anlegen können. So werden räumliche Bezüge objektiv. Jeder, der mein Zimmer ausmisst, wird bis auf wenige Millimeter Abweichung zu selben Ergebnissen kommen wie ich.

Bei einem Spaziergang zu einem Aussichtspunkt kommt mir der Hinweg in der Regel viel weiter vor als der Rückweg. Wenn ich die Wege jedoch mit einem Maßstab ausmesse, passt dieser immer gleich oft zwischen die Endpunkte des Weges, auch morgen oder übermorgen.

Wir können die Wege in ein Koordinatensystem eintragen. Dazu müssen wir einen Bezugspunkt wählen und einen Maßstab. Ein beliebiger Punkt des Weges wird dann durch seine Koordinaten beschrieben. Diese geben an, wie oft der Maßstab in jeder Raumrichtung zwischen den Bezugspunkt und den Wegpunkt passt.

Indem wir den Weg in ein solches Koordinatensystem einzeichnen, haben wir ein Bild des Raumes geschaffen. Der Raum ist selber zu einem Objekt in unserem Bewusstsein geworden. Dieses Objekt 'Raum' erfasst ausschließlich die messbaren und berechenbaren Aspekte der räumlichen Bezüge. Es ist ein sehr mächtiges Hilfsmittel zur Bewältigung unserer irdischen Existenz.

Mit der Zeit haben wir sogar das Gefühl entwickelt, in einem solchen objektiven Raum zu existieren. Wir identifizieren diesen objektiven, von uns konstruierten, mit Materie erfüllten Raum mit der Welt selbst.

## Die Natur der Zeit und ihre Objektivierung

Die Weltinhalte unterliegen einer beständigen Veränderung. Diese können wir unmittelbar erleben. Dank unseres Gedächtnisses können wir sogar Vergleiche

anstellen zwischen dem, was jetzt ist, und dem, was früher war. Wir haben ein Bild der Vergangenheit in uns und vergleichen dieses Bild mit unserem Bild der Gegenwart. So erleben wir Zeit.

Ich mache einen Strandspaziergang und blicke hinter mich. Ich sehe Fußabdrücke im Sand und mir ist klar, dass ich selber diese Abdrücke hinterlassen habe. Ich erinnere mich daran und weiß darüber Bescheid. Das Erleben von Zeit ist ein Aspekt unseres Bewusstseins. Tiere erleben die Zeit in der Regel nicht so wie wir das tun.

Auch die Zukunft ist in erster Linie eine Vorstellung in unserem Bewusstsein. Auf der Grundlage der gegenwärtigen Welt- und Gedächtnisinhalte projizieren wir ein Bild in uns, wie Weltinhalte irgendwann einmal sein könnten.

Existieren tun wir aber ausschließlich in der Gegenwart. Wenn wir etwas tun oder etwas erleben, dann immer in der Gegenwart. Vergangenheit und Zukunft sind allein Elemente unseres Bewusstseins. So wie der objektive Raum haben auch sie etwas Illusionäres an sich. Wenn wir etwas vollbringen wollen, dann müssen wir es (irgendwann) in der Gegenwart tun.

Die Objektivierung der Zeit erfolgt durch Zeitmessung. Dazu dienten ursprünglich die Bewegungen der Gestirne, die Fließmengen von Sand oder Wasser durch Röhrchen oder die Bewegung von Pendel. Heute messen wir die Zeit mit Schwingungen von Kristallen oder atomaren Zuständen.

Zeitmessungen beruhen in aller Regel auf Raummessungen! Bei der Sanduhr schauen wir zum Beispiel, bis zu welcher Marke der Sand am Boden aufgefüllt wurde. Zeitkoordinaten werden auch genau so wie Raumkoordinaten konstruiert und dargestellt.

Die archetypische und die mathematische Ordnungsstruktur der Zeit sind dieselben wie die des Raumes. Wir erleben Zeit, indem wir Bilder der Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft nebeneinander im Bewusstsein betrachten. Wir messen die Zeit durch Raummessungen und wir stellen die Zeitkoordinaten genauso als räumliche Koordinaten dar wie die Raumkoordinaten. Einmal haben wir ein System für räumliche x-y-Koordinaten, das andere Mal eines für raum-zeitliche x-t-Koordinaten. Strukturell gibt es da überhaupt keine Unterschiede.

Die Grundlage der Zeit ist Änderung oder die Bewegung der Bewusstseinsinhalte. Sie führt zum räumlichen Erleben von Zeit und zur räumlichen Darstellung von Zeitkoordinaten zusammen mit den eigentlichen Raumkoordinaten. Zeit wird genau so zum Objekt wie der Raum und wir Menschen sind heute genauso an die Zeit gebunden wie wir es an den Raum sind.

## Objektive Wirkungen

Nach C.G. Jung liegen unserem bewussten Welterleben die Wirkungen archetypischer Ordnungsstrukturen zugrunde [JUNG52], [JACO87], [ATMA95]. Etwas moderner beschreibt auch der Psychologie Julian Jaynes, wie im Bewusstsein alles und wirklich alles in einen Kausalzusammenhang gestellt wird [JAYN97]. In allem, was wir erleben, erkennen wir eine Ursache. Besonders deutlich wird das, wenn wir jemandem einen Vorwurf machen, ihn zum Beispiel auf einen (vermeintlichen) Fehler beim Autofahren hinweisen. Mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit erfolgen innerhalb von Millisekunden eine Rechtfertigung und ein Gegenvorwurf. Davon, dass wie oben beschrieben, das Gehirn für die Aufarbeitung von Bewusstseinsinhalten fast eine Sekunde benötigt, ist dabei nichts zu merken.

Wissenschaftler begründen ihr Forschen mit ihrer Liebe zur Wahrheit, Künstler begründen ihr Gestalten mit der Liebe zur Schönheit und selbst Diebe sind sich sicher, dass ihre Untaten eine Folge sozialer Ungerechtigkeit sind. In unserem Bewusstsein hat alles seine Ursache. Kausalität ist ein Grundelement und eine Voraussetzung von Bewusstsein.

Im Zusammenhang mit Materie in Raum und Zeit erscheinen Wirkungen als Kräfte. Eine Kraft wirkt auf einen Ball und versetzt diesen in Bewegung. Die Kraft ist die Ursache. Die Wirkung ist, dass der Ball seinen Bewegungszustand ändert. Nach seinem Flug kann er wiederum eine Kraft ausüben, zum Beispiel auf eine Fensterscheibe, die so in Brüche geht. Es besteht ein klarer Kausalzusammenhang zwischen dem Stoß auf den Ball und den Scherben, die von der Fensterscheibe übrig geblieben sind.

Wir können Wirkungen nur erkennen, wenn sie sich immer wieder in derselben Art und Weise wiederholen, wenn sie also in einem gewissen Maße kontextunabhängig sind. Wirkungen zu erkennen heißt ja, sie mit Gedächtnisinhalten zu identifizieren.

Zur vollständigen Objektivierung von Wirkungen benötigt man wieder einen Maßstab, zum Beispiel eine Stahlfeder. Je stärker eine Kraft auf diese Feder wirkt, desto mehr wird sie zusammengedrückt. So lässt sich eine Kraft objektiv bestimmen. Interessant ist, dass dieser Kraftmessung wieder eine Raummessung zugrunde liegt.

Ein Magnet übt eine Kraft auf Eisenspäne aus, indem er sie in einer bestimmten Weise im Raum orientiert. Legt man eine Glasplatte auf einen Magneten und streut Eisenspäne darauf, so ordnen sich diese in einem Linienmuster an. Sicher hat jeder, der dies hier liest, in seinem Leben diese geordneten Eisenspäne schon einmal gesehen.

Man misst so an jedem Punkt der Glasplatte die Kraftwirkung des Magneten auf die Eisenspäne. Man meint regelrecht, so genannte Feldlinien zu sehen. In der Physik gibt ein Feld an, welchen Wert eine messbare Größe an jedem Raum- und Zeitpunkt hat. Man sagt, die Kraft auf die Eisenspäne ist eine Funktion von Raum und Zeit und nennt diese Funktion ein Feld.

Das Kraftfeld ist eine mathematische oder logische Beziehung zwischen Ursache und Wirkung. Die physikalischen Gesetze, welche diese Kraftfelder beschreiben, lassen sich allein aus der Forderung ableiten, dass diese Wirkungen kontextunabhängig sind. Das werden wir in den nächsten Kapiteln genau sehen.

Wir können uns jedoch wieder ein Bild dieser Kraftfelder machen, indem wir sie in Diagramme einzeichnen oder indem wir die Eisenspäne direkt mit dem Kraftfeld identifizieren. Die Kraft- oder Wirkungsfelder sind primär keine eigenständigen Bewusstseinsinhalte, sie sind keine Dinge. Wir machen uns jedoch ein Bild von ihnen und halten dieses Bild für die Wirklichkeit. So bekommen wir den Eindruck, dass diese Kraft- oder Wirkungsfelder unabhängig von unserem Bewusstsein in einer objektiven Wirklichkeit existieren. Sie sind jedoch ausschließlich eine logische Konsequenz unserer bewussten Welterfahrung. Das ist ein sehr schönes Beispiel dafür, wie wir Weltinhalte, die wir erleben, durch unser Denken schaffen.

### **Die Macht der objektiven Erfassung raumzeitlicher Bezügen und von Wirkungen**

Die Objektivierung der Welt ermöglicht uns den bewussten Umgang mit der Welt. So war und ist uns die Entwicklung von Techniken möglich, die uns weitgehend vor den Naturgewalten schützt, mit der wir uns mit ausreichenden Nahrungsmitteln und Wasser versorgen, die uns (eventuell) bei Krankheiten hilft, die uns fast unbegrenzte Möglichkeiten der Telekommunikation und Fortbewegung auftut und die uns schwere oder eintönige Arbeiten abnimmt. Klar ist, dass hier mit 'uns' nicht die gesamte Menschheit gemeint ist.

All das hat natürlich seinen Preis.

### **Die Problematik der Objektivierung raumzeitlicher Bezügen und von Wirkungen**

#### *Allgemeine Probleme*

Ein unmittelbares Gewahrsein der Welt geht uns immer mehr verloren, wir erleben die Welt nur noch in den Bildern, die wir uns von Weltausschnitten gemacht haben. Denken wird zum Umgang mit Gedanken und Fühlen wird zum Umgang mit Gefühlen. Die Starrheit und Trägheit unserer Gedächtnisinhalte lässt unser Leben mehr und mehr erstarren.

Unser Bewusstsein entwickelt sich weiter auf der Basis unserer Bilder der Wirklichkeit, nicht auf der Basis der Wirklichkeit selbst. Wir türmen Wissen auf Wissen, und das wiederum auf Wissen. Das führt oft zu Verwirrung, zu Illusionen und zu Phantastereien. Der Turmbau zu Babel ist ein Gleichnis dafür.

### *Das Verständnis der physikalischen Grundlagen*

Der Glaube an eine objektive Raumzeit, die aus einer Ansammlung unendlich vieler, unendlich dichter Punkte besteht, führt zu einiger Verwirrung. Auf einer solchen Grundlage ist es uns nicht möglich, die Bedeutung der Einsteinschen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik zu begreifen. Wir geben uns Phantastereien hin über Wurmlöcher, Zeitreisen oder parallele Universen.

Es ist so, dass die uns bekannte klassische Mechanik nur in einer Raumzeit formuliert werden kann, die aus solchen unendlich vielen, dicht liegenden Punkten aufgebaut ist. Diese Punkte sind eine geniale Erfindung altgriechischer Philosophen wie Pythagoras oder Euklid. Zenon von Elea oder Aristoteles [VERH94] haben jedoch vor über 2000 Jahren bereits erkannt, dass diese Punkte in Wirklichkeit so nicht existieren können. In einer solchen Raumzeit wäre jegliche Bewegung unmöglich. Die gesamte Welt würde, so wie Zenons berühmter Pfeil, in Bewegungslosigkeit erstarren. Dies wird heute in Experimenten zum so genannten Quanten-Zenon-Effekt phänomenologisch bestätigt.

In der Quantenmechanik berücksichtigt man nun diese offensichtlichen Mängel klassischer raum-zeitlicher Beziehungen, indem man mit statistischen Mitteln die Unschärfe der raumzeitlichen Punkte berücksichtigt. Wirkungen lassen sich sozusagen nicht auf einen Punkt bringen. Sie können maximal bis auf die Genauigkeit des Planckschen Wirkungsquantums  $h$ , eine der wenigen Naturkonstanten, festgelegt werden. Mit dieser Unschärfe werden viel bessere Schlussfolgerungen der Objektivität kausaler Beziehungen möglich, als in der klassischen Mechanik. Kleine Wirkungen treten immer in Form von Paketen, den Wirkungsquanten, auf und es erklären sich die atomaren Strukturen.

Nun versucht man jedoch aus formalen Gründen, auch den Raum zu quantisieren, was immer das bedeuten mag<sup>1</sup>. Diese Quantisierungsversuche führen auf die ausgesprochen komplizierte Mathematik der Superstrings. Die Theorie beschreibt übermäßig viele Raumdimensionen, mit denen niemand so recht etwas anfangen kann und sie führt auf Universen, die sich unbemerkt durchdringen. Die Mathematik ist sehr kompliziert und nur von wenigen Spezialisten wirklich durchschaubar. Grüßen hier vielleicht die Turmbauer zu Babel?

### *Existentielle Fragen*

Ernsthaftere Probleme ergeben sich aus unserem Menschenbild, das wir auf der mechanischen Grundlage entwickelt haben. Wir halten unsere Mitmenschen,

---

<sup>1</sup> Der metrische Fundamentaltensor wird wie eine Quantenwellenfunktion behandelt.

und auch uns selber, für Objekte in Raum und Zeit. Diese Objekte sind jedoch Bilder, die wir in unserem Bewusstsein entwickelt haben, und diese Bilder werden weder uns selbst noch unseren Mitmenschen gerecht. Das führt zu gegenseitigem Unverständnis und zu immerwährendem Konfliktstoff. Jeder Krieg im Großen und jeder Streit im Kleinen lässt sich letztendlich darauf zurückführen, dass verschiedene Parteien verschiedene Vorstellungen über Aspekte der Wirklichkeit haben und sich friedlich nicht einigen können, wie mit den Aspekten umgegangen werden soll. Tagtäglich bringen sich Menschen aus diesen Gründen gegenseitig um.

Vor allem finden wir in der objektivierten Raumzeit keine Antworten auf unsere existentiellen Fragen. Unsere Existenz erscheint uns zeitlich begrenzt durch Geburt und Tod, und räumlich begrenzt auf unsere körperliche Repräsentation. In dem materieerfüllten Raumkasten, den wir in unserer bewussten Welterfahrung für die Welt selbst halten, gibt es keinen Grund für unsere Existenz und kein Ziel.

Wir objektivieren unsere Gotteserfahrungen und machen uns von allem Göttlichen ein Bild. Wir identifizieren (oder verwechseln) dann dieses Bild mit dem Göttlichen. Damit haben wir uns Gott zueigen gemacht, wir haben ihn in Raum und Zeit gesperrt, so wie wir uns selbst in Raum und Zeit sperren. Aber das Abbild des Göttlichen nützt sich mit der Zeit ab und wird uns wertlos. Wir verlieren unsere Beziehung zum Göttlichen und werden Atheisten. Das Leben verliert an Sinn und Tiefe und wir klammern uns an Dingliches, an Genussmittel oder an phantastische Ideen. Als Newton erkannte, wie seine 'Philosophiae naturalis principia mathematica', also seine 'Mathematischen Prinzipien der Naturlehre' diesen Prozess unterstützt, wurde er depressiv.

### *Die Vertreibung aus dem Paradies*

Die Entwicklung unseres Bewusstseins wird in der Regel als evolutionärer Prozess gesehen. Danach hat der Mensch im Kampf ums Überleben mehr und mehr gelernt, die Wirklichkeit mit Hilfe einfacher Bilder immer besser zu beherrschen. Diese Vorstellung enthält sicher viel Wahrheit.

Vielleicht kommt aber auch noch hinzu, dass die Menschheit die objektive Wirklichkeit, unter der sie leidet und die sie nun immer besser beherrschen muss, in diesem evolutionären Prozess ausgeprägt oder gar erst geschaffen hat.

Vielleicht hat sich alles tatsächlich so abgespielt wie im Ersten Buch Moses beschrieben: Der Mensch unterliegt der Versuchung, Gott gleich werden zu wollen und sich selbst zu erkennen. Sich selbst erkennen kann er jedoch nur in einem objektiven Abbild seiner selbst.

Vielleicht war doch dies der Ausgangspunkt der evolutionären Entwicklung der menschlichen Individualität und der materiellen Welt. Durch sein Tun wurde

der Mensch mehr und mehr aus seinem paradiesischen Einssein mit Gott und der Welt vertrieben und er fand sich wieder in einem materieerfüllten Raumkasten, in dem Frauen unter Schmerzen Kinder gebären und Männer im Schweiß ihres Angesichts das tägliche Brot verdienen müssen, und in dem jeder sterben muss.

Scheint im Zusammenhang mit der Einsteinschen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik diese Genesis nicht doch fundierter zu sein als die von einem Urknall aus dem Nichts? Vielleicht kann die moderne Physik sogar beim Verständnis helfen, was mit dem christlichen Begriff 'Erbsünde' ursprünglich gemeint war.

## **Ziele der nächsten Kapitel**

In den nächsten Kapiteln sollen die grundlegenden physikalischen Zusammenhänge einheitlich begründet und mit einheitlichen Mitteln veranschaulicht werden.

Die Grundlage der physikalischen Gesetze ist die Objektivität der Wirkung. Aus dieser Objektivität in raumzeitlichen Koordinatensystemen ergeben sich sofort die Grundgesetze der klassischen Mechanik.

Die statistische Berücksichtigung der Unschärfe objektiver Wirkungen führt zur Quantenmechanik. Erst in diesem Formalismus ist eine sinnvolle Ausbreitung von Wirkungen, zum Beispiel ein Zerfließen von Wirkungsquanten, möglich.

Die Objektivität der Wirkung legt diese nicht eindeutig fest. Da nur die Ableitungen des Wirkungsfeldes zu messbaren Größen führen, kann die Wirkungsfunktion noch geeicht werden, ohne dass sich die Messgrößen verändern. Man führt Eichfelder ein, die sich als elektromagnetische Potentiale entpuppen. Ihre Kontinuität führt direkt auf die Maxwell-Gleichungen, also die Grundgleichungen der Elektrodynamik.

Die elektrodynamischen Wechselwirkungen zwischen vielen Atomen führen zu Spannungs- und Reibungskräften in der Materie. Diese können in die Grundgesetze der klassischen Mechanik integriert werden und begründen so die Strukturmechanik und die Hydrodynamik.

Die Nichtlinearität dieser Theorien hat einen eigenen interessanten Aspekt. Die Materie weist durch sie eine ureigene Tendenz zur Selbstorganisation auf. Es ist gerade die Strukturlosigkeit objektiver raumzeitlicher Bezüge, ihre so genannte Homogenität, die für viel Formen in der unbelebten und sogar in der belebten Natur verantwortlich zu sein scheint. Zum Beispiel entstehen in Wasserströmungen wirbelartige Raumstrukturen, die in den unterschiedlichsten Zusammenhängen immer wieder in Erscheinung treten. So entspricht die Form einer Qualle ziemlich genau der Form des Wasserwirbels, den die Qualle bei ihrer

Fortbewegung im Wasser erzeugt. All dies ergibt sich aus der Objektivität von Wirkungen.

Die moderne Computertechnik ermöglicht es nun, diese Zusammenhänge, die sich aus der Objektivität der Wirkungen ergeben, in Computersimulationen einheitlich zu behandeln und so fast spielerisch zu begreifen.

FEMLAB ist ein kommerzielles Computerprogramm der Schwedischen Firma COMSOL AB. Mit der mathematischen Methode der Finiten Elemente lassen sich damit die physikalischen Grundgleichungen mit wenig Aufwand lösen.

Besonders interessant ist die Form, in der die mathematischen Probleme für FEMLAB formuliert werden. FEMLAB interpretiert in erster Linie Kontinuitätsgleichungen, und diese ergeben sich für unsere Anwendungen direkt aus der Objektivität der Wirkungen. Kausalität, Kontinuität oder Objektivität von Wirkungen meinen eigentlich dasselbe.

Kontinuität bedeutet in der Physik, dass sich Wirkungen nicht ohne Grund (ohne Kräfte) verstärken oder abschwächen oder sie bedeutet, dass Materie, Ladung oder die Wahrscheinlichkeit für Wirkungen weder aus dem Nichts entstehen noch ins Nichts entweichen. In der Physik sagt man, dass sie erhalten bleiben, was seinen Ausdruck genau in Kontinuitätsgleichungen findet. Die Begrifflichkeit von Kontinuität als Ausdruck von Objektivität werden wir in einem eigenen Kapitel vertiefen.

Für die Computersimulation der physikalischen Phänomene muss die Geometrie des betrachteten Raumgebietes spezifiziert werden, was bei FEMLAB mit graphischen Werkzeugen möglich ist. Die Formeln und Randbedingungen müssen ausgewählt oder eingetippt werden und die Art der gewünschten Lösung ist festzulegen. Es können stationäre Zustände, Eigenzustände oder ganze Zeitentwicklungen berechnet werden. Zum Abschluss ist dann noch die Art der graphischen Darstellung der Ergebnisse festzulegen.

Geometrie und Parameter können unabhängig von den anderen Eingaben wie den Formeln oder Randbedingungen variiert werden, und die neuen Lösungen werden dann auf Knopfdruck angezeigt.

Damit lassen sich die Ausbreitung von Wirkungsquanten, der Zerfall atomarer Zustände unter Emission von Lichtquanten, das Schwingungsverhalten von Wolkenkratzern, die Morphogenese in Wasserströmungen und vieles mehr simulieren und verstehen.

Physik macht so noch mehr Spaß, als sie es sowieso tut. Und vielleicht kann auf diese Weise auch ein Überblick über die gesamte Physik erreicht werden. Physik sollte nicht mehr als eine Ansammlung vieler einzelner Aspekte gesehen werden, sondern als eine einzige Grundlage und Konsequenz unseres bewussten Welterlebens.

Wenn man tief in einem Wald steht, sieht man bekanntlich nur noch die einzelnen Bäume. Um den Wald zu erkennen, muss man sich aus dem Wald heraus begeben und ihn aus einem gewissen Abstand betrachten. Erst dann nimmt man auch wahr, wie sich der Wald einfügt in eine Welt, in der es auch Wiesen, Berge, Seen und vieles mehr gibt. Vielleicht kann so auch die materielle Welt mit ihrer einschränkenden und starren Objektivität transzendiert werden.

# 1. Raum, Zeit und Kraft

Raum, Zeit und Kraft sind die primären Größen der Physik. Es sind Messgrößen und Grundlagen für abstrakte Begriffe wie Geschwindigkeit, Masse, Impuls, Energie oder Wirkung. Physik stellt logische Zusammenhänge zwischen diesen Größen her.

Ein Beispiel sind die Newtonschen Axiome: Eine Masse ändert ihren Bewegungszustand, oder genauer ihren Impuls, nicht ohne Grund. Eine Impulsänderung gibt es nur, wenn eine Kraft wirkt und sie ist proportional zu dieser Kraft. Was Impuls und was Masse ist, lernen wir im nächsten Kapitel genauer.

## Die physikalische Beschreibung räumlicher Bezüge:

Um räumliche Beziehungen zu messen, bedarf es eines Maßstabes, zum Beispiel eines Meterstabes. Damit lassen sich Abstände messen. Will man mehrere Abstände zueinander in Beziehung setzen, ist es ferner angebracht, einen Bezugspunkt auszuwählen. Damit hat man ein Koordinatensystem wie in Abbildung 1-1 geschaffen. Eine Koordinate gibt an, wie oft der Maßstab in einer bestimmten Raumrichtung zwischen Bezugspunkt und der Position eines Objekts, in der Physik meist ein Massepunkt, passt. Zur Charakterisierung eines Punktes im dreidimensionalen Raum braucht man 3 Koordinaten, etwa  $x$ ,  $y$  und  $z$ .

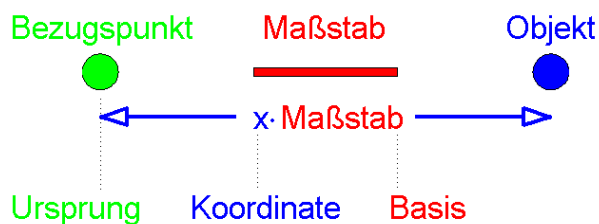


Abbildung 1-1

*Ein Koordinatensystem wird gebildet aus Ursprung als Bezugspunkt, der Basis als Maßstab und der Koordinate  $x$ . Da der Maßstab in jeder Beziehung zu anderen Objekten gleich bleibt, kann die räumliche Beziehung der Objekte durch Koordinaten beschrieben werden. Das geht nur, wenn  $x$  kontinuierlich die reellen Zahlen durchlaufen kann.*

Da der Abstand zwischen dem Bezugspunkt und dem Massepunkt in der Regel kein ganzzahlig Vielfaches der Maßstablänge sein wird, sind Koordinaten reelle Zahlen. Dass diese Feststellung wichtig ist, diskutieren wir am Ende des Kapitels.

Wir haben so eine Beschreibung des Raumes gefunden, die sehr mächtig ist. Wir können Abstände zwischen vielen Punkten, die wir ausgemessen haben, mathematisch in Beziehung setzen und logische Schlussfolgerungen ziehen. Zum Beispiel können wir Abstände bestimmen, die wir nicht direkt messen können, etwa wegen einem Hindernis, oder wir können Flächen und Volumen berechnen.

Dazu haben wir einiges verwendet, das es in der Natur nicht gibt, sondern rein gedanklich ist. Ganz fundamental ist der Punkt, der im Sinne von Euklid ein Gebilde ohne räumliche Ausdehnung ist. In der Natur hat alles seine räumliche Ausdehnung. Selbst Gedanken oder Gefühle erleben wir immer in einem ausgehenden räumlichen Gebiet, etwa im Kopf oder im Herzen.

Ferner haben wir zur Konstruktion des Koordinatensystems einen völlig willkürlichen Bezugspunkt und einen völlig willkürlichen Maßstab gewählt. So wurden aus den relativen räumlichen Beziehungen absolute Raumpunkte.

Die Koordinaten haben wir mit reellen Zahlen identifiziert. Mit einem Maßstab können wir jedoch immer nur rationale Abstände bestimmen, da Messungen immer nur mit endlicher Genauigkeit möglich sind. Auch rechnen können wir in der Regel nur mit rationalen Zahlen, da die Genauigkeit auch der modernsten Computer beschränkt ist. Nur in wenigen Ausnahmefällen, wenn wir uns auf abstrakte Überlegungen beschränken, können wir wirklich mit reellen Zahlen umgehen. Wir können zum Beispiel die Fläche des Einheitskreises durch die reelle Zahl  $\pi$  angeben, der Computer macht daraus aber 3.141592653589793100 (=80143857/25510582), was offensichtlich eine rationale Zahl ist.

Trotz allem ist die Behandlung räumlicher Bezüge mit Hilfe von Koordinatensystemen ganz extrem hilfreich. Man sollte allerdings auf Beschränkungen gefasst sein.

## Die physikalische Beschreibung der Zeit

Zeitmessungen liegen in aller Regel Raummessungen zugrunde. Die mathematische Struktur der objektiven Beschreibung von Zeit ist identisch mit der von Raum.

In der menschlichen Frühgeschichte wurde die Bewegung des Gestirns zur Bestimmung von Tag, Monat und Jahr ausgenutzt. Mit Sonnenuhren konnten selbst Stundenbruchteile bestimmt werden. Genauer ging es durch Beobachtung der Fließmenge von Wasser oder Sand durch ein Röhrchen. Heute misst man Zeit mit der Bewegung von Pendeln, der Schwingung von Kristallen oder der Resonanzfrequenz atomarer Zustände.

Aufgrund der identischen mathematischen Struktur der Beschreibung von räumlichen und zeitlichen Bezügen können beide auch in Weg-Zeit-

Koordinatensystemen kombiniert werden. Abbildung 1-2 zeigt, wie ein Spaziergang in einem solchen Koordinatensystem dargestellt wird. Vom Parkplatz wandert man eine Stunde zum Aussichtspunkt, verweilt dort für ein paar Minuten und kehrt dann wieder heim.

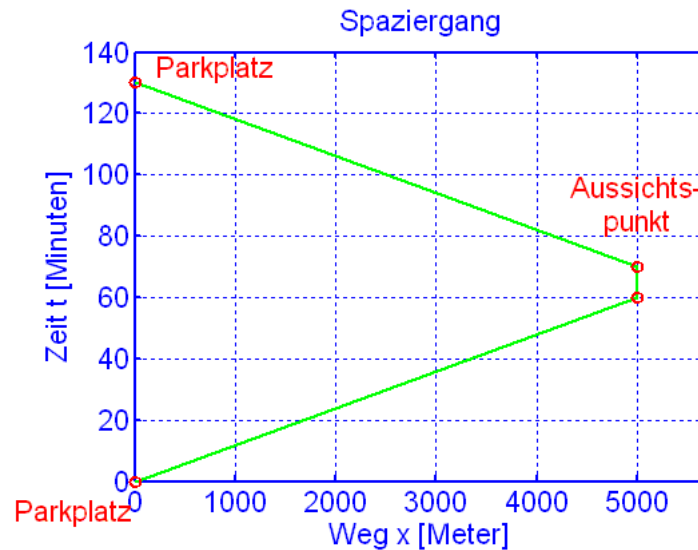


Abbildung 1-2

Darstellung raumzeitlicher Bezüge in einem Koordinatensystem. Raum und Zeit werden völlig gleich behandelt. Eingezeichnet sind ein Spaziergang von einem Parkplatz zu einem Aussichtspunkt, ein kurzes Verweilen und der Rückweg.

## Messen von Kraft

Auch Kraftmessungen sind im Grunde Raummessung, etwa wenn man, wie in Abbildung 1-3, Kräfte mit einer Federwaage misst. Nach dem Hookeschen Gesetz ist die elastische Verformung eines Körpers proportional zur dazu erforderlichen Kraft. Daher ist es so, dass bei doppelter oder dreifacher Kraft, mit der man an der Feder zieht, auch die Ausdehnung der Feder zwei oder dreimal so groß ist. Die Federausdehnung gibt also genau die Kraft an, mit der an ihr gezogen wird.

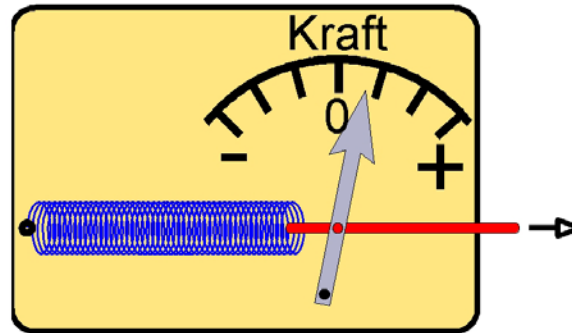


Abbildung 1-3

*Kraftmessung über die Dehnung einer Stahlfeder. Diese Kraftmessung basiert auf dem Hookeschen Gesetz, nach dem die Federdehnung proportional zur Kraft ist, mit der an der Feder gezogen wird.*

Eine solche Stahlfeder kann auch als Federwaage eingesetzt werden, mit der man die Kraft der Erde auf eine Masse misst. Bekanntlich wird diese Kraft schwächer, wenn man sich, etwa bei einem Raumflug, von der Erde entfernt. Der Zusammenhang zwischen Kraft und Abstand zum Erdmittelpunkt ist in Abbildung 1-4 als Kraftfeld dargestellt. Ein Kraftfeld gibt an, wie eine Kraft von ihrem Raumzeitpunkt abhängt. In Abbildung 1-4 ist jedoch nur der räumliche Aspekt zu sehen.

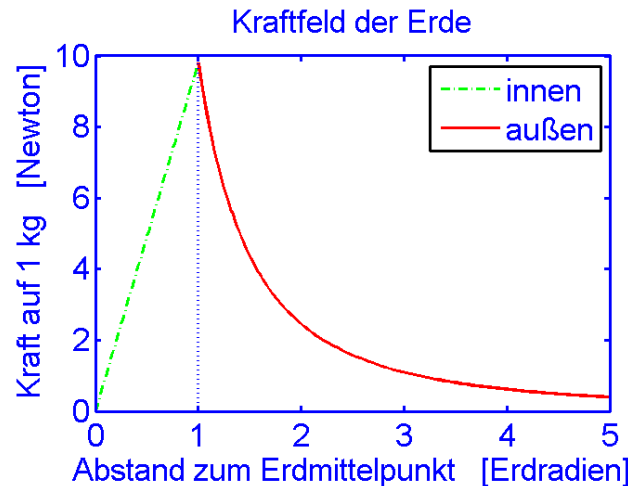


Abbildung 1-4

*Kraftfeld der Erde. Die Anziehungskraft der Erde ist an der Erdoberfläche am stärksten (9.81 Newton). Ins Erdinnere nimmt sie linear ab, nach oben nimmt sie mit  $1/(\text{Abstand})^2$  ab. Ein Kraftfeld ist eine mathematische Funktion und nicht etwa ein natürliches Objekt!*

## Geschwindigkeit

Geschwindigkeit ist ein Maß für Bewegung, also für die zeitliche Änderung räumlicher Bezüge. Während Zeiten und Kräfte unmittelbar mit Hilfe von Raummessungen bestimmt werden, ist die Geschwindigkeit eine Größe, die aus einer Raum- und einer Zeitmessung abgeleitet wird. Der Begriff der Geschwindigkeit verknüpft Weg und Zeit zu einer einzigen Größe.

Interessant und vielleicht für den einen oder anderen überraschend ist, dass nur mittlere Geschwindigkeiten gemessen werden können. Man stellt fest, in welcher endlichen Zeit ein endlicher Weg zurückgelegt wird. Theoretisch oder gedanklich macht man den Weg und die Zeit unendlich kurz, indem man den mathematischen Limes bildet. Wie in Abbildung 1-5 dargestellt, funktioniert das in aller Regel sehr gut und erweist sich als sehr sinnvoll. Es ist so möglich, die Geschwindigkeit eines Körpers an jedem Punkt seiner Bahnkurve anzugeben.

In der Natur kann ein solcher Limes jedoch nicht existieren. Das haben schon die altgriechischen Philosophen wie Zenon von Elea oder Aristotels vor über 2000 Jahren erkannt. Bewegung ist etwas Ganzheitliches. Sie kann durchaus in kleinere Abschnitte unterteilt werden, jedoch nicht bis zu beliebig kleinen Abschnitten. Der Grenzübergang zu unendlich kleinen Raum- und Zeitintervallen ist genau so wie die reellen Zahlen eine rein gedankliche Konstruktion und hat keine natürliche Grundlage. Wie Zenon begründet und wie heute in Experimenten zum Quanten-Zeon-Effekt phänomenologisch gezeigt wird, gäbe es in einer

unendlich fein strukturierten Raumzeit keine Bewegung. Die Welt würde in Bewegungslosigkeit erstarren.

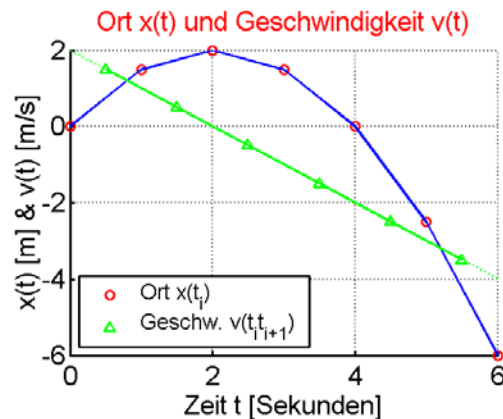


Abbildung 1-5

Ein Körper wird zur Zeit  $t=0$  im Schwerfeld der Erde nach oben geworfen. Nach zwei Sekunden ist er zwei Meter nach oben geflogen und kehrt seine Flugrichtung um. Ort und Zeit wurden an den mit Kreisen markierten Punkten gemessen. Daraus ergeben sich für jedes Intervall mittlere Geschwindigkeiten, die durch die Dreiecke markiert sind. Durch Interpolation ergibt sich nun die Geschwindigkeitsfunktion für die Bahnkurve. Die theoretische Geschwindigkeit wird an jedem Punkt oder zu jeder Zeit angegeben.

## Weitere abgeleitete Größen

Neben der Geschwindigkeit gibt es in der Physik noch weitere abgeleitete Größen, deren Bedeutungen uns zum Teil aus dem täglichen Leben bekannt sind.

Das Produkt aus Kraft und Zeit ist der Impuls. Eine Kraft wirkt auf einen Körper und stößt diesen an. Der Anstoß oder Impuls ist umso größer, je stärker die Kraft ist und je länger sie wirkt.

Kraft mal Weg führt auf die Energie oder Arbeit. Man hebt einen Körper, was Arbeit ist und der Körper erhält dadurch (potentielle) Energie. Lässt man ihn fallen, gibt er diese Energie wieder ab und schlägt zum Beispiel eine Delle in den Boden. Die Energie ist umso größer, je mehr Kraft aufgewendet werden muss, um den Körper zu heben und je höher man ihn hebt.

Die Vereinigung aller drei Grundgrößen, also Kraft mal Weg mal Zeit führt auf den Begriff der Wirkung. Da diese alle drei messbaren Grundgrößen in sich vereinigt, hat dieser Begriff eine ganz besondere Bedeutung für theoretische Betrachtungen. Das Plancksche Wirkungsquantum, eine der wenigen Naturkonstanten, gibt zum Beispiel an, wie genau Wirkungen überhaupt nur bestimmt werden können.

Da die Wirkung alle physikalischen Grundgrößen in sich vereint, wird sie unabhängig von Raum- und Zeitkoordinaten und von der speziellen Art der Kraftmessung. Aus dieser Kontextunabhängigkeit ergeben sich direkt die Grundgesetze der Physik.

In den nächsten Kapiteln werden wir aus dieser Objektivität als Allererstes die Beziehung zwischen Impuls und Geschwindigkeit ableiten, was uns auf den Begriff der Masse und auf die Begründung ihrer Trägheit führen wird.

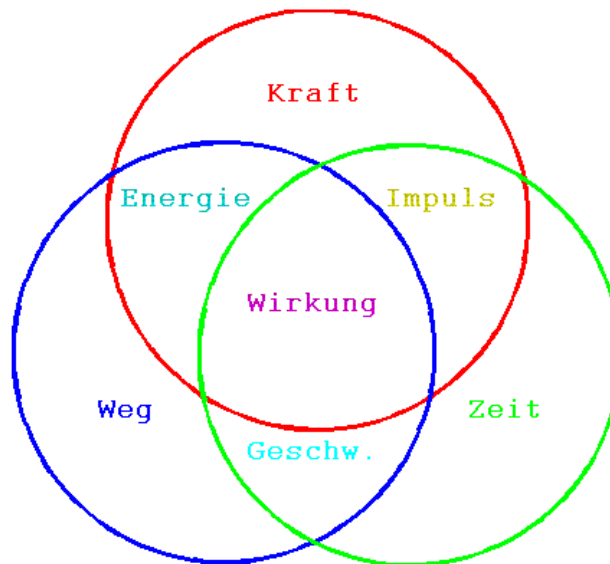


Abbildung 1-6

*Beziehung der abgeleiteten Größen Geschwindigkeit, Impuls, Energie und Wirkung mit den elementaren, direkt messbaren Größen Weg, Zeit und Kraft. Der Wirkungsbegriff ist zentral, er hängt aufs engste mit den Grundgesetzen der Physik zusammen.*

## Die klassische Beschreibung raumzeitlicher Bezüge und die moderne Physik

Die Beschreibung raumzeitlicher Bezüge in Koordinatensystemen hat viel Geniales an sich und erlaubt einen einfachen und systematischen Umgang mit räumlichen und zeitlichen Bezügen. Sie beinhaltet jedoch auch gewaltige Abstraktionen und man darf nicht von vornherein erwarten, dass diese immer mit der Natur übereinstimmen.

### *Bezugspunkt von Koordinatensystemen und die Invarianz der*

Die Grundbestandteile eines Koordinatensystems sind der Maßstab und der Bezugspunkt. Durch den Bezugspunkt werden aus den relativen raumzeitlichen Bezügen, die wir unmittelbar erleben, absolute Raumzeitpunkte.

Wirklich aufregend wird das, wenn ein Phänomen, wie das der Ausbreitung eines Lichtsignals, in verschiedenen Koordinatensystemen beschrieben wird. Unter Umständen bewegen sich die Bezugspunkte der Systeme sogar relativ zu einander.

Es gibt keinen Grund, irgendeinen Bezugspunkt zu bevorzugen. Die Bezugspunkte existieren ja nicht wirklich, sondern sind rein mathematische Hilfsmittel. Jeder Beobachter wird seinen eigenen Standpunkt bevorzugen, aber auf welchen beziehen sich etwa Lichtsignale bei ihrer Ausbreitung?

Die Antwort auf diese Frage ist, wenn man sie kennt, eigentlich logisch. Die Bezugspunkte gibt es nicht wirklich und sie können daher für die Ausbreitung von Lichtsignalen keine Rolle spielen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtsignale ist in allen Bezugssystemen gleich. Sie wird nicht von der Geschwindigkeit des Bezugssystems überlagert, wie es für die Geschwindigkeit von Objekten der Fall ist.

Zur Beschreibung der Ausbreitung von Lichtsignalen muss man ein spezielles Bezugssystem wählen. Im nächsten Schritt ist es eine relativ einfach mathematische Übung, eine Transformationsformel zwischen verschiedenen, sich relativ zueinander bewegenden Bezugssystemen abzuleiten, welche allein die Unabhängigkeit der 'Lichtgeschwindigkeit' vom speziellen Bezugspunkt berücksichtigt.

Die Transformation verzerrt die Raum- und Zeitkoordinaten, was aber niemals unmittelbar beobachtet werden kann. Jeder Beobachter bleibt ja immer in seinem Bezugssystem, das durch seine individuelle Existenz begründet wird.

Trotzdem sind die Schlussfolgerungen aus dem Transformationsgesetz, der Lorentz-Transformation, sehr wichtig. Theoretisch beeinflussen sie ganz entscheidend die Form der elektrodynamischen Gesetze, etwa der Maxwell-Gleichungen. Und ganz praktisch müssen sie zum Beispiel in den satellitengestützten Navigationssystemen von Autos berücksichtigt werden, weniger wegen der Bewegung der Autos als vielmehr wegen der Bewegung der Satelliten. Auch der Einfluss des Schwerfeldes der Erde auf raumzeitliche Bezüge ist dabei wichtig.

### *Die Unschärfe raumzeitlicher Bezüge*

Die Feststellung, dass Geschwindigkeiten immer nur im Mittel zwischen zwei Raumzeitpunkten gemessen werden können, ist vielleicht überraschend. Wir sind es sehr gewöhnt, mit dem Auto zu jedem Zeitpunkt mit einer ganz bestimmten Geschwindigkeit zu fahren und es ist sicher ganz extrem spitzfindig zu

sagen, dass wir das gar nicht tun. Beim Autofahren reicht die Feststellung, dass 60 Stundenkilometer im Ort teuer werden kann und selbst bei Formel I Autorennen spielen die Millisekunden der Zeitmessung keine Rolle.

Probleme treten erst auf, wenn man atomare oder noch kleinere Strukturen untersucht. Diese können sich überhaupt erst in dieser Unbestimmtheit zwischen den Messungen, oder wie man sagt, in der Unschärfe der raumzeitlichen Bezüge bilden.

Die Unschärfe raumzeitlicher Bezüge ist eigentlich auch ganz offensichtlich. Zenon von Elea und Aristoteles haben ihre Bedeutung schon vor langer Zeit erkannt, ganz ohne technische oder mathematische Hilfsmittel. Wir haben nur Probleme damit, weil wir uns allzu sehr an die scharfe Beschreibung raumzeitlicher Bezüge in der Geometrie und in der klassischen Physik gewöhnt haben. Alle speziellen Quantenphänomene, wie Wellen-Teilchen-Dualismus, Nichtlokalität oder der sprunghafte Übergang von Möglichkeiten zu konkreten Messergebnissen sind Konsequenzen dieser Unschärfe.

Die scharfen raumzeitlichen Bezüge in Koordinatensystemen erlauben es, diese mathematisch zu behandeln. Auf ihnen basieren die Geometrie, die Infinitesimalrechnung, die klassische Physik und fast alle Ingenieurwissenschaften. Unsere gesamte Kultur und unser Denken basiert ganz wesentlich darauf. Aber die Koordinatensysteme liefern nur ein vereinfachendes, abstraktes Abbild der Wirklichkeit. Eine, wie man im Nachhinein leicht sagen kann, offensichtlich notwendige statistische Korrektur führt auf die Quantenmechanik.

Probleme mit dem Verständnis der modernen Physik haben wir nur, wenn wir allzu sorglos mit den Bildern umgehen, die wir uns von der Welt gemacht haben und diese mit der Welt selbst verwechseln.

## **Reelle Zahlen und Finite Elemente**

Die Koordinaten von Raumzeitpunkten sind gemäß ihrer Definition, oder wie in Abbildung 1-7, reelle Zahlen. Mit reellen Zahlen wie  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$  oder der Eulerschen Zahl  $e$  kann man aber nur auf abstrakter Ebene umgehen, man kann sie weder exakt messen noch ihren genauen Wert durch eine Dezimalzahl angeben.

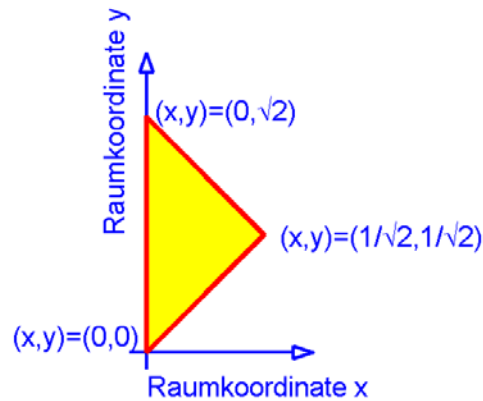


Abbildung 1-7

*Gleichschenkeliges, rechtwinkliges Dreieck der Schenkellänge 1. Die Hälfte aller Eckpunktkoordinaten sind irrationale, ihre Dezimaldarstellung hat also unendlich viele Stellen. Theoretisch sind Koordinaten durch reelle Zahlen anzugeben.*

Ein anderes Problem besteht darin, dass in einem endlichen Gebiet, wie etwa in dem Dreieck von Abbildung 1-7, unendlich viele Koordinatenpunkte liegen. Will man in einem solchen Gebiet ein Kraftfeld angeben, das auf einen Körper wirkt, müsste man dieses an unendlich vielen Koordinatenpunkten berechnen.

Das Kraftfeld ergibt sich unter anderem aus der räumlichen Änderung des Energiefeldes, also aus dessen Ableitung nach dem Ort. Die Ableitung ist über den Grenzübergang zu unendlich kleinen Strecken definiert. Dazu braucht man also reelle Zahlen. Aber mit diesen kann man dann nicht wirklich exakt rechnen. Das zeigt sehr schön die Unvollständigkeit der mathematischen Naturbeschreibung, also der Physik.

Berechnungen sind also immer nur angenähert möglich und es gibt ganz verschiedene Methoden, die analytischen Ausdrücke mit tatsächlich berechenbaren und messbaren Größen in Verbindung zu bringen.

Eine sehr elegante und allgemeine Methode ist die der Finiten Elemente. Das Gebiet, für das eine Berechnung durchgeführt werden soll, wird in endlich viele, relativ kleine Teilgebiete zerlegt. Das Dreieck von Abbildung 1-7 würde man zum Beispiel in ein paar hundert kleine Gebiete aufteilen.

In diesen Teilgebieten können die physikalischen Gleichungen analytisch gelöst werden. In geschlossenen Formelausdrücken kann man ableiten, integrieren und die Werte der Felder und Kräfte theoretisch an jedem Punkt angeben. Diese Lösungen auf den Teilgebieten werden dann numerisch, also auf der Grundlage endlich vieler und endlicher Dezimalzahlen, zu einer Gesamtlösung zusammenzubauen.

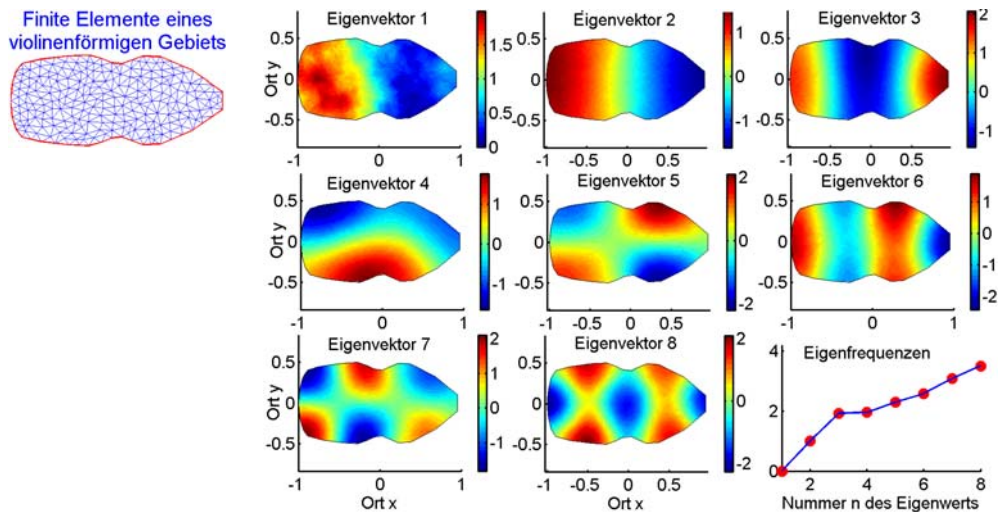


Abbildung 1-8

Die Methode der Finiten Elemente.

Links ist die Unterteilung eines violinenförmigen Gebietes in viele dreieckige Teilgebiete dargestellt. Auf diesen können etwa strukturmechanische Schwingungsgleichungen analytisch angenähert werden.

Rechts sind Gesamtlösungen des Schwingungsverhaltens für die Violinenform in Form von Eigenvektoren EV1 bis EV 8 dargestellt. Die verschiedenen Farben stehen für verschiedene Schwingungsamplituden im Gebiet. Ganz rechts unten sind auch noch die wichtigsten Frequenzen gezeigt, mit denen das Gebiet schwingen kann.

Abbildung 1-8 soll die Methode der Finiten Elemente noch etwas verdeutlichen. Zur Berechnung des Schwingungsverhaltens wird ein violinenförmiges Gebiet in mehrere hundert Teilgebiete zerlegt. Die strukturmechanischen Schwingungsgleichungen werden auf den Teilgebieten annäherungsweise analytisch berechnet und die Lösungen werden numerisch, also mit endlichen Dezimalzahlen, zu Gesamtlösungen zusammengebaut.

Auf dieser Methode der Finiten Elemente beruht die Computersoftware FEM-LAB, mit der wir in den folgenden Kapiteln unsere physikalischen Probleme untersuchen werden.



## 2. Wirkungen

Die messbaren Grundgrößen der Physik sind Weg, Zeit und Kraft. Mit diesen werden weitere, abhängige Größen definiert, wie die Geschwindigkeit als Weg pro Zeit.

Wirkt eine Kraft über eine gewisse Zeit auf einen Körper, so wird dieser angestoßen. Aus der Ruhe heraus kommt er in Bewegung und erhält Geschwindigkeit, und zwar je mehr, je stärker die Kraft ist oder je länger sie wirkt. Man definiert den Stoß oder üblicher den Impuls als Kraft mal Zeit.

Ähnlich ist der Ausdruck Kraft mal Weg. Hebt man einen Körper im Schwerfeld der Erde hoch, so verrichtet man Arbeit. Und zwar je mehr, je mehr Kraft man benötigt und je höher man ihn hebt. Die am Körper verrichtete Arbeit ist nicht vergeudet, der Körper kann diese Arbeit wieder zurückgeben, zum Beispiel indem er beim Herabfallen auf einen anderen Körper trifft und diesen anstößt, ihm also einen Impuls versetzt.

Die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten, nennt man Energie. Beim Hochheben verrichten wir eine bestimmte Arbeit und der Wert dieser Arbeit ist gleich der Energie, den der Körper dadurch erhalten hat. Arbeit und Energie sind definiert als Kraft mal Weg.

In Abbildung 2-1 ist zu sehen, wie sich eine ins Wasser geworfene Kugel verhält. Der Wasserstrom übt eine Kraft auf die Kugel aus und versetzt sie in Bewegung. Sie erhält Impuls. Je schneller sie wird, desto schwächer wird die Kraft und die Geschwindigkeit nähert sich so einem Grenzwert an, wie es im Diagramm in Abbildung 2-1 unten gezeigt ist. Der genaue Verlauf der Geschwindigkeitskurve hängt noch davon ab, wie schwer die Kugel ist. Es besteht offensichtlich ein Zusammenhang zwischen Impuls und Geschwindigkeit, der mit Schwere zu tun hat. Das wird sich später noch quantitativ bestätigen.

Der Wasserstrom wirkt auch auf einen ins Wasser gehaltenen elastischen Stab. Dieser wird durch die Kraft des Wassers gespannt. An ihm wird Arbeit verrichtet, die er dann in Form von Spannungsenergie speichert und auch wieder abgeben kann. Die Menge an Arbeit oder Energie ist umso größer, je mehr er gekrümmt wird, je größer also der Weg  $x$  in Abbildung 2-1 ist.

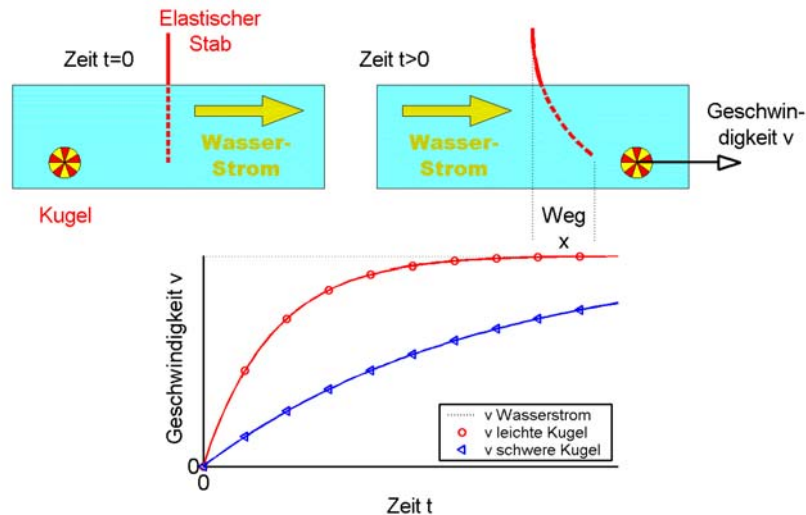


Abbildung 2-1

Eine Kugel wird in einen Wasserstrom geworfen. Der Wasserstrom übt eine Kraft auf die Kugel aus und versetzt sie in Bewegung. Sie erhält Impuls. Je schneller die Kugel wird, umso kleiner wird die Kraft und so nähert sich ihre Geschwindigkeit mit der Zeit einem Grenzwert an. Unten sind die Geschwindigkeitskurven für verschieden schwere Kugeln zu sehen.

Ein elastischer Stab wird durch die Wasserkraft gebogen. Er erhält so Energie, die proportional zur Kraft des Wasserstromes und zur Auslenkung  $x$  ist.

Die Verbindung aller messbaren Grundgrößen führt auf den Begriff der Wirkung. Die physikalische Wirkung ist definiert als Kraft mal Weg mal Zeit. Sie umfasst sozusagen alle anderen Begriffe und spielt daher eine ganz besondere Rolle, nicht nur in der Physik.

C.G. Jung, der Begründer der Tiefenpsychologie, führte alle Bewusstseinsphänomene auf die Wirkung abstrakter Ordnungsstrukturen zurück. Er bezeichnete sie als Archetypen. Kausalität, also der Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung ist nach ihm ein Grundelement unseres bewussten Welterlebens. Durch Messen werden Wirkungen objektiviert und werden so zur Grundlage eines physikalischen Weltgeschehens. In Raum und Zeit äußern sich Wirkungen als Kräfte.

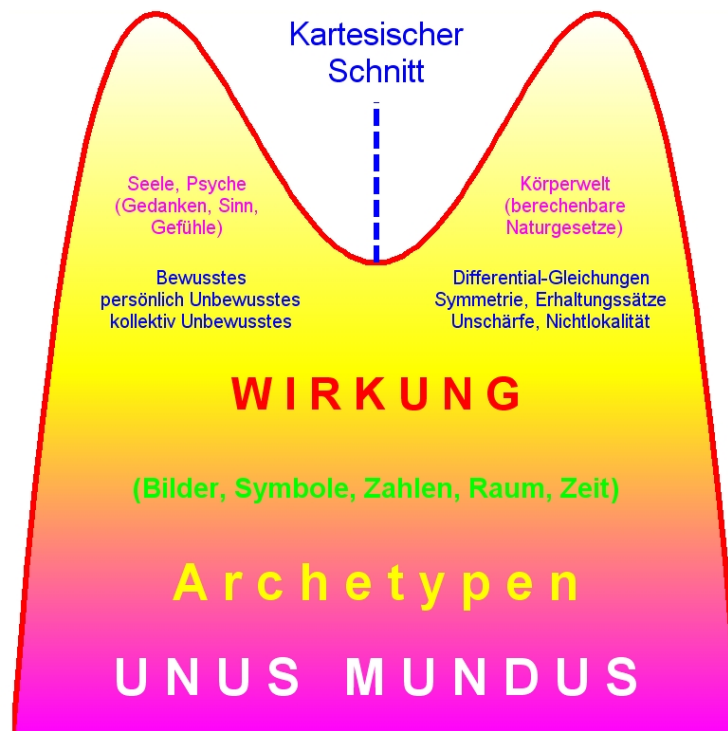


Abbildung 2-2

*Der Begründer der Tiefenpsychologie, C.G. Jung führt unser bewusstes Welterleben ganz grundsätzlich auf Wirkungen von Ordnungsstrukturen (Archetypen) in unserem kollektiven Unterbewusstsein zurück. Die Grundlage ist 'Die eine Welt (Unus mundus)', die wir nicht bewusst erleben können. Die Trennung in eine eher subjektive Innemwelt und eine materielle Außemwelt durch den so genannten Kartesischen Schnitt wurde in unserem Bewusstsein erst im Mittelalter endgültig vollzogen.*

Die zentrale Rolle des Wirkungsbegriffes in der Physik kommt auch dadurch zum Ausdruck, dass er im Planckschen Wirkungsquantum, eine der wenigen Naturkonstanten, auftaucht. Das Plancksche Wirkungsquantum gibt eine Genauigkeitsgrenze an für die Erfassung von Wirkungen.

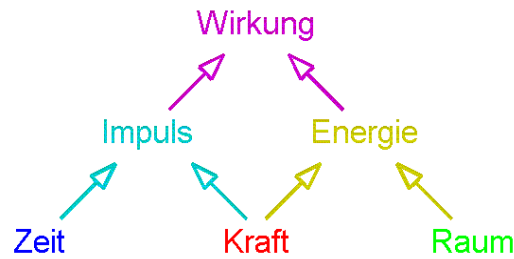


Abbildung 2-3

*Wirkung ist der zentrale Begriff der Physik. In Raum und Zeit ergeben sich aus ihm die Begriffe Energie und Impuls und letztlich Kraft.*

Wirkung hat zu tun mit Kausalität und genau das wird durch Physik beschrieben. Wie in Abbildung 2-4 wird ein Körper angestoßen und kann so selber eine Wirkung erzielen, zum Beispiel indem er eine Kraft auf den Arm eines Fängers ausübt.



Abbildung 2-4

*Physik beschreibt den objektiven Zusammenhang von Ursache und Wirkung, als den Kausalzusammenhang; zum Beispiel hier, wo die Ursache in einem Stoß auf den Ball besteht und die Wirkung in der Kraft auf die Arme des Fängers.*

Damit wir Wirkungen überhaupt erkennen können, also ein Bewusstsein über sie erlangen, müssen sie immer wieder in derselben Form in Erscheinung treten. Sie müssen in einem gewissen Maße kontextunabhängig oder objektiv sein. Über Messungen von Raum, Zeit und Kräften können wir auch Wirkungen messen. Die quantitative Vergleichbarkeit oder Reproduzierbarkeit solcher Messungen von Wirkungen erfordert ein ganz besonderes, fast absolutes Maß an Objektivität. Den Wirkungen müssen strenge, mathematische Gesetzmäßigkeiten zugrunde liegen. Es erweist sich, dass diese Gesetzmäßigkeiten genau die Grundgesetze der Physik sind. Dies wollen wir in diesem und in den folgenden Kapiteln weiter ausarbeiten.

## Die theoretischen Grundbegriffe

### Das Wirkungsfeld

Die Grundlage unserer Betrachtungen ist das Wirkungsfeld. Als Feld ist es eine Größe, die von Raum und Zeit abhängt. Rein mathematisch kann man daher zunächst einmal die Ableitungen des Wirkungsfeldes betrachten und Identifikationen mit messbaren Größen wie Ort, Zeit und Kraft vornehmen. Nach dem weiter oben eingeführten Begriff der Wirkung ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \underbrace{S(\vec{x}, t)}_{\text{Wirkungsfeld}} = \underbrace{\vec{F}(\vec{x}, t)}_{\text{Kraftfeld}}. \quad (2-1)$$

### Das Impulsfeld und das Energiefeld

Weiterhin ergeben sich aus den begrifflichen Einführungen das Impulsfeld als

$$\vec{\nabla} S(\vec{x}, t) = \underbrace{\vec{p}(\vec{x}, t)}_{\text{Impulsfeld}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}(\vec{x}, t) = \vec{F}(\vec{x}, t) \quad (2-2)$$

und das Energiefeld als

$$\frac{\partial}{\partial t} S(\vec{x}, t) = -\underbrace{E(\vec{x}, t)}_{\text{Energiefeld}} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} E(\vec{x}, t) = -\vec{F}(\vec{x}, t). \quad (2-3)$$

Das '-'Zeichen ist reine Konvention und führt später auf positive Werte für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wirkungsfeldes.

### Bewegungsgleichung

Allein aus diesen Begrifflichkeiten folgt bereits die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} S(\vec{x}, t) = \vec{F}(\vec{x}, t) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \vec{p} = -\vec{\nabla} E(\vec{x}, t)}_{\text{Bewegungsgleichung}}. \quad (2-4)$$

Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der räumlichen Änderung der Energie.

Hier haben wir es mit einer Feldgleichung zu tun, die beteiligten Größen sind Funktionen von Raum und Zeit. Die bekannteste Bewegungsgleichung ist die Newtonsche Bewegungsgleichung. Sie ist formal mit (2-4) identisch, allerdings gilt diese für Bahnkurven von Körpern. Wie man dazu kommt, sehen wir ein wenig später in diesem Kapitel. Zunächst wollen wir noch ganz allgemeine Schlussfolgerungen aus der Objektivität von Wirkungen ziehen.

## Masse und die Energiefunktion

Die Gleichungen (2-1) bis (2-3) sind reine Mathematik. Mit einem Feld kann man ja von vornherein nichts anders tun als es nach Raum und Zeit abzuleiten. Auch die Bewegungsgleichung (2-4) hat noch nicht viel mit Physik zu tun.

Der physikalische Input ist nun die Forderung nach einem objektiven Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung, also nach Kausalität. Vor allem darf die Wirkung nicht abhängen vom willkürlich zu wählenden Bezugspunkt und dessen Bewegung oder vom Maßstab des Koordinatensystems. Dies ist bekannt als Galilei-Invarianz oder Lorentz-Invarianz.

Impuls und Energie hängen vom Bezugssystem bzw. vom Koordinatensystem ab. Wenn nun die Werte des Wirkungsfeldes vom Bezugssystem unabhängig sein sollen, muss es eine Beziehung geben zwischen Energie und Impuls, die dies gewährleistet. Diese Beziehung leiten wir nun in drei Schritten ab.

### *Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wirkungen*

Bewegen sich zwei Bezugssysteme relativ zu einander, so hat ein Körper in jedem Bezugssystem einen anderen Impuls. Der Impuls hängt von der Bewegung des Bezugssystems ab. Bewegt sich etwa das Bezugssystem mit dem Körper mit, so hat der Körper gar keinen Impuls. Es ist so, als hätte ihn nie eine Kraft angestoßen.

Es genügt im Folgenden, sehr kleine Impulsunterschiede  $\vec{\varepsilon} \ll \vec{p}$  zu betrachten.  $\varepsilon$  ist der Impulsunterschied zwischen zwei verschiedenen Bezugssystemen aufgrund ihrer relativen Bewegung. Die Energie wird sich dann in den beiden Bezugssystemen auch nur geringfügig unterscheiden:

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \vec{p} + \underbrace{\vec{\varepsilon}}_{\text{kleine Impuls-}} \quad , & (2-5) \\ &\quad \text{differenz} \\ E' &= E + \underbrace{\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla}^{(\vec{p})} E + O(\vec{\varepsilon}^2)}_{\text{Taylor-Entwicklung}} \quad \text{und} \\ &\quad \text{des Energiefeldes} \\ S' &= S. \end{aligned}$$

Die Werte des Wirkungsfeldes sollen von der Relativbewegung der Bezugssysteme nicht betroffen sein, also

$$\begin{aligned}
\underbrace{dS'}_{\substack{\text{totale \u00c4nderung} \\ \text{des Wirkungsfeldes}}} &= \underbrace{\vec{p}'}_{\vec{p} + \vec{\varepsilon}} \cdot d\vec{x} - \underbrace{E'}_{E + \vec{\nabla}^{(\vec{p})} E \cdot \vec{\varepsilon}} dt \\
&= \underbrace{\vec{p} \cdot d\vec{x} - E dt}_{dS} + \vec{\varepsilon} \cdot \left( d\vec{x} - \vec{\nabla}^{(\vec{p})} E dt \right).
\end{aligned} \tag{2-6}$$

Aus der Objektivit\u00e4t oder der Kontextunabh\u00e4ngigkeit der Wirkung folgt also

$$\begin{aligned}
\underbrace{dS' = dS}_{\substack{\text{Kontext-} \\ \text{unabh\u00e4ngigkeit}}} &\Rightarrow \left( d\vec{x} - \vec{\nabla}^{(\vec{p})} E dt \right) = 0 \Rightarrow \\
\vec{\nabla}^{(\vec{p})} E = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}^{(s)} &= \text{Geschwindigkeitsfeld f\u00fcr} \\
&\quad \text{die Ausbreitung der Wirkungen.}
\end{aligned} \tag{2-7}$$

$\vec{v}^{(s)}$  ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wirkungssignal ausbreitet. Zur klassischen Mechanik kommen wir sp\u00e4ter genau dadurch, dass wir die Geschwindigkeit eines K\u00f6rpers an jedem Punkt seiner Bahnkurve mit dem Wert von  $v^{(s)}$  identifizieren. Das m\u00fcssen wir dann aber noch etwas genauer durchdenken.

Von der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v^{(s)}$  ist die Geschwindigkeit der Punkte auf H\u00f6henlinien des Wirkungsfelds  $v^{(H)}$  zu unterscheiden:

$$dS = p dx - E dt \Rightarrow v^{(H)} \equiv \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{dS=0} = \frac{E}{p}. \tag{2-8}$$

### Die tr\u00e4ge Masse der Materie

Die Impulsdifferenz  $\varepsilon$  zwischen zwei Bezugssystemen ist zur\u00fcckzuf\u00fchren auf ihre Relativbewegung. Wir bezeichnen diese (sehr kleine) Relativgeschwindigkeit mit  $\eta$  und vergleichen wieder die Wirkungen in den beiden Bezugssystemen:

$$\begin{aligned}
dS' &= \vec{p} \cdot \underbrace{(d\vec{x} + \vec{\eta} dt)}_{d\vec{x}'} - \underbrace{(E + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla}^{(\vec{p})} E)}_{E'} dt \\
&= \underbrace{\vec{p} \cdot d\vec{x} - E dt}_{dS} + \left( \vec{p} \cdot \vec{\eta} - \vec{\varepsilon} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}^{(\vec{p})} E}_{=\vec{v}^{(s)}} \right) dt.
\end{aligned} \tag{2-9}$$

Aus der Objektivit\u00e4t der Wirkung k\u00f6nnen wir wieder unsere Schlussfolgerungen ziehen:

$$\underbrace{dS' = dS}_{\text{Kontext-unabhängigkeit}} \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{\eta} = \vec{v}^{(s)} \cdot \vec{\varepsilon}. \quad (2-10)$$

Nun hat der Impuls  $p$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v^{(s)}$  in einem Bezugssystem nichts zu tun mit der Beziehung zu anderen Bezugssystemen. Wir können also annehmen, dass  $p$  und  $v^{(s)}$  fest vorgegeben sind, und dann folgt aus (2-10), dass die Impulsdifferenz  $\varepsilon$  proportional sein muss zur relativen Geschwindigkeit  $\eta$  der Bezugssysteme:

$$\left( \vec{p}, \vec{v}^{(s)} \text{ fest vorgegeben} \right) \Rightarrow \vec{\eta} \propto \vec{\varepsilon}, \quad (2-11)$$

$$\text{also } m\vec{\eta} = \vec{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \vec{p} = \underbrace{m}_{\substack{\text{bekannt} \\ \text{als Masse}}} \vec{v}^{(s)}.$$

Den Proportionalitätsfaktor bezeichnen wir mit  $m$  und identifizieren ihn sofort als träge Masse. Der Begriff wird hier allerdings sehr abstrakt verwendet, da er sich ja auf die Bewegung des Wirkungsfeldes bezieht und nicht auf die Bewegung von Körpern. Wir befinden uns sozusagen noch auf einer körperlosen Ebene und betrachten die reine Ausbreitung von Wirkungen. Da wir mit unseren Überlegungen ja auch die Quantenmechanik und die Elektrodynamik erfassen wollen, dürfen wir uns noch nicht auf die Körper und ihre Bahnkurven beschränken.

Sobald wir die Geschwindigkeit von Körpern  $v$  mit  $v^{(s)}$  auf der Bahnkurve identifizieren, erhalten wir die bekannte Beziehung zwischen Impuls und Geschwindigkeit eines Körpers. Impuls hängt dann ja mit der Kraft zusammen, die über eine Zeit auf ihn wirkt. Die Geschwindigkeit des Körpers ist bei gleichem Anstoß umso größer, je kleiner die Masse des Körpers ist.

Insgesamt sehen wir: Masse oder Trägheit der Materie ist die Konsequenz der Objektivität von Wirkungen.

### Die Energiefunktion $E(p)$

Damit ist es nun einfach, die gesuchte Energiefunktion, die ja die Objektivität oder Unabhängigkeit des Wirkungsfeldes vom Bezugssystem gewährleisten soll, anzugeben. Mit dem Zusammenhang zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v^{(s)}$  und Impuls  $p$  in (2-11) können wir (2-7) einfach aufintegrieren und erhalten die vollständige Energiefunktion  $E$ :

$$\vec{\nabla}^{(\vec{p})} E = \vec{v}^{(S)} = \frac{1}{m} \vec{p} \Rightarrow E = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + \underbrace{V}_{\substack{\text{Potential} \\ \text{unabhängig} \\ \text{vom Impuls}}} \quad (2-12)$$

oder

$$\underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{-E} + \frac{1}{2m} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot S)^2}_{\vec{p}} + V = 0.$$

Die Integrationskonstante bezeichnet man fast immer als Potential  $V$ . Sie darf nur von Raum- und Zeitkoordinaten abhängen, nicht jedoch vom Impuls  $p$ . In der Quantenmechanik hängt sie sogar von der Wahrscheinlichkeitsdichte möglicher Messergebnisse  $\rho$  ab.

Bei (2-12) handelt es sich um die berühmte Hamilton-Jacobi-Gleichung. Sie wird in der klassischen Mechanik meist über viele Umwege wie Lagrange-Funktion und kanonische Transformationen abgeleitet. Die Gleichung ist jedoch weit über die klassische Mechanik hinaus wichtig. Sie drückt die Objektivität der Wirkung aus. Ihre Anwendung in der klassischen Mechanik ist nur ein Spezialfall. Auf diesen werden wir im nächsten Kapitel eingehen.

## Grundgleichungen der Mechanik

Die allgemeinen Grundgleichungen der Mechanik lauten also

$$\vec{p} = \vec{\nabla}^{(\vec{x})} S \quad (\text{Führungsbedingung}), \quad (2-13)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} S + \frac{1}{2m} (\vec{\nabla}^{(\vec{x})} S)^2 + V \quad (\text{Hamilton-Jacobi-Gleichung}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{p} = -\vec{\nabla}^{(\vec{x})} E \quad (\text{Bewegungsgleichung der Felder}).$$

Sie beschreiben die Bewegung, oder wie man auch sagt, die Dynamik von Wirkungen, und nicht die von Körpern! Sie stellen einen logischen Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung her und haben nichts Körperliches an sich.

Ein solcher rein kausaler Zusammenhang ist zum einen in quantenmechanischen Experimenten wie in Abbildung 2-5 beobachtbar. Ein Glühdraht gibt durch interne Kraftwirkungen Energie und Impuls ab, seine Energie und sein Impuls nehmen ab. Diese treten erst wieder auf einer Photoplatte oder einem Leuchtschirm in Erscheinung und bilden dort mit der Zeit ein Interferenzmuster. Zwischen der Quelle, also dem Glühdraht, und der Wirkung auf dem Leuchtschirm wird die Wirkung nicht beobachtet. Berücksichtigt man die Unschärfe der Wirkung, dann lässt sich das Interferenzmuster auf dem Bildschirm genau berechnen. Es ist logische Konsequenz des objektiven Kausalzusammen-

hanges. Objekte sind Quelle und Leuchtschirm. In der Beschreibung des Kausalzusammenhanges selber taucht kein Objekt auf. Die Vorstellung eines solchen Objekts, etwa eines Elektrons, das die Wirkung vom Glühdraht zum Photopapier überträgt, führt zu eklatanten Widersprüchen. Das Elektron müsste auf verschiedenen Wegen von der Quelle zum Detektor gelangen und mit sich selbst interferieren. So etwas tut ein Objekt nicht. Das werden wir im Kapitel über die Quantenmechanik weiter vertiefen.

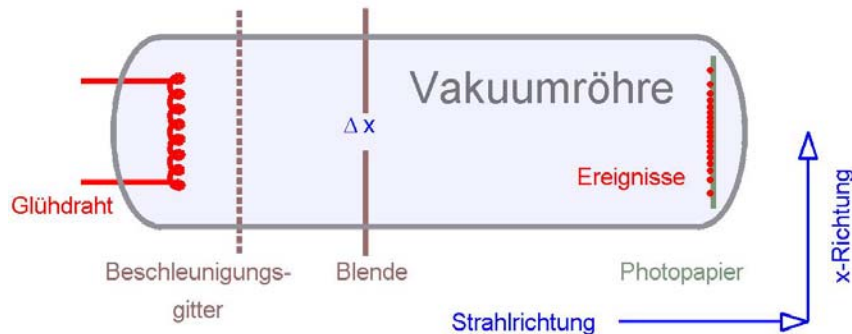


Abbildung 2-5

Die Ausbreitung einer Wirkung von Quelle zu Detektor kann in einer so genannten Elektronenröhre, zum Beispiel einer Braunschen Fernsehrohr, nachgewiesen werde. Ein Glühdraht gibt Energie und Impuls ab und diese treten auf einem Photopapier oder einem Leuchtschirm wieder in Erscheinung. Zwischen Quellen und Detektor besteht ein logischer Zusammenhang. Dieser beruht auf der Kontextunabhängigkeit oder Objektivität des Kausalzusammenhanges. Die Vorstellung, dass ein körperliches Elektron von der Quelle zum Detektor gelangt, ist bei kleinen Wirkungen im Bereich des Planckschen Wirkungsquantums  $h$  nicht mehr haltbar.

Eine andere Möglichkeit, (2-13) auszuwerten, ist, die Wirkung, oder besser den Impuls und die Energie, wie in Abbildung 2-4 einem Körper oder aber einem massiven Medium wie Wasser, Luft oder festen Stoffen zuzusprechen. Dies ist für Wirkungen, die im Vergleich zum Planckschen Wirkungsquantum  $h$  groß sind, möglich. Die Unschärfe raumzeitlicher Beziehung spielt da keine Rolle. Man kommt so auf die klassische Mechanik. Bevor wir diese in Angriff nehmen, studieren wir jedoch ein paar eigenständige Lösungen von der Hamilton-Jakobi-Gleichung (2-13). Es ist sehr interessant festzustellen, inwiefern diese für sich alleine überhaupt sinnvoll sind.

## Computersimulationen mit FEMLAB

Über die Methode der Finiten Elemente zur Lösung partieller Differentialgleichungen und die Übertragung in die Computersoftware FEMLAB gibt es in diesem Buch einen Anhang. Für den groben Zusammenhang der Grundglei-

chungen mit den Computersimulationen definieren wir hier kurz die Funktionen, die in FEMLAB angegeben werden müssen:

Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{a}_{\text{Masse}} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\vec{\Gamma}}_{\substack{\text{erhaltener} \\ \text{Strom}}} = \underbrace{F}_{\text{Quelle}}, \quad \text{FEMLAB 2-1}$$

$$\forall \vec{x} \in \text{Gebiet};$$

Dirichlet Randbedingungen:  $R = 0, \quad \forall \vec{x} \in \text{Rand};$

von Neumann Randbedingungen:  $G = -\hat{n} \cdot \vec{\Gamma}, \quad \forall \vec{x} \in \text{Rand}.$

Die so genannte Masse  $a$ , der erhaltene Strom  $\Gamma$ , die Quelle  $F$  und die Randfunktionen  $R$  und  $G$  dürfen in fast beliebiger Weise von den Feldern abhängen, hier zunächst also mal vom Wirkungsfeld  $S$ .  $R = S - \vec{p}_0 \cdot \vec{x}$  würde zum Beispiel bedeuten, dass für alle Punkte  $x$  auf dem Rand eines Gebietes das Wirkungsfeld  $S$  die Werte  $p_0 x$  erhält.

### Freie Ausbreitung einer Wirkung

In einem unendlichen ausgedehnten, kräftefreien Raum kann die Hamilton-Jakobi-Gleichung (2-13) analytisch gelöst werden:

$$S = \vec{p}_0 \cdot \vec{x} - E_0 t \rightarrow \quad (2-14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S + \underbrace{\frac{1}{2m} \left( \vec{\nabla}^{(\vec{x})} S \right)^2}_{\text{Energiefunktion}} = -E_0 + \underbrace{\frac{1}{2m} \vec{p}_0^2}_{=0} = 0.$$

Der Impuls  $p_0$  und die Energie  $E_0$  treten als von Raum und Zeit unabhängige Parameter auf und wir sehen, wie sich aus der Hamilton-Jakobi-Gleichung (2-13) die Energiefunktion (2-12) ergibt und gelöst wird.

Für die Computersimulation mit FEMLAB wählen wir die Vorgaben

Parameter:	Gebiet:	Zeit:	FEMLAB 2-2
$\begin{cases} m = 1, \\ p_0 = 1; \end{cases}$	Linie, $x \in [-1, 1];$	$t \in [0, 3];$	
Gleichung:	Rand:	Startwert:	
$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} S}_{a=1} + \underbrace{0}_{\Gamma=0} = - \underbrace{\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2}_{=F};$	$\underbrace{0}_R = 0,$ $\underbrace{0}_G = 0;$	$S = p_0 x.$	

Damit ergibt sich die in Abbildung 1-1 dargestellte Zeitentwicklung der Wirkungskfunktion.

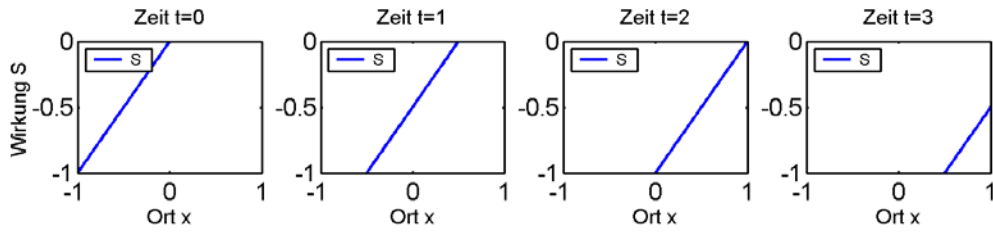


Abbildung 2-6

Zeitliche Entwicklung eines freien Wirkungsfeldes mit Anfangswerten  $S=p_0x$  und  $m=1, p_0=v^{(s)}=1$ .

Diese zeitliche Entwicklung ist nicht besonders spektakulär. Bemerkenswert und auf den ersten Blick vielleicht etwas überraschend ist, dass sich die Gerade nicht mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v^{(s)}=1$  nach rechts verschiebt, sondern nach (2-8) mit der Geschwindigkeit von Punkten auf den Höhenlinien  $v^{(H)}=1/2$ . Es ist ja

$$E = E_o = \frac{1}{2m} p_0^2, \quad \text{also} \quad \begin{cases} v^{(s)} = \frac{\partial E}{\partial p_0} = \frac{1}{m} p_0 = 1 & \text{und} \\ v^{(H)} = \frac{E}{p_0} = \frac{1}{2m} p_0 = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2-15)$$

### Freie Ausbreitung mit verschiedenen Impulsen

Die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung (2-13) hängt natürlich entscheidend von den Anfangswerten des Wirkungsfeldes ab. Wir konstruieren uns ein Startfeld, bei dem der Impuls  $p_1=1$  nach rechts hin übergeht in den Impuls  $p_2=2$ . Die Felder sind in Abbildung 2-7 zu sehen.

Parameter:	Ausdruck:
$\begin{cases} a = 15, & m = 1, \\ p_1 = 1, & p_2 = 2, \\ x_0 = -\frac{1}{2}; \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan}\left(a(x - x_0)\right) + \frac{1}{2} \in [0, 1], \\ S_0(x) = (x - x_0)(p_1 + (p_2 - p_1)f(x)); \end{cases}$
Gebiet:	Zeit:
Linie, $x \in [-1, 1]$ ;	$t \in [0, 0.5]$ ;
Gleichung:	Rand:
$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} S}_{a=1} + \underbrace{0}_{\Gamma=0} = - \underbrace{\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2}_{=F};$	$\begin{cases} \underbrace{\left( S_0(x) - \frac{1}{2m} p_1^2 t \right)}_{R^{(links)}} - S = 0, \\ \underbrace{\left( S_0(x) - \frac{1}{2m} p_2^2 t \right)}_{R^{(rechts)}} - S = 0, \end{cases}$
	$\underbrace{0}_{\tilde{G}} = 0;$
Startwert:	
$S = (x - x_0)(p_1 + (p_2 - p_1)f(x)).$	

## FEMLAB 2-3

Vor allem am Impulsfeld in Abbildung 2-7 unten ist zu sehen, wie der abrupte Impulswechsel mit der Zeit flacher wird. Je größer der Impuls ist, desto schneller bewegt sich der entsprechende Punkt auf der Höhenlinie des Wirkungsfeldes nach rechts. Die Bewegung rechts ist schneller und so kommt es zu dieser Abflachung.

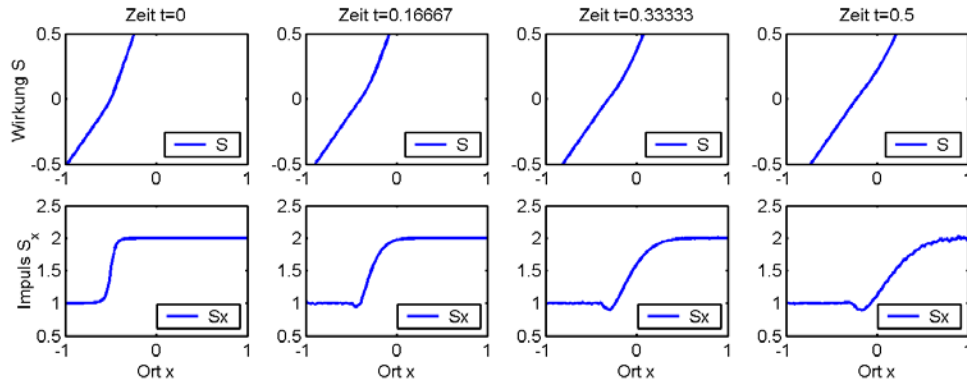


Abbildung 2-7

Zeitliche Entwicklung eines freien Wirkungsfeldes mit 2 verschiedenen Startimpulse  $p_1=1$  (ganz links) und  $p_2=2$  (weiter rechts). Es ist wieder  $m=1$ .

### Zerfließen des Wirkungsfeldes

Interessant vor allem im Hinblick auf die Quantenmechanik ist das Zerfließen eines Gauß-förmigen Wirkungsfeldes.

Parameter:	Gebiet:	Zeit:	<i>FEMLAB</i>
$\begin{cases} a = 0.32, & m = 1, \\ p_1 = 1; \end{cases}$	Linie, $x \in [-1, 1]$ ;	$t \in [0, 0.21]$ ;	2-4
Gleichung:	Rand:	Startwert:	
$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} S}_{a=1} + \underbrace{0}_{\Gamma=0} = - \underbrace{\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2}_{=F};$	$\begin{matrix} 0 = 0, \\ \text{ } \\ 0 = 0; \end{matrix}$	$S = -\exp(-x^2 / a^2).$	

Das Wirkungsfeld zerfließt mit der Zeit, allerdings sind dem Grenzen gesetzt. Es kommt zu einem Phänomen, das mit dem Brechen von Wasserwellen am Strand vergleichbar ist. Teile des Wirkungsfeldes mit großen Impulsen holen, salopp gesagt, Bereiche mit kleinen Impulsen ein, können diese aber nicht überholen. Der Übergangsbereich von großen zu kleinen Impulsen wird immer schärfer, bis die numerische Genauigkeit überschritten wird und die Computersimulation abbricht.

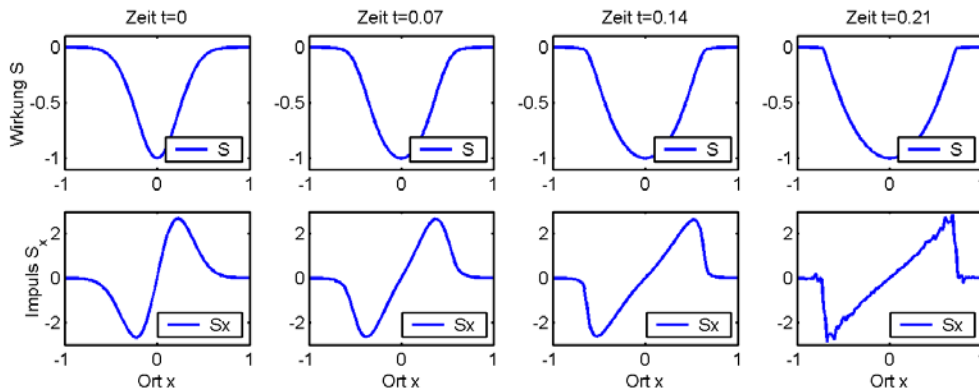


Abbildung 2-8

Zeitliche Entwicklung eines freien, Gauß-förmigen Wirkungsfeldes mit  $m=1$ . Nachdem die Gauß-form des Feldes zunächst zerfließt, kommt es am Ende zu einem Brechen, wie bei Wasserwellen, die auf den Strand auflaufen.

Interessant ist, dass diese Probleme bei Berücksichtigung der Unschärfe raumzeitlicher Bezüge in der Quantenmechanik nicht auftreten. Der steile Übergang von großen zu kleinen Impulsen, der hier die Methoden der Computersimulation überfordert, tritt in der Natur tatsächlich gar nicht auf.

Auch in der klassischen Physik gibt es kein Brechen des Wirkungsfeldes. Das wird verhindert durch die Wechselwirkung zwischen den Raumzeitpunkten, in der Strukturmechanik durch die elastischen Kräfte und in der Hydrodynamik durch die Reibungskräfte.

### Quelle einer Wirkung

Die Ausbreitung von Wirkungen wird immer durch Kräfte ausgelöst. Kräfte sind die Quellen und Senken des Wirkungsfeldes. Wir wählen nun das Gauß-förmige Potential  $V$  in Abbildung 2-9 als Quelle. Die entsprechende Kraft kann als räumliche Ableitung dieses Potentials angegeben werden.

Parameter:	Ausdruck:	Gebiet:	<i>FEMLAB</i>
$\{m=1, \quad p_0=1;$	$V = \exp(-(x/.1)^2);$	Linie, $x \in [-1,1];$	2-5
Gleichung:	Rand:	Zeit:	
$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} S}_{a=1} + \underbrace{0}_{\Gamma=0} = -\underbrace{\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2}_{=F};$	$\underbrace{0}_R = 0,$ $\underbrace{0}_G = 0;$	$t \in [0,0.5].$	

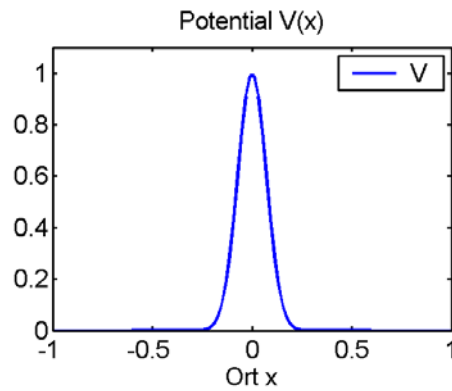


Abbildung 2-9

*Gauß-förmiges Potential als Ursache oder Quelle einer Wirkung.*

Wir sehen in Abbildung 2-10, wie sich das Wirkungsfeld mit der Zeit aufbaut und zerfließt. Am Potentialrand gibt es wieder ein Brechen des Feldes, was eine weitere Zeitentwicklung unterbindet.

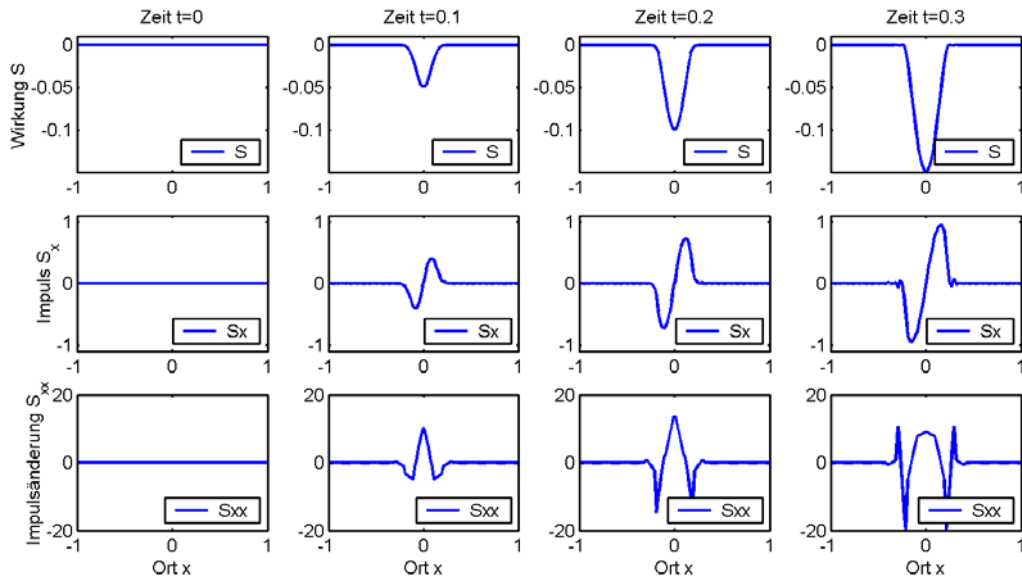


Abbildung 2-10

Zeitliche Entwicklung eines Wirkungsfeldes aufgrund des Quellpotentials in Abbildung 2-9. Wieder ist  $m=1$ .

## Ausblick

Offensichtlich hat die Beschreibung von Wirkungen in der obigen Form noch ihre Schwächen. Die Ausbreitung von Wirkungen kann in der Regel nur kurzzeitig verfolgt werden, dann ergeben sich Widersprüche. Vor allem erklärt die Beschreibung noch keine wirklichen physikalischen Phänomene. Ihr fehlt noch der Stoff, aus dem die physikalische Welt gemacht ist, nämlich die Materie.

Die physikalische Beschreibung der Materie entwickelt sich aus dem Formalismus ganz logisch. Dazu muss man nur etwas kritischer mit den Abstraktionen umgehen, die zur mathematischen Beschreibung unserer bewussten Welterfahrung vorgenommen wurden: raumzeitliche Bezüge wurden durch absolute, scharfe Raum-Zeit-Punkte ersetzt und eine ganzheitliche Welterfahrung wurde auf eine rein körperliche Welt projiziert. Überlegen wir uns das noch ein wenig genauer.

Unser bewusstes Erleben raumzeitlicher Bezüge wird abgebildet auf Koordinatensysteme, die wesentlich auf der Idee des euklidischen Punktes beruhen. Der euklidische Punkt ist ein Objekt ohne Ausdehnung und ohne Eigenschaften, was in der Natur nicht existiert. Unsere Bewusstseinsinhalte nehmen immer Raum ein und haben immer irgendwelche Eigenschaften, an denen wir sie er-

kennen können. Wie Zenon von Elea und Aristoteles [VERH94] begründen, würde eine Welt, die auf einem solchen mathematischen Punktraum basiert, in Bewegungslosigkeit erstarren.

Ferner muss für jedes Koordinatensystem ein willkürlicher Bezugspunkt gewählt werden. Aus den relativen raumzeitlichen Bezügen unserer Bewusstseinsinhalte wird so ein absoluter Raum. Wie bekannt ist, hat dies enorme Konsequenzen, vor allem wenn man größere Geschwindigkeiten betrachtet, etwa bei Lichtsignalen. Das werden wir in einem eigenen Kapitel noch beleuchten.

Als Letztes wird durch die Forderung nach Objektivität der Wirkungen das Wirkungsfeld nicht vollständig festgelegt. Wirkungen selbst können wir ja nicht direkt messen, sondern nur Kräfte. Diese werden aus den räumlichen und zeitlichen Ableitungen des Wirkungsfelds berechnet. Es ist daher möglich, zum Wirkungsfeld, das der Hamilton-Jacobi-Gleichung in (2-13) genügt, ein weiteres, so genanntes Eichfeld zu addieren, ohne dass sich an der Bewegungsgleichung etwas ändert.

Um eine realistische physikalische Beschreibung der Natur zu erhalten, müssen wir an diesen drei Punkten noch arbeiten und eine bessere Übereinstimmung mit unserer bewussten Welterfahrung herstellen.

Der Euklidische Punkt ist nach jetzigem Stand der Mathematik eine unverzichtbare Grundlage für die formale Beschreibung von Raum und Zeit, für die Infinitesimalrechnung und für die Naturbeschreibung mit Differentialgleichungen und Feldern. Auf all das sind wir angewiesen, wenn wir Physik betreiben wollen.

Eine Anpassung an die tatsächlichen Gegebenheiten kann jedoch mit statistischen Methoden erreicht werden. Wir bleiben beim Wirkungsfeld  $S$ , verzichten jedoch auf eine punktgenaue Angabe von Ursache bzw. Quelle und Wirkung. Ein Kraftstoß findet nicht exakt am Ort  $x$  und zur Zeit  $t$  statt, sondern mit einer bestimmten Verteilung entsprechend einem Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$ . Die Wirkung des Kraftstoßes wird zu einem späteren Zeitpunkt an einem anderen Ort entsprechend dem Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$  registriert. Die Dynamik dieses Wahrscheinlichkeitsfeldes wird allein durch die Kontinuität festgelegt: die Wahrscheinlichkeit dafür, dass überhaupt eine Wirkung eintritt, ist genau so groß wie die Wahrscheinlichkeit für die Ursache. Wie das mathematisch formuliert wird, behandeln wir im nächsten Kapitel.

Die Unschärfe von Ursache und Wirkung führt zu einem ganz bestimmten Potential in der Hamilton-Jacobi-Gleichung (2-13). Zum Beispiel kann man nicht mehr sagen, dass ein Körper tatsächlich in Ruhe ist. Es wird immer eine gewisse Wahrscheinlichkeit für eine kleine Bewegung geben, und die mittlere Energie dieser Bewegung wird durch das

$$\text{Unschärfepotential} \quad V = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (2-16)$$

erfasst.  $\hbar$  hängt dabei mit dem Planckschen Wirkungsquantum zusammen und ist eine der wenigen Naturkonstanten der Physik.  $\hbar$  gibt das Genauigkeitsmaß an, mit dem Wirkungen gemessen werden können.

Wir werden sehen, dass mit dem Unschärfepotential (2-16) die Hamilton-Jacobi-Gleichung (2-13) und der Kontinuitätsgleichung für das Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$  zusammen mathematisch exakt der Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik entsprechen.

Die Probleme der Ausbreitung von Wirkungen, wie wir sie im letzten Abschnitt hatten, lösen sich damit auf.

Durch die Forderung nach Objektivität projizieren wir die Welt auf eine dingliche Welt, was dieser jedoch nicht ganz gerecht wird. Das Wirkungsfeld  $S$  wird so nicht vollständig festgelegt. Die Freiheitsgrade, die unsere Objektivitätsforderung noch offen lässt, führen auf die Wechselwirkung zwischen den Körpern, auch zu allen Lichtphänomenen.

Wir können das Wirkungsfeld  $S$  durch ein so genanntes Eichfeld  $S^{(Eich)}$  erweitern. Die Ableitungen dieses Feldes bezeichnen wir zunächst willkürlich als elektrisches und magnetisches Potential. Das wird später gerechtfertigt, wenn wir aus der Kontinuität dieser Felder die Maxwellschen Gleichungen abgeleitet haben:

$$S \rightarrow S' = S + S^{(Eich)} \quad (2-17)$$

$$\rightarrow \begin{cases} E \rightarrow E' = \underbrace{E}_{-\frac{\partial S}{\partial t}} + \underbrace{\varphi}_{-\frac{\partial S^{(Eich)}}{\partial t}}, & \varphi \rightarrow \text{Elektrisches Potential;} \\ \vec{p} \rightarrow \vec{p}' = \underbrace{\vec{p}}_{\vec{\nabla} S} + \underbrace{\vec{A}}_{\vec{\nabla} S^{(Eich)}}, & \vec{A} \rightarrow \text{Magnetisches Potential.} \end{cases}$$

Eine Energiebilanz zeigt noch etwas grob, wie sich aus der Eichung des Wirkungsfeldes eine Wechselwirkung zwischen Körpern ergibt:

$$\begin{aligned}
 & 0 = E + \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{Hamilton-Jacobi-Gleichung}} + V \quad (2-18) \\
 & \quad \quad \quad \xrightarrow{\text{Eichtransformation}} \\
 & 0 = E' + \frac{p'^2}{2m} + V = E + \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{mechanische Energie}} + V + \underbrace{\varphi + \frac{\vec{A}^2}{2m}}_{\text{elektrodynamische Energie}} + \underbrace{\frac{\vec{p} \cdot \vec{A}}{m}}_{\text{Wechselwirkung}} \quad (\text{Nichtrelativistisch})
 \end{aligned}$$

Da wir unsere Betrachtungen hier noch in einem absoluten Raum vornehmen, stimmt (2-18) nicht ganz mit der bekannten Energiefunktion für ein gekoppeltes mechanisches und elektrodynamisches System überein. Wir werden später noch die Relativität der raumzeitlichen Bezüge berücksichtigen und den korrekten Energieausdruck erhalten.

Zusammen mit der Unschärfe des objektiven Kausalzusammenhangs und den Eichfreiheitsgraden des Wirkungsfeldes werden sich aus unserem Formalismus atomare Strukturen ergeben. Diese stehen wiederum untereinander in elektrodynamischer Wechselwirkung und bilden insgesamt die Grundlage der Materie, so wie wir sie Erleben: als Festkörper, Flüssigkeiten oder Gase.

In Abbildung 2-11 ist der Zusammenhang der physikalischen Einzelgebiete dargestellt. Wir werden ins im Weiteren jedoch nicht streng an den hier dargestellten logischen Aufbau halten, sondern etwas vorgreifen und im nächsten Kapitel zunächst elastische Festkörper beschreiben. Die Grundlage dafür ist natürlich die Objektivität der Wirkungen entsprechend der Hamilton-Jacobi-Gleichung (2-13). Die atomare Struktur der Materie und die atomaren Wechselwirkungen fließen in einem einfachen harmonischen Potential ein. Das ist der kürzeste und einfachste Weg von den recht abstrakten Überlegungen in diesem Kapitel zur Beschreibung konkreter physikalischer Phänomene.

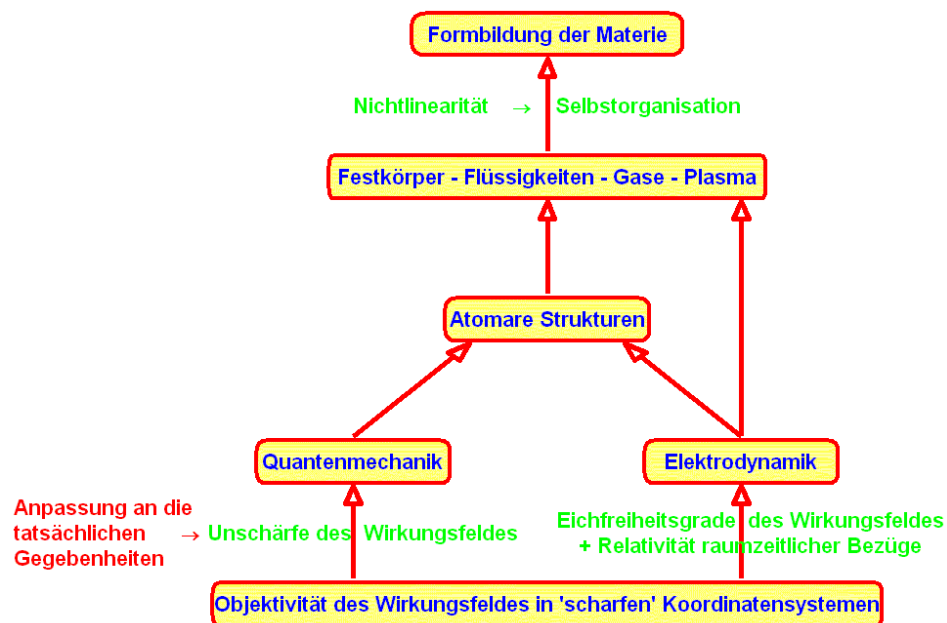


Abbildung 2-11

*Aufbau der physikalischen Zusammenhänge. Eine einfache Beschreibung raumzeitlicher und kausaler Bezüge führt auf eine noch 'holprige' Kausaldynamik. Durch offensichtlich notwendige Verfeinerungen ergeben sich atomare Strukturen und atomare Wechselwirkungen. Diese bilden die Grundlage der unmittelbar erfahrbaren physikalischen Phänomene bei Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen. Der physikalische Aufbau gipfelt in der Selbstorganisation aufgrund nichtlinearer Terme in den Bewegungsgleichungen der Materie.*



# 3. Klassische Mechanik und elastische Festkörper

## Klassische Mechanik

Das Wirkungsfeld  $S$  beschreibt einen objektiven Kausalzusammenhang und nicht die Bewegung eines Objektes. Das ist sehr allgemein und führt weit über die klassische Mechanik hinaus in die Quantenmechanik und in die Elektrodynamik. Nun wollen wir jedoch zuerst einmal den Zusammenhang mit der klassischen Mechanik herstellen.

In der klassischen Mechanik werden Punktteilchen oder kontinuierliche Medien wie Festkörper, Flüssigkeiten oder Gase betrachtet. Jedes Punktteilchen oder jedes Volumenelement des kontinuierlichen Mediums bewegt sich dabei auf einer Bahnkurve. Das entspricht dem Eindruck, den wir bei Betrachtung vieler physikalischer Phänomene haben. Wenn wir einen Stein werfen, sehen wir seine Bewegung auf einer Flugbahn oder Bahnkurve.

Atome, Licht oder Magnetismus erscheinen jedoch nicht auf diese Art in unserem Bewusstsein, und daher sind deren Wirkungen anders zu behandeln. Unschärfe und Eichfreiheitsgrade des Wirkungsfeldes spielen dann eine entscheidende Rolle. In einem ersten Schritt zur Behandlung bewusst erlebbarer Phänomene können wir dies jedoch außer Acht lassen.

Der Zusammenhang zwischen Wirkungsfeld und Bahnkurven der Körper wird durch das Geschwindigkeitsfeld der Wirkung hergestellt. Rein gedanklich machen wir hier die Annahme, dass der Körper oder das Volumenelement zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine genau bestimmte Position  $x$  und die Geschwindigkeit des Wirkungsfeldes  $v=v^{(S)}$  hat. Dies ist wirklich nur eine gedankliche Annahme, die experimentell nicht nachvollzogen werden kann. Es sind ja zum Beispiel immer nur mittlere Geschwindigkeiten messbar, so dass  $v=v^{(S)}$  nicht nachvollzogen werden kann. Aber die Annahme ist vernünftig und führt sehr weit. Wir haben hier jedoch genau die Stelle identifiziert, wo Verfeinerungen unserer Überlegungen ansetzen müssen.

Die Grundlagen der Teilchenphysik, und Teilchenphysik kann nur klassisch sein und nicht quantenmechanisch, sind also

Position des Objekts:  $\vec{x}(t);$  (3-1)

Geschwindigkeit des Objekts:  $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(t) = \underbrace{\vec{v}^{(s)}(\vec{x}(t), t)}_{\text{Geschwindigkeitsfeld der Wirkung}};$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen: 
$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{p})}_{=\vec{v}^{(s)}} E; \\ \dot{\vec{p}} = \underbrace{-\vec{\nabla} E}_{=\text{Kraft}}. \end{cases}$$

Betrachten wir als einfaches Beispiel den freien Fall eines Körpers, wie er in Abbildung 3-1 dargestellt ist. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung und eine ihrer analytischen Lösungen sind:

Hamilton-Jacobi-Gleichung: 
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \underbrace{mgy}_{\text{Potential } V} = 0;$$

Lösung: 
$$S = -\left(E^{(x)} + E^{(y)}\right)t + 2m\sqrt{E^{(x)}}x - \frac{\left(2m\left(E^{(y)} - mgy\right)\right)^{3/2}}{3m^2g}.$$
 (3-2)

$E^{(x)}$  und  $E^{(y)}$  sind die Konstanten (Energien) der Bewegung. Sie können entsprechend dem Startpunkt und der Startgeschwindigkeit des Wurfes festgelegt werden. Aus der Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung ergibt sich das Geschwindigkeitsfeld zu

$$\vec{v}^{(s)} = \vec{\nabla}(\vec{p}) E = \frac{1}{m} \vec{p} = \frac{1}{m} \vec{\nabla} S = \begin{pmatrix} 2\sqrt{E^{(x)}} \\ \sqrt{\frac{2(E^{(y)} - mgy)}{m}} \end{pmatrix}. \quad (3-3)$$

Die klassische Bahnkurve eines Körpers ist dann bestimmt durch

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \int_0^t \vec{v}^{(s)}(\vec{x}, t') dt'. \quad (3-4)$$

Das Integral kann natürlich analytisch berechnet werden und führt zu dem allgemein bekannten Ergebnis

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{2}gt^2. \quad (3-5)$$

Interessant ist aber das numerische Vorgehen. Man hangelt sich in kleinen Schritten entlang eng benachbarter Raumzeitpunkte der Trajektorie, im einfachsten Fall mit der Euler-Methode:

$$\begin{cases} x(t+h) = x(t) + 2\sqrt{E^{(x)}}h, & (h \text{ ist die Schrittweite}); \\ y(t+h) = y(t) + \sqrt{\frac{2(E^{(y)} - mgy(t))}{m}}h + O(h^2). \end{cases} \quad (3-6)$$

Das geht also genau entsprechend unserer Vorstellungen des Zusammenhanges zwischen dem abstrakten Wirkungsfeld und den klassischen Bahnkurven. In wirklichen Rechnungen können wir die Schrittweite  $h$  niemals beliebig klein machen, genau entsprechend unseren verfeinerten Vorstellungen über Raum und Zeit.

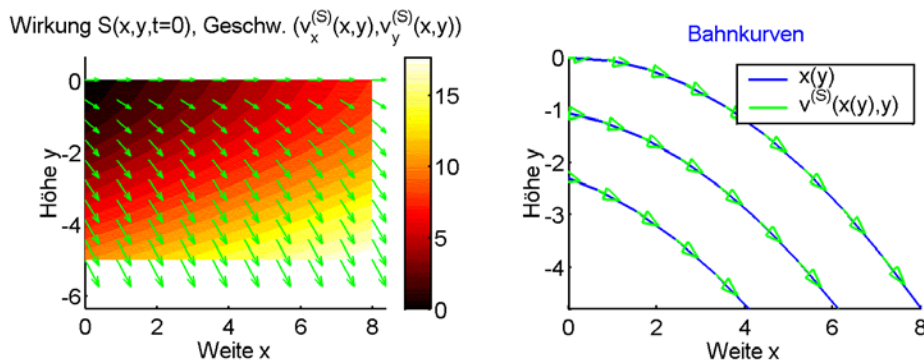


Abbildung 3-1

Links: Wirkungsfeld des freien Falles eines Körpers in einem homogenen (konstanten) Kraftfeld. Die Werte des Wirkungsfeldes sind Farbkodiert entsprechend der Farbtabelle. Die grünen Pfeile geben das Geschwindigkeitsfeld in Form von Vektoren an.

Rechts: Bahnkurven eines frei fallenden Körpers im homogenen Kraftfeld. Die grünen Pfeile entsprechen denen im linken Bild.

## Das Hamiltonsche Prinzip

Das Hamiltonsche Prinzip hat eine lange Geschichte und in der Regel eine recht komplizierte mathematische Begründung. Es besagt:

*Die Wirkungsfunktion ist für die wirklich durchlaufene Bahnkurve extremal.*

Manchmal wird es fälschlicherweise als Prinzip der kleinsten Wirkung bezeichnet, tatsächlich ist die Wirkungsfunktion entlang der Bahnkurve maximal.

Den klassischen Verlauf von Bahnkurven haben wir bereits oben gut begründet und es ist nun relativ einfach, den Zusammenhang mit dem Hamiltonschen Prinzip herzustellen. Da die Bewegung der Körper auf Bahnkurven immer mit der Richtung des Geschwindigkeitsfeldes  $v^{(s)}$  der Wirkung  $S$  zusammenfällt, bewegt sich der Körper immer senkrecht zu den Höhenlinien des Wirkungsfeldes. Das ist auch in Abbildung 3-1 zu erkennen.

Entlang den Höhenlinien würde sich die Wirkung überhaupt nicht ändern, die maximale Änderung findet bei einer Bewegung senkrecht zu den Höhenlinien statt, also gerade für die klassischen Bahnkurven. Die Formulierung dieser Tatsache als mathematisches Variationsproblem ist genau das Hamiltonsche Prinzip. Es ermöglicht eine elegante mathematische Herleitung der Bewegungsgleichungen für Bahnkurven.

Auf Bahnkurven ist das totale Differential des Ortes  $d\mathbf{x}=\mathbf{v}dt$ , und damit kann das totale Differential des Wirkungsfeldes  $dS$  mit Hilfe der so genannten Lagrange-Funktion formuliert und als Extremalprinzip angegeben werden:

$$dS = \vec{p} \cdot d\vec{x} - E dt = \underbrace{(\vec{p} \cdot \vec{v} - E)}_L dt, \quad (L \text{ ist die Langrange-Funktion});$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int dS = \int L dt = \text{extremal} & \text{bzw. } \delta \int dS = 0, \quad (\text{Punktteilchenmechanik}); \\ \int dS d\vec{x} = \int L dt d\vec{x} = \text{extremal} & \underbrace{\delta \int dS d\vec{x}}_{\substack{\text{Variation des} \\ \text{Wirkungsintegrals}}} = 0, \quad \underbrace{(\text{Kontinuumsmechanik})}_{\substack{\text{Elastizitätstheorie, Hydrodynamik, ...}}}. \end{array} \right.$$

(3-7)

Der Vorteil der Formulierung als Variationsproblem besteht vor allem in der Möglichkeit partiell zu integrieren. Damit können Ableitungen der unbekannten Bahnkurven, Verschiebungsfelder und ähnlichem auf die vorgegebenen Potentiale abgewälzt werden. Wir werden das gleich sehen, zum Beispiel bei der Punktmechanik:

$$\delta \int dS = \delta \int (\vec{p} \cdot \vec{v} - E) dt = \int \left( \vec{v} \cdot \delta \vec{p} + \underbrace{\vec{p} \cdot \delta \vec{v}}_{\substack{= \vec{p} \cdot \delta \dot{\vec{x}} = \\ \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \delta \vec{x}) - \dot{\vec{p}} \cdot \delta \vec{x}}} - \vec{\nabla}^{(\vec{x})} E \delta \vec{x} - \vec{\nabla}^{(\vec{p})} E \delta \vec{p} \right) dt \quad (3-8)$$

$$= \int \left( \underbrace{-\left(\dot{\vec{p}} + \vec{\nabla}^{(\vec{x})} E\right) \delta \vec{x}}_{=0} + \underbrace{\left(\vec{v} - \vec{\nabla}^{(\vec{p})} E\right) \delta \vec{p}}_{=0} \right) dt + \underbrace{\vec{p} \cdot \delta \vec{x}}_{=0} \Big|_{\text{Start}}^{\text{Ziel}}.$$

Impuls und Geschwindigkeit werden separat variiert, sie sollen ja in Übereinstimmung gebracht werden. Wir erhalten so eine gute mathematische Begrün-

derung der Bewegungsgleichungen in (3-1). Sie sind formal mit den Bewegungsgleichungen des Wirkungsfeldes  $S$  aus dem letzten Kapitel identisch, gelten nun aber auf Bahnkurven.

Durch dieses Vorgehen erhält man ausschließlich lokale Zusammenhänge. Die Nichtlokalitäten der Quantenmechanik werden hier aus dem Kausalzusammenhang herausprojiziert. Ein weiteres Beispiel für die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips sehen wir gleich bei der Behandlung elastischer Festkörper.

## Mechanische Grundgleichungen

Die Grundgleichungen der klassischen Mechanik lauten also

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{\nabla}^{(\vec{x})} S, & (\text{Führungsbedingung}); & (3-9) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} S + \frac{1}{2m} \left( \vec{\nabla}^{(\vec{x})} S \right)^2 + V, & (\text{Hamilton-Jacobi-Feldgleichung}); \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{p} &= -\vec{\nabla}^{(\vec{x})} E, & (\text{Bewegungsgleichung auf Bahnkurven}).\end{aligned}$$

## Beschreibung von Materialspannungen durch ein Potential

Den Aufbau der Materie erklären wir noch im Verlauf der nächsten Kapitel aus der Objektivität der Wirkung, ihrer Unschärfe und ihrer Eichfreiheitsgrade. An dieser Stelle erfassen wir effektiv die atomaren Strukturen und ihre Wechselwirkung durch ein einfaches Spannungspotential. Um dieses angeben zu können, müssen wir noch einige wenige physikalische Größen der Elastizitätstheorie einführen.

### Das Verschiebungsfeld $u$

Materialspannungen entstehen, wenn sich verschiedene Bereiche des Materials gegeneinander verschieben. Wir können das Verschiebungsfeld sehr effizient durch seine zeitliche Ableitung angeben. Das Material verschiebt sich, wenn es sich mit einer Geschwindigkeit bewegt. Die Gesamtverschiebung eines Volumenelements ergibt sich dann durch zeitliche Integration. Wir definieren also die Verschiebung  $u$  über ihre zeitliche Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} = \frac{\vec{p}}{m}. \quad (3-10)$$

### Das Verzerrungstensorfeld

Spannung treten auf, wenn sich verschiedene Gebiete des Materials unterschiedlich verschieben. Man spricht von Verzerrungen und führt das Verzerrungsfeld  $U$  mit Hilfe der Jacobi-Matrix des Verschiebungsfeldes  $u$  ein:

(3-11)

$$U = \frac{1}{2} (J_u + J_u^t) + O(u^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + O(u^2),$$

$$\text{mit } J_u = \vec{\nabla} \otimes \vec{u} = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) \quad (\text{Jacobi-Matrix}).$$

### Kompression und Torsion (Scheerung)

Durch Verzerrungen im Material entstehen Volumenänderungen oder Kompressionen, die wir mit dem Verzerrungsfeld leicht berechnen können:

$$\begin{aligned} dV' &= dx' \wedge dy' \wedge dz' \\ &= (dx + du_x) \wedge (dy + du_y) \wedge (dz + du_z) \\ &= (dx + U_{xi} dx_i) \wedge (dy + U_{yi} dx_i) \wedge (dz + U_{zi} dx_i) + O(u^2) \\ &= dV \left( 1 + \underbrace{\text{Spur}(U)}_{\text{Kompression}} \right) + O(u^2). \end{aligned} \quad (3-12)$$

Die Spur des Verzerrungstensorfeldes ist also das Maß für Kompression. Damit teilen wir das Verzerrungsfeld auf in einen Anteil, der allein mit der Kompression des Materials zu tun hat und einen Rest, der Torsion beschreibt:

$$U = \underbrace{\frac{1}{3} \text{Spur}(U) \mathbf{1}}_{\substack{\equiv U^{(K)} \\ \text{Kompressionsanteil}}} + \underbrace{U - \frac{1}{3} \text{Spur}(U) \mathbf{1}}_{\substack{\equiv U^{(T)} \\ \text{Torsionsanteil}}}, \quad \text{mit } \text{Spur}(U^{(T)}) = 0. \quad (3-13)$$

### Das Spannungspotential für das Hooksche Gesetz

Bei einer elastischen Feder ist die Federkraft proportional zur Dehnung der Feder. Das ist ein Beispiel des Hookschen Gesetzes:

*Zwischen der Dehnung eines elastischen Körpers und der Spannung  
besteht ein linearer Zusammenhang.*

Dies wenden wir nun auf unser elastisches Medium an und schreiben

$$V = \frac{1}{2} \lambda \text{Spur}(U)^2 + \mu \sum_{ij} U_{ij}^{(T)2}; \quad (3-14)$$

mit

 $\lambda$  : Kompressionsmodul, $\mu$  : Torsionsmodul.

Dieses Potential enthält räumliche Ableitungen des gesuchten Verschiebungsfeldes  $u$ . Für die Ableitung der Bewegungsgleichungen empfiehlt sich das Prinzip der extremalen Wirkung, also das Hamiltonsche Prinzip.

### Bewegungsgleichung für die Verschiebung $u$ mit dem Hamiltonschen Prinzip

Die Aufteilung in Kompressions- und Torsionsanteile in der Bewegungsgleichung des Verschiebungsfeldes nehmen wir später vor. Zunächst betrachten wir der Einfachheit halber das Spannungspotential

$$V = 2\nu \sum_{ij} U_{ij}^2 = 2\nu \sum_{ij} \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2. \quad (3-15)$$

Die Variation dieses Potentials ist

$$\begin{aligned} \int \delta V d\vec{x} &= \int \sum_{ij} \frac{\partial V}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\vec{x} = \int \sum_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \delta u_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \delta u_i \right) d\vec{x} \\ &= \underbrace{\int \sum_{ij} \frac{\partial V}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \delta u_i df_j}_{=0} - \int \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}_{= \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \delta u_i d\vec{x} \\ &= -\nu \int \left( \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) \delta \vec{u} d\vec{x}. \end{aligned} \quad (3-16)$$

Insgesamt ist damit die Variation des Wirkungsfeldes

$$\begin{aligned} \delta \int \left( \vec{p} \cdot \dot{\vec{u}} - \frac{\vec{p}^2}{2m} - V \right) d\vec{x} dt &= \int \left( \underbrace{\vec{p} \cdot \delta \dot{\vec{u}}}_{\frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \delta \vec{u}) - \dot{\vec{p}} \cdot \delta \vec{u}} - \delta V + \left( \dot{\vec{u}} - \frac{\vec{p}}{m} \right) \delta p + \dots \right) d\vec{x} dt \\ &= \int \left( \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \delta \vec{u})}_{\substack{=0 \\ \text{keine Variation} \\ \text{an den Grenzen}}} - \underbrace{\left( \dot{\vec{p}} - \frac{1}{4} \nu (\Delta \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right) \cdot \delta \vec{u}}_{=0} - \underbrace{\left( \dot{\vec{u}} - \frac{\vec{p}}{m} \right) \delta p}_{=0} \right) d\vec{x} dt \end{aligned} \quad (3-17)$$

und daraus lesen wir direkt die Bewegungsgleichung der Verschiebung ab:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{u}} = \frac{\vec{p}}{m} \\ \dot{\vec{p}} = v(\Delta \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \underbrace{\mu \Delta \vec{u}}_{\text{reine Scheerung}} + \underbrace{\lambda \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}}_{\text{reine Kompression}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Aufteilung in Scheerung} \\ \text{und Kompression} \\ \text{entsprechend Anhang).} \end{array} \quad (3-18)$$

Zu beachten ist die Nichtlinearität, die sich aus der totalen zeitlichen Ableitung des Impulses ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} = \dot{\vec{p}}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \vec{p}, \\ \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= -m \underbrace{\vec{y} \cdot \vec{\nabla} \vec{y}}_{\text{Nicht-linearität}} + \underbrace{\mu \Delta \vec{u}}_{\text{reine Scheerung}} + \underbrace{\lambda \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}}_{\text{reine Kompression}}. \end{aligned} \quad (3-19)$$

Ein Volumenelement ändert seinen Impuls oder seine Geschwindigkeit, wenn sich das Impulsfeld ändert, oder wenn es sich an einen anderen Punkt mit einem anderen Impulsfeld bewegt. Dieser zweite Betrag ist quadratisch im Geschwindigkeitsfeld und das ist die Hauptquelle für nichtlineare Phänomene in der Natur. Dieser Term ist verantwortlich dafür, dass es keine Langzeitvorhersagen für die Wetterentwicklung gibt, er bestimmt die fraktale Form der Wolken oder der Erdoberfläche, soweit sie durch Magmabewegung hervorgerufen ist. Er spielt sogar in der belebten Natur eine wichtige Rolle, etwa bei der Form der Qualle. Bei ihrer Fortbewegung im Wasser stößt die Qualle einen Wasserimpuls nach hinten aus. Dieser erzeugt einen Wirbel, der genau dieselbe Form wie die Qualle selber hat. Dieser Art der Formbildung auf Grundlage der Nichtlinearität in (3-19) ist der Schluss des Buches gewidmet. Zunächst wollen wir ein paar einfache Auswirkungen der elastischen Kräfte in Festkörper betrachten.

## Biegung eines Balkens bei Belastung

Die Bewegungsgleichungen für einen Balken lauten in zwei Dimensionen

$$\ddot{\vec{u}} = \mu \Delta \vec{u} + \lambda \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}; \quad (3-20)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \ddot{u}_x = (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} (\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}; \\ \ddot{u}_y = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ (\mu + \lambda) \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Wir suchen stationäre Lösungen dieser Gleichungen für ein balkenförmiges Gebiet und geben folgende Werte und Formeln in die Computersoftware FEMLAB ein:

Parameter:

$$\begin{cases} \mu = lam = 1; \\ u_0 = -.5; \end{cases}$$

Gebiet:

$$\text{Rechteck, } \begin{cases} x \in [-1, 1] \\ y \in [0, 0.2] \end{cases}$$

FEMLAB

3-1

Gleichungen:

$$\begin{cases} \vec{0}_{a^{(x)}} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} (\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(x)}} = \vec{0}_{=F^{(x)}} \\ \vec{0}_{a^{(y)}} \frac{\partial u_y}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ (\mu + \lambda) \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(y)}} = \vec{0}_{=F^{(y)}} \end{cases}$$

Wir wählen die Randbedingungen

Wand links:	$\underbrace{u_x}_{R^{(x)}} = 0, \quad -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = (\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x} = \mu^{(Lag)} + \underbrace{0}_{G^{(x)}};$ $\underbrace{u_y}_{R^{(y)}} = 0, \quad -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu^{(Lag)} + \underbrace{0}_{G^{(y)}};$
Offenes Ende rechts	$\underbrace{0}_{R^{(x)}} = 0, \quad -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = -(\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x} = \underbrace{0}_{G^{(x)}};$ $\underbrace{u_y - u0}_{R^{(y)}} = 0, \quad -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = -\mu \frac{\partial u_y}{\partial x} - \lambda \frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu^{(Lag)} + \underbrace{0}_{=G^{(y)}};$
Ober- und Unterseite	$\underbrace{0}_{R^{(x)}} = 0, \quad -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = \pm \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \underbrace{0}_{=G^{(x)}};$ $\underbrace{0}_{R^{(y)}} = 0, \quad -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = \pm (\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x} = \underbrace{0}_{=G^{(y)}}.$

FEMLAB 3-2

Die Lösungen, auch für ein etwas abgewandeltes Gebiet sind in Abbildung 3-2 dargestellt.

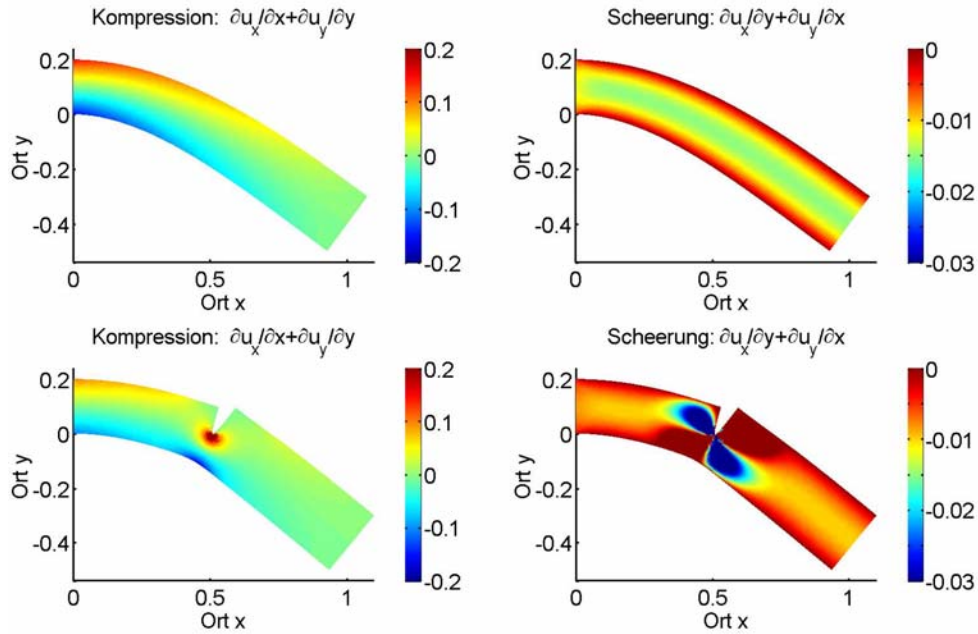


Abbildung 3-2

*Kompressionen und Scheerungen eines gebogenen Balkens. Bei einem angesägten Balken verdichten sich die Kräfte am Ende der Sägenut.*

## Schwingungen einer elastischen Platte

Für eine zweidimensionale Platte, die in der x-y-Ebene liegt und in z-Richtung schwingt, ist der Verschiebungsfeldvektor

$$\vec{u} = u(x, y) \hat{e}_z. \quad (3-21)$$

Die Bewegungsgleichung lautet also

$$\ddot{u} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (3-22)$$

Um das Schwingungsverhalten der Platte, und auch die möglichen Frequenzen zu bestimmen, lösen wir zunächst das entsprechende Eigenwertproblem und bauen aus den Eigenmoden die Gesamtschwingung auf:

$$\left( \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial y^2} \right) = -\lambda_n u^{(n)}, \quad \text{und} \quad (3-23)$$

$$u(x, y, t) = \sum_n c_n(t) u^{(n)}(x, y).$$

Die Lösungen der Bewegungsgleichung (3-23) lässt sich analytische angeben mit

$$\begin{aligned}
\ddot{u} &= \mu \left( \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial y^2} \right) & (3-24) \\
\Rightarrow \sum \ddot{c}_n u^{(n)} &= \sum c_n \mu \left( \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial y^2} \right) = \sum -c_n \mu \lambda_n u^{(n)} \\
\Rightarrow \ddot{c}_n &= -\mu \lambda_n c_n \\
\Rightarrow c_n &= a_n \sin(\sqrt{\mu \lambda_n} t) + b_n \cos(\sqrt{\mu \lambda_n} t).
\end{aligned}$$

Die Gesamtlösung und die Winkelgeschwindigkeiten sind also

$$u = \sum a_n \left\{ \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t) \right\} u^{(n)} \quad \text{mit } \omega_n = \sqrt{\mu \lambda_n}. \quad (3-25)$$

Zur Lösung des Eigenwertproblems (3-23) machen wir folgende Eingaben:

Parameter:	Gebiet:	<i>FEMLAB 3-3</i>
$\mu u = 1,$	Rechteck, $\begin{cases} x \in [0, \pi] \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$	
Gleichungen:	Ränder:	
$\frac{1}{a} \lambda u + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} -\mu u \frac{\partial u}{\partial x} \\ -\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\Gamma} = \underbrace{0}_F$	$\underbrace{0}_R = 0$ $-n \cdot \Gamma = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{0}_G & (\text{links und rechts}) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{0}_G & (\text{oben und unten}) \end{cases}$	

Die Ergebnisse sind in Abbildung 3-3 dargestellt. Die Zeitentwicklung der Schwingungen einer runden Platte werden in Abbildung 3-4 gezeigt.

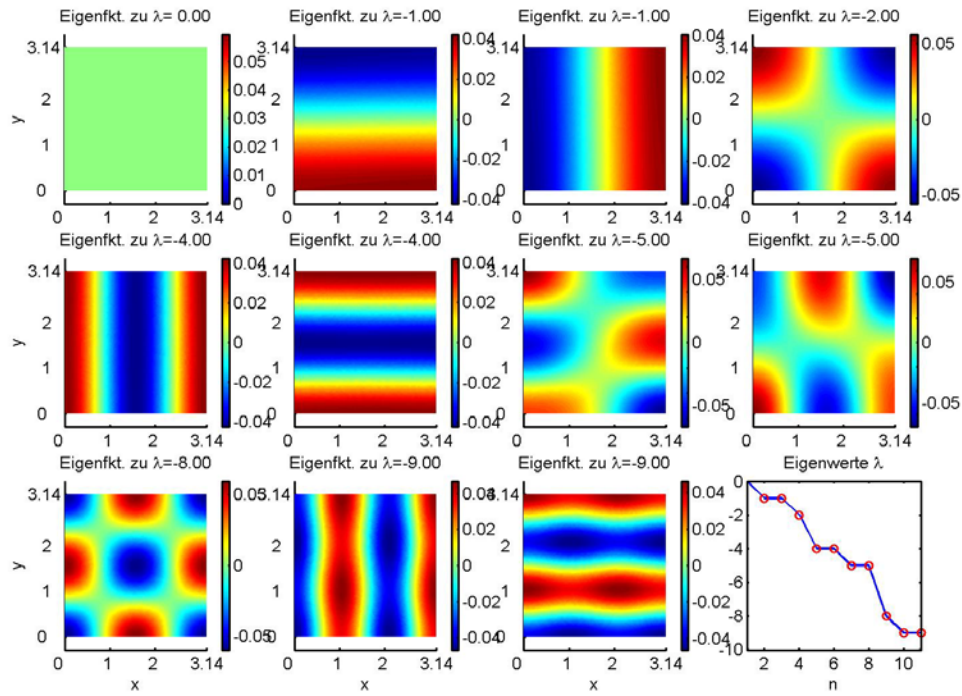
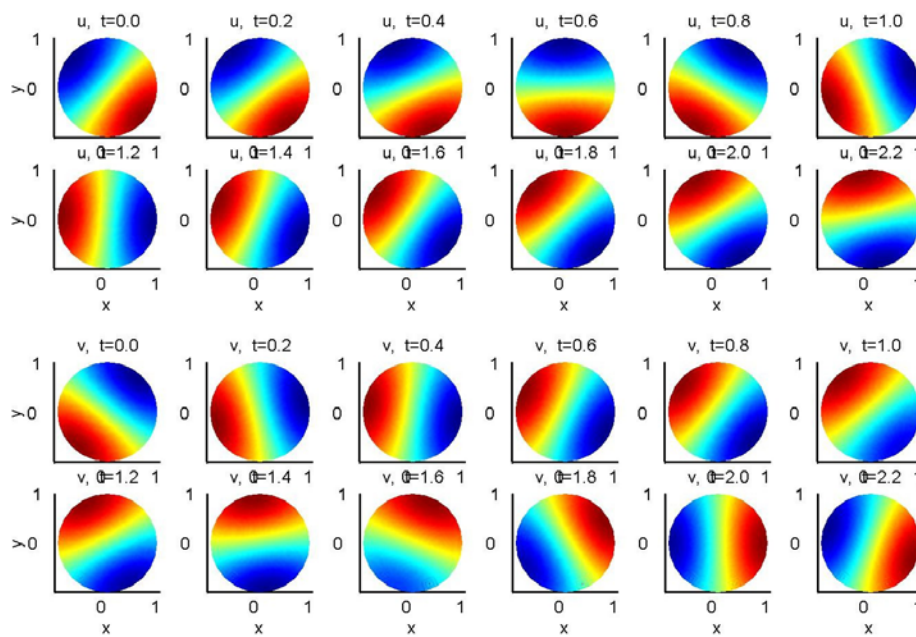


Abbildung 3-3

Eigenschwingungen bzw. Eigenfunktionen und Eigenwerte des Verschiebungsfeldes einer elastischen Platte.

*Zeitentwicklung einer Überlagerung von Eigenschwingungen einer Platte*



*Abbildung 3-4*

*Rotationsschwingung einer elastischen Platte. Oben ist das Verschiebungsfeld  $u$  zu verschiedenen Zeiten  $t$  gezeigt, unten das Geschwindigkeitsfeld  $v$ .*

## 4. Kontinuität als umfassende Grundlage der Physik

Kontinuität ist eine der Grundeigenschaften unserer bewussten Welterfahrung. In unserem täglichen Erleben der Welt ergibt sich immer eines aus dem andern ohne jede Willkür oder Sprunghaftigkeit, und das obwohl die Signalverarbeitung der Sinneseindrücke im Gehirn überhaupt nicht kontinuierlich oder unmittelbar ist. Dafür gibt es viele physiologische Hinweise.

Das Gehirn braucht fast 1 Sekunde zur Verarbeitung der Nervensignale. Das hat der amerikanische Physiologe Libet in sehr aufregenden Experimenten am offenen Gehirn von Probanden klar herausgefunden [LIBE91], [NORR97]. Von dieser Sekunde merken wir gar nichts, es ist die Zeit, die das Gehirn zur Bereitstellung eines kontinuierlichen und in sich geschlossenen Weltbildes benötigt.

Auch unser Gesichtsfeld wird in dieser Sekunde der Verarbeitung kontinuierlich und lückenlos bestimmt, obwohl die Sinneseindrücke eklatante Lücken aufweisen. Um den 'Blinden Fleck' unserer Augennetzhaut zu bemerken, bedarf es ausgeklügelter experimenteller Tricks. Normalerweise wird dieser 'Blinde Fleck' in unserem Bewusstsein einfach unter den Teppich gekehrt.

Das sind nur ganz schwache Hinweise darauf, was das Gehirn alles leistet, um in unserem Bewusstsein ein kontinuierliches Bild der Welt entstehen zu lassen.

Kontinuität ist Voraussetzung für Bewusstsein und sie ist eng verwandt mit Kausalität oder Kontextunabhängigkeit, welche wir im letzten Kapitel als Wurzel der physikalischen Gesetzmäßigkeiten identifiziert hatten. Eine Welt, die unbegründet Sprünge aufweist, oder in der Dinge grundlos aus dem Nichts entstehen und sich dorthin auflösen, wäre extrem verwirrend und böte keine Grundlage für die Entwicklung von Bewusstsein.

Die Kontinuität der Materie ist ganz wichtig für die Stabilität unserer Welterfahrung. Ein Stein ist ein Stein und er verschwindet nicht einfach. Er bleibt, wo er ist. Und wenn er sich bewegt, dann nur aufgrund einer objektiven Ursache, zum Beispiel, wenn man mit dem Fuß dagegen schlägt.

Kontinuität der Wirkung und Kausalität bezeichnen genau dasselbe. Wir werden im Folgenden daraus alle Grundgesetze der Physik ableiten:

- Kontinuität der Wirkung und Kausalität sind die Grundlage der Mechanik. Wir werden auf den nächsten Seiten sehen, dass die Hamilton-Jacobi-Gleichung, die wir im letzten Kapitel aus der Objektivität der Wirkung abgeleitet haben, im Grunde eine Kontinuitätsgleichung für das Wirkungsfeld ist;
- Die Kontinuität der Eichfreiheitsgrade von Wirkungen entspricht mathematisch exakt den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik;
- Die Kontinuität der Wahrscheinlichkeit ist einer der beiden Grundpfeiler der Quantenmechanik. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung allein ist nicht ausreichend, um kausale Bezüge zwischen unscharfen Ursachen und Wirkungen herzustellen. Es muss noch gewährleistet werden, dass eine Wirkung dieselbe Wahrscheinlichkeit hat wie ihre Ursache. Und dies wird durch die Kontinuität des Wahrscheinlichkeitsfeldes gewährleistet.

Alle diese Zusammenhänge werden formal genau gleich beschrieben, nämlich durch eine Kontinuitätsgleichung. Diese gilt für die verschiedensten Größen, also für die Materiedichte, das Wirkungsfeld, die Eichfelder der Wirkung und für die Wahrscheinlichkeitsdichte von Wirkungen. Im nächsten Abschnitt wird diese Kontinuitätsgleichung abgeleitet.

Sehr interessant ist auch, dass in der im Folgenden verwendeten Computersoftware FEMLAB die relevanten formalen Zusammenhänge als Kontinuitätsgleichungen formuliert werden müssen. Auch das macht nochmals deutlich, dass Kontinuität das allgemein gültige Kriterium ist, um physikalische Zusammenhänge mathematisch auszudrücken.

## Die Kontinuität eines Wasserausflusses

Um zur mathematischen Formulierung von Kontinuität zu gelangen, betrachten wir zunächst den recht anschaulichen Ausfluss von Wasser aus einem Gefäß. Dies ist in Abbildung 1-1 dargestellt.

Die zeitliche Änderung des Wasservolumens  $V_0$  im Gefäß lässt sich berechnen mit

$$\frac{\partial}{\partial t} V_0 = \frac{\partial}{\partial t} \Delta V = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} \cdot \vec{x}) = \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{A} \cdot \vec{v}, \quad (4-1)$$

$\vec{A}$ : Flächenvektor des Ausflussquerschnitts,

$v$ : Ausflussgeschwindigkeit.

Bei gleichmäßigem Ausfluss benötigt der 'Wasserpfropfen'  $\Delta V$  in Abbildung 1-1 gerade die Zeit  $t=x/v$ , um seinen Platz für den nächsten 'Pfropfen' vollständig zu räumen.

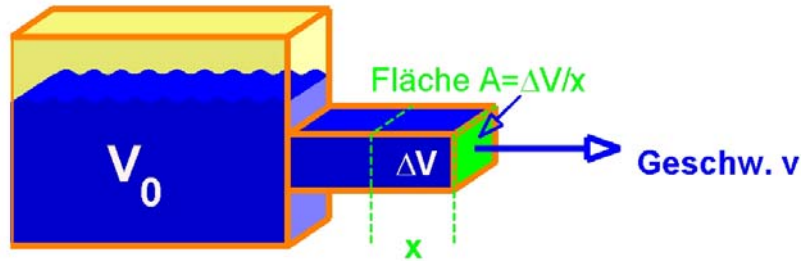


Abbildung 4-1

Wasser strömt aus einem Gefäß. Die Ausflussgeschwindigkeit  $v$  ergibt sich aus der Abnahme der Wasservolumen  $\Delta V$  im Gefäß und aus dem Querschnitt  $A$  des Ausflusses.

Als nächstes schauen wir uns die zeitliche Änderung der Materiemenge im Gefäß an.  $m$  ist Gesamtmasse und  $V$  ist das gesamte Wasservolumen im Gefäß. Dann ist die zeitliche Änderung der Materiemenge oder der Masse gegeben durch

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial m}{\partial V_0}}_{=\rho \text{ (Dichte)}} \frac{\partial V_0}{\partial t} = \rho \vec{A} \cdot \vec{v} = \vec{A} \cdot \underbrace{\rho \vec{v}}_{=\vec{j} \text{ Materiestrom}}. \quad (4-2)$$

## Die Kontinuitätsgleichung

Wir verallgemeinern nun (4-2) auf ein beliebiges Gebiet innerhalb der Flüssigkeit. Ändert sich irgendwo die Materiemenge, nimmt die Materie also mehr oder weniger Volumen ein, dann sind Zufluss und Abfluss in diesem Gebiet nicht im Gleichgewicht. Also ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_G \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{=\rho} d\vec{x} \stackrel{!}{=} - \underbrace{\int_{\partial G} \rho \vec{v} \cdot d\vec{f}}_{\substack{\text{Zufluss oder Abfluss} \\ \text{durch den Rand von } G}} \stackrel{\text{Satz von Gauss}}{=} - \int_G \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) d\vec{x} \quad (4-3) \\ \Rightarrow \int_G \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right) d\vec{x} &= 0. \end{aligned}$$

Da dies für jedes beliebige Gebiet  $G$  in der Flüssigkeit gilt, folgt die

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } \frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (4-4)$$

Ihre Interpretation ist in Abbildung 4-2 nochmals veranschaulicht. Ändert sich irgendeine Menge in einem Gebiet, so muss ein entsprechender Strom durch die

Oberfläche dieses Gebiets fließen. Dies kann ein Materiestrom, eine Wirkungsstrom, ein Ladungsstrom oder ein Wahrscheinlichkeitsstrom sein. Die einzelnen Stromarten müssen wir gleich noch genauer definieren.

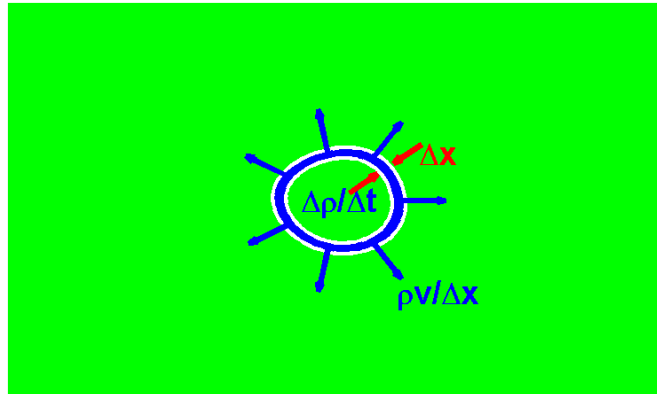


Abbildung 4-2

An einer beliebigen Stelle ändert sich die Dichte  $\rho$ , wenn Zufluss und Abfluss an der Stelle im Ungleichgewicht sind.

Besonders einfach wird die Kontinuitätsgleichung bei Inkompressibilität, etwa bei Wasser. Inkompressibilität heißt, dass die Dichte immer gleich ist, sich also weder zeitlich noch räumlich ändert:

$$\text{inkompressibel:} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} \rho = 0; \quad (4-5)$$

→

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0.$$

Zum Abschluss wollen wir noch die Hamilton-Jacobi-Gleichung der Mechanik in die Form einer Kontinuitätsgleichung bringen:

Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} S + \frac{(\vec{\nabla} \cdot S)^2}{2m} + V = 0,$$

 $\Leftrightarrow$ 

Kontinuität des Wirkungsstromes:

$$\frac{\partial}{\partial t} S + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{S}{2} \frac{\overbrace{\vec{\nabla} \cdot S}^{=\vec{v}(S)} \underbrace{\text{(Ausbreitungsgeschwindigkeit)}}_m \right)}_{\text{erhaltener Wirkungsstrom}} = \underbrace{\frac{1}{2m} S \Delta S - V}_{\text{Quellen von Wirkungen}}.$$

(4-6)

Wir identifizieren in (4-6) den erhaltenen Wirkungsstrom und Wirkungsquellen, also Ursachen oder Auslöser der Wirkung. Die Ursache von Wirkungen sind zum einen Kräfte, die hier in ihrer Potentialform  $V$  erscheinen. Auch die Krümmung des Wirkungsfeldes löst einen Wirkungsstrom aus.

Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit wiederum von der Wirkung abhängt, taucht im erhaltenen Strom der Faktor ein Halb auf.

### Bewegung einer Gauß-förmigen Dichteverteilung in einem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld

Um mit der Kontinuitätsgleichung etwas vertraut zu werden, simulieren wir die Dynamik einer Gauß-förmigen Dichteverteilung in einem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld. Es kann sich dabei um die Dichte von Materie, Ladung, Wirkung oder Wahrscheinlichkeit handeln. Die Grundgleichungen sind

Geschwindigkeitsfeld: 
$$v_x = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 & \forall x \geq -1, \\ 1 & \text{sonst;} \end{cases} \quad (4-7)$$

$$v_y = \begin{cases} \sqrt{1 - v_x^2} & \forall y \geq 0, \\ -\sqrt{1 - v_x^2} & \text{sonst;} \end{cases}$$

Kontinuitätsgleichung: 
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0;$$

Startwert: 
$$\rho = e^{-((x-1.5)^2 + y^2)/.05}.$$

Die Simulation beruht auf folgenden Eingaben:

<p>Ausdruck:</p> $v_x = (x < 1) + (x - (x + 1)^2) \cdot (x \geq -1),$ $v_y = \text{sign}(y) \cdot \text{sqrt}(1 - v_x^2);$	<p>Gebiet:</p> <p>Rechteck, <math>\begin{cases} x \in [-2, 0], \\ y \in [-.5, .5]; \end{cases}</math></p>
<p>Gleichung:</p> $\frac{1}{a} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \rho \cdot vx \\ \rho \cdot vy \end{pmatrix}}_{\Gamma} = \underbrace{0}_{F};$ <p>Startwert <math>t = 0</math>:</p> $\rho = \exp\left(-((x + 1.5)^2 + y^2) / .05\right);$	<p>Ränder:</p> $\underbrace{\rho}_{\tilde{R}} = 0,$ $-n \cdot \Gamma = \begin{cases} \pm \rho \cdot vx = \mu^{(Lagr)} + \underbrace{0}_{\tilde{G}} & (\leftrightarrow), \\ \pm \rho \cdot vy = \mu^{(Lagr)} + \underbrace{0}_{\tilde{G}} & (\updownarrow). \end{cases}$

FEMLAB 4-1

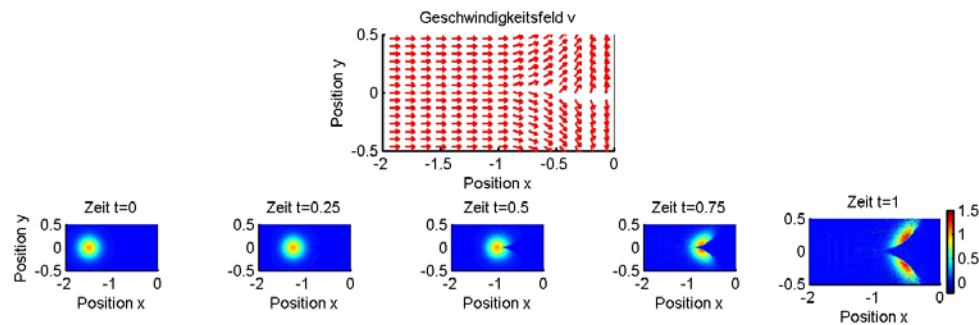


Abbildung 4-3

Eine Gauß-förmige Dichteverteilung unterliegt der Dynamik des oben angegebenen Geschwindigkeitsfeldes. Es trennt sich mit der Zeit  $t$  in zwei Anteile auf.

## Das klassische Doppelspaltexperiment

Für den Vergleich mit dem später simulierten quantenmechanischen Doppelspaltexperiment betrachten wir nun eine Dichteverteilung, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit eine Doppelspaltblende passiert. Das ist soweit nicht besonders spektakulär. Es wird jedoch sehr interessant, wenn wir später in der Quantenmechanik noch die Unschärfe raumzeitlicher Bezüge mit berücksichtigen. Dann treten hierbei nämlich sehr merkwürdige Phänomene auf, etwa

Quantensprünge, Nichtlokalität oder der scheinbare Dualismus von Wellen- und Teilchen.

Für die Rechnung ist wieder einmal eine künstliche Diffusion vonnöten, da sonst die Werte des Dichtefeldes an den Wänden unstetig werden:

Variablen	Gebiet: <i>polynom</i>	<i>FEMLAB</i>
$\begin{cases} v = 10, & b = .7, \\ D^{(Art)} = .1; \end{cases}$	Ränder: $\rho = 0;$	4-2
Gleichung:	Startwert $t = 0$ :	
$\frac{1}{a} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left( v \cdot \rho - D^{(Art)} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)}_0 = \underbrace{0}_F;$	$\rho = \exp\left(-\left((x+2)^2 + y^2\right)/b^2\right).$	

Die Ergebnisse sind in Abbildung 4-4 dargestellt.

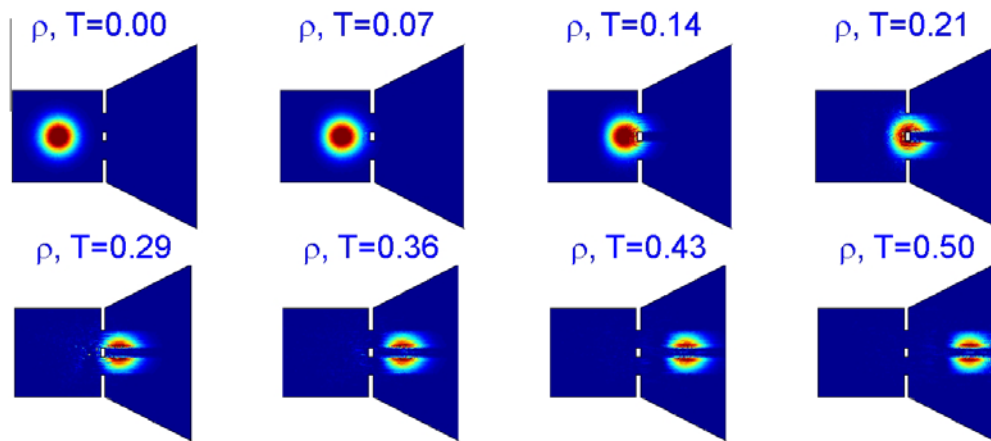


Abbildung 4-4

Eine Gauß-förmige Dichteverteilung bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf eine Blende zu, die mit einem Doppelspalt versehen ist. Ein Teil der Dichte bewegt sich unbehindert durch die Blende, der Rest geht in der Blende verloren. Dieses Verhalten wird im Kapitel über Quantenmechanik besonders interessant, wenn die Unschärfe raumzeitlicher Bezüge mit berücksichtigt wird. Es können dann Interferenzen und nichtklassischen Phänomene wie Nichtlokalität, Quantensprünge oder Teilchenwellendualismus diskutiert werden.



## 5. Hydrodynamik

Die theoretische Behandlung von Flüssigkeiten und Gasen ist fast identisch mit der von elastischen Festkörpern. Die elektromagnetischen Kräfte halten die Atome jedoch nicht in ihrer gegenseitigen räumlichen Beziehung fest, sondern erlauben ein unbegrenztes verschieben. Bei elastischen Festkörpern sorgen die elastischen Kräfte dafür, dass die Materie gleichmäßig verteilt bleibt, bei Gasen und Flüssigkeiten ist das ein bisschen anders.

Was passiert, wenn der Stoff in einem Raumbereich verdichtet und oder ausgedünnt wird, sehen wir, wenn wir den Ventilflansch einer Fahrradpumpe zudrücken und dann versuchen zu pumpen. Je weiter wir den Kolben in den Zylinder drücken, umso schwerer geht das. Es wird ein Druck aufgebaut, der unserer inhomogenen Materieverdichtung entgegenwirkt. Dieser Druck ist natürlich auch eine Folge der atomaren Kräfte. Seine Wurzel ist der Raumanspruch jedes Atoms.

Druckkräfte hängen sehr eng mit der Materiedichte zusammen. Sie wirken ja genau so, dass die Dicht möglichst homogen bleibt. Je größer der Dichteunterschied ist, desto höher ist der Druck, zum Beispiel bei der Fahrradpumpe.

Die Taktik zur Bestimmung der makroskopischen Druckkräfte besteht nun darin, diese Kräfte genau so festzulegen, dass die Kontinuität der Materie gewährleistet ist. Druckfreiheitsgrade erhalten also in der Regel keine eigene Dynamik, sondern sie werden so bestimmt, dass die Kontinuitätsgleichung der Materiedichte erfüllt ist.

Wir verzichten nun darauf, die Bewegungsgleichung von Flüssigkeiten und Gasen nochmals mit dem Hamiltonschen Prinzip herzuleiten. Das geht ja genau so wie bei elastischen Medien in einem vorausgegangen Kapitel. Wir stellen die Gleichung der Hydrodynamik in Analogie zu den elastischen Körpern auf.

### **Das Reibungsfeld als zeitliche Veränderung des Verzerrungsfelds**

Bei den elastischen Körpern haben wir das Potential der Hamilton-Jacobi-Gleichung als Spannungspotential festgelegt. Je mehr sich benachbarte Volumenelemente gegenseitig verschieben, desto stärker ist die Kraft, die dieser Verschiebung entgegenwirkt. Bei der Reibungskraft hängt nun diese Kraft nicht von der Verschiebung selbst ab, sondern von der Geschwindigkeit derselben. Anstelle der Verschiebungen sind also deren zeitliche Ableitungen einzusetzen. Ansonsten ändert sich nichts.

Allerdings sollten wir einwenden, dass mit der Objektivität der Wirkungen, also der Hamilton-Jacobi-Gleichungen, eigentlich nur Potentiale verträglich sind, die

vom Ort oder auch von räumlichen Verschiebungen abhängen. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ergab sich ja aus Integration der Ausbreitungsgeschwindigkeit über Impulse und das Potential trat dabei als vom Impuls (oder der Geschwindigkeit) unabhängige Integrationskonstante auf.

Unser Reibungspotential ist also nicht so ganz verträglich mit der Objektivität von Wirkungen, und das bedeutet, dass diese Beschreibung noch nicht ganz vollständig ist. In der Tat müssen bei hydrodynamischen Betrachtungen auch Energieumwandlungen in Wärme beachtet werden. So weit wollen wir jedoch an dieser Stelle nicht gehen.

Wir betrachten vereinfachend die Potentiale

$$V^{(Spannung)} = \frac{1}{2} \mu \sum_{ij} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad (5-1)$$

$$V^{(Reibung)} = \frac{1}{2} \mu \sum_{ij} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad \text{mit } \vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.$$

Die Herleitung der strukturemechanischen Bewegungsgleichung haben wir in einem vorausgehenden Kapitel mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzip bewerkstelligt. Ganz analog geht das nun auch mit dem hydrodynamischen Reibungspotential. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{Strukturmechanik: } \quad & \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \underbrace{-m\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}}_{\text{Euler-Gleichung der Strukturmechanik}} + \overbrace{\mu \left( \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)}^{\text{Spannungskraft}}; \\ \text{Hydrodynamik: } \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \underbrace{-m\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}}_{\text{Navier-Stokes-Gleichung}} + \overbrace{\mu \left( \Delta \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right)}^{\text{Reibungskraft}} \overbrace{-\vec{\nabla} P}^{\text{Druckkraft}}; \\ \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})}_{\text{Kontinuitätsgleichung}} = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (5-2)$$

Im Vergleich zur Strukturmechanik wurde in der hydrodynamischen Kraft das Verschiebungsfeld durch das Geschwindigkeitsfeld ersetzt und es wurde durch die Druckkraft ergänzt.

Ganz besonders hinweisen sollte man nochmals auf die Nichtlinearität der Gleichungen. Der Ursprung dieser Nichtlinearität ist die totale Ableitung des Impulsfeldes:

$$\underbrace{\frac{d\vec{p}(\vec{x},t)}{dt}}_{\text{totale Änderung des Impulses}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{p}(\vec{x},t)}{\partial t}}_{\text{Änderung des Impulsfeldes}} + \underbrace{\overbrace{\vec{v}(\vec{x},t) \cdot \vec{\nabla} \vec{p}(\vec{x},t)}^{\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}}}_{\text{Bewegung an Position mit anderem Impulsfeld}} \quad (5-3)$$

Der Impuls oder die Geschwindigkeit eines Volumenelementes ändert sich, wenn sich das Impulsfeld selber ändert, und wenn sich das Volumenelement an einen anderen Ort bewegt, an dem das Impulsfeld andere Werte hat. Diese Impulsänderung hängt dann von der Änderung des Impulsfeldes mit Ort ab, und zusätzlich noch von der Geschwindigkeit, mit der der Ortswechsel vollzogen wird. Es liegt also eine doppelte Abhängigkeit vom Impuls vor, und dies genau ist eine Ursache für die Selbstorganisation der Materie oder für die Morphogenese in der unbelebten und belebten Natur.

### Inkompressible Flüssigkeiten

Um es noch etwas einfacher zu machen, beschränken wir uns hier auf inkompressible Flüssigkeiten. Das vereinfacht vor allem die Kontinuitätsgleichung, aber auch die Navier-Stokes-Gleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \rho = 0 \Rightarrow \quad (5-4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \text{Kontinuitätsgleichung} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -m\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \mu \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} P. \\ \text{inkompressible Navier-Stokes-Gleichung} \end{array} \right.$$

#### Die Rohrströmung

Eine Lösung des Gleichungssystems in (5-4) stellt die laminare Rohrströmung dar. In zwei Dimensionen ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 4y(1-y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in [0,1]. \quad (5-5)$$

Das Geschwindigkeitsfeld  $v$  ist unabhängig von der Koordinate  $x$  und verschwindet an den Rohrrändern bei  $y=0$  und  $y=1$ . Dazwischen verläuft es parabolisch mit dem Maximum  $v_0$  in der Rohrmitte bei  $y=1/2$ .

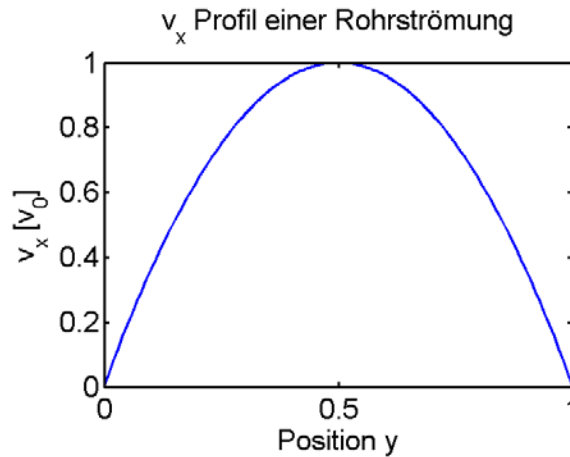


Abbildung 5-1

*Geschwindigkeitsprofil einer Rohrströmung. Das Profil ist entlang dem Rohr konstant und verläuft senkrecht zur Rohrachse parabolisch. Am Rohrmantel ruht die Flüssigkeit.*

Die Kräfte für (5-5) sind im Einzelnen:

$$\text{Reibungskraft: } \mu \Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8v_0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (5-6)$$

$$\text{Trägheitskraft: } -m\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -mv_x(y) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_x(y) \\ 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\text{Druck: } \vec{\nabla} P = \mu \Delta \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} -8v_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow P = -8\mu v_0 x + \underbrace{P_0}_{\text{Konstante}};$$

$$\text{Kontinuität: } \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x(y)}{\partial x} = 0.$$

### Die Reynolds-Zahl

Zur Charakterisierung von Strömungen benutzt man Reynolds-Zahl als Verhältnis der nichtlinearen Trägheitskräfte zu den Reibungskräften:

$$\text{Reynolds-Zahl} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} = \frac{m\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}}{\mu \Delta \vec{v}} \simeq \frac{v_0}{\mu l}, \quad (\text{Rohrlänge } l). \quad (5-7)$$

Bei kleinen Reynolds-Zahlen sind Strömungen laminar, große Reynolds-Zahlen führen gerne zur Verwirbelung. Für die Rohrströmung (5-5) verschwindet die Trägheitskraft ganz und die Reynolds-Zahl ist 0.

Wie eine große Trägheitskraft zur Wirbelbildung führt, sehen wir besonders gut bei dem Stufenrohr in Abbildung 5-2. Bei sehr kleinen Fließgeschwindigkeiten

bleibt die Strömung laminar, sie schmiegt sich eng an die Stufe an. Bei höheren Geschwindigkeiten bilden sich Wirbel. Wie es zu dieser Wirbelbildung kommt, diskutieren wir im Zusammenhang mit der Simulation.

### Simulation mit FEMLAB:

#### Wirbelbildung

Zur Simulation der Strömung hinter einer Stufe verwenden wir die Gleichungen (5-4) in entsprechender Weise. Eine große Reynolds-Zahl können wir durch sehr schwache Reibung erreichen.

Die Strömung wird durch einen Zufluss links angeregt, entsprechend der Rohrströmung in (5-5). An den Wänden formulieren wir eine so genannten 'no slip' Bedingung, das heißt das die Geschwindigkeiten null sind. Am Ausfluss sollen sich die Geschwindigkeiten nicht ändern und dort wird auch der Druck geeicht; das heißt die Konstante in (5-6) wird so gewählt, dass ein bestimmter Druck herrscht, etwa  $P=0$ .

Gebiet:

$$\text{Polygon, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \begin{Bmatrix} 0, & 1, & 1, & 8, & 8, & 0 \\ 0, & 0, & -2, & -2, & 1, & 1 \end{Bmatrix};$$

Variablen:

$$\begin{cases} \eta = \{1, & 0.02\}, \\ \nu = 1; \end{cases}$$

Gleichungen:

$$\frac{1}{a^{(x)}} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(x)}} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \underbrace{\left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{F^{(x)}},$$

$$\frac{1}{a^{(y)}} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ -\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(y)}} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \underbrace{\left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)}_{F^{(y)}},$$

$$\frac{0}{a^{(P)}} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(P)}} = \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}}_{F^{(P)}};$$

Lösungsmethode:

*nichtlinear, stationär.*

Ränder:

Zufluss:	Wände:	Abfluss:
$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_x - v_0 4y(1-y)}_{R^{(x)}} = 0, \forall x \in [0,1], \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ \quad = \underset{G^{(x)}}{0} + \eta^{(Lag)}, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_x}_{R^{(x)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial n} \\ \quad = \underset{G^{(x)}}{0} + \eta^{(Lag)}, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \underset{R^{(x)}}{0} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ \quad = \underset{G^{(x)}}{0}, \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_y}_{R^{(y)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \quad = \underset{G^{(y)}}{0} + \eta^{(Lag)}, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_y}_{R^{(y)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial n} \\ \quad = \underset{G^{(y)}}{0} + \eta^{(Lag)}, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \underset{R^{(y)}}{0} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \quad = \underset{G^{(y)}}{0}, \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} \underset{R^{(P)}}{0} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(P)} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \quad = \underset{G^{(P)}}{0}; \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \underset{R^{(P)}}{0} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(P)} = \frac{\partial v_n}{\partial n} \\ \quad = \underset{G^{(P)}}{0}; \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \underset{R^{(P)}}{P} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(P)} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \quad = \underset{G^{(P)}}{0} + \eta^{(Lag)}. \end{array} \right.$

FEMLAB 5-2

Das Ergebnis der Simulation ist in Abbildung 5-2 dargestellt.

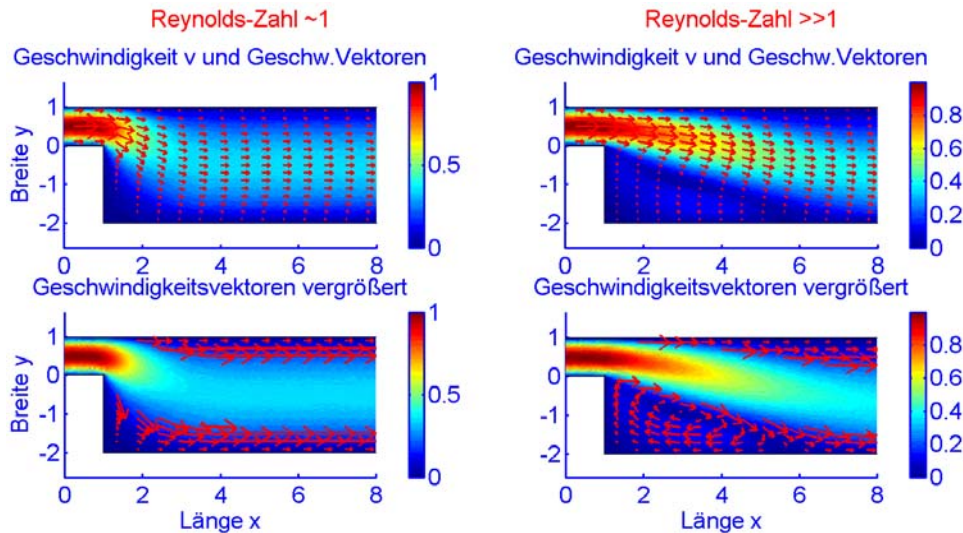


Abbildung 5-2

Strömung hinter einer Stufe bei kleiner Reynolds-Zahl (links) und bei großer (rechts). Das Geschwindigkeitsfeld ist durch Vektorpfeile beschrieben und der Geschwindigkeitsbetrag durch die Farbpalette. In den rechten Abbildungen wird deutlich, wie die Trägheitskraft primär zur Streckung der Strömung führt und sekundär hinter der Stufe einen Wirbel antreibt.

Der Zusammenhang zwischen hoher Trägheitskraft und Wirbelbildung ist etwas widersinnig und wird selten richtig beschrieben. In der Simulation von Abbildung 5-2 wird das jedoch sehr klar.

Wir sehen links in der Abbildung sehr deutlich, wie sich die Strömung aufgrund der Reibungskraft möglichst dem Verlauf des Rohrrandes anschmiegt. Die Strömung geht regelrecht um die Stufe herum, sie folgt ihr.

Die Trägheitskraft, deren Wirkung bei der hohen Reynolds-Zahl rechts in Erscheinung tritt, wirkt dem gekrümmten Strömungsverlauf entgegen. Trägheit bedeutet ja ein beharren auf dem Bewegungszustand. In Abbildung 5-2 ist deutlich zu sehen, wie sich rechts die Strömung hinter der Stufe viel weniger ändert als links.

Die Trägheitskraft wirkt also einer Krümmung des Strömungsverlaufes entgegen. In Wirbeln ist der Strömungsverlauf jedoch besonders stark gekrümmt. Das ist das Widersinnige.

Die Erklärung, wie die Trägheitskraft zur Wirbelbildung führt, ist jedoch offensichtlich. Durch die Streckung des Strömungsverlaufes bei größeren Reynolds-Zahlen entsteht ein Bereich, der von der primären Strömung ausgespart bleibt und von dieser wegen den Reibungskräften in die Drehbewegung der Wirbel versetzt wird.

*Tragfläche*

Wir simulieren nun eine Tragfläche in einem Windkanal:

Gebiet: *Rechteck - Polygon*;

Variablen:

$$\begin{cases} \eta = 1, \\ v_0 = 0,1..40; \end{cases}$$

Gleichungen:

Lösungsmethode:

*nichtlinear, stationär.*

$$\frac{1}{a^{(x)}} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} -\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(x)}} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \underbrace{\left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{F^{(x)}},$$

$$\frac{1}{a^{(y)}} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ -\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(y)}} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \underbrace{\left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)}_{F^{(y)}},$$

$$\underbrace{\vec{0}}_{a^{(p)}} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(p)}} = \underbrace{\vec{0}}_{F^{(p)}};$$

FEMLAB 5-3

Ränder:

Zufluss:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_x - v_0(1 - y^2)}_{R^{(x)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(x)}} + \eta^{(Lag)}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_y}_{R^{(y)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(y)}} + \eta^{(Lag)}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{0}_{R^{(P)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(P)} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(P)}}; \end{array} \right.$$

Wände und Tragfläche:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_x}_{R^{(x)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial n} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(x)}} + \eta^{(Lag)}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_y}_{R^{(y)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial n} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(y)}} + \eta^{(Lag)}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{0}_{R^{(P)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(P)} = \frac{\partial v_n}{\partial n} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(P)}}; \end{array} \right.$$

Abfluss:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{0}_{R^{(x)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(x)}}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{0}_{R^{(y)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(y)}}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{P}_{R^{(P)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(P)} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(P)}} + \eta^{(Lag)}. \end{array} \right.$$

FEMLAB 5-4

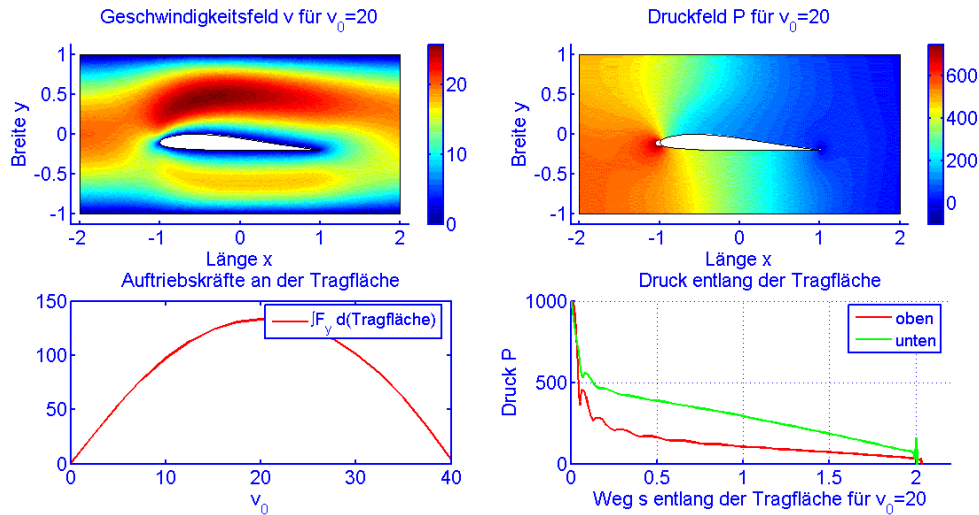


Abbildung 5-3

*Auftrieb an einer Tragfläche. Das Geschwindigkeitsfeld (Farbpalette) ist über der Tragfläche deutlich stärker als unterhalb. Das Druckfeld nimmt daher über der Tragfläche wesentlich schneller ab als unterhalb. Dadurch entsteht ein Sog nach oben, der die Fläche trägt.*

*Die Auftriebskraft links unten wird durch Integration der vertikalen Druckkraft über die gesamte Tragfläche bestimmt. Sie hat für  $v_0 = 20$  ihr Maximum.*

*Der Druck entlang der Fläche (rechts unten) ist unterhalb der Fläche größer als oberhalb. Nur an den An- und Abrisskanten sind die Verhältnisse umgekehrt. Die Form der Tragfläche könnte wohl noch optimaler gestaltet werden.*

Im Kapitel über Selbstorganisation und Morphogenese werden wir noch komplexere Simulationen auf hydrodynamischer Grundlage betrachten.

## 6. Quantenmechanik

Die Kontinuität von Wirkungs- und Materieströmen erklärt schon sehr detailliert das Verhalten der unterschiedlichsten Stoffe. Wir haben das in den vorausgehenden Kapiteln bereits für Flüssigkeiten und elastische Festkörper feststellen können. Nun steht die Frage an, was solchen Stoffen physikalisch im Detail zugrunde liegt.

Wir können Körper zerteilen, zum Beispiel indem wir den Inhalt eines Wassereimers auf zwei Eimer gleichmäßig verteilen. Das können wir immer wieder machen und erhalten so sehr viele Eimer mit jeweils sehr wenig Wasser. Im Prinzip kann man das immer wieder tun, so oft man will. Rein gedanklich kann man das Wasser jedes Eimers, so wenig es auch sein mag, immer wieder aufteilen. Am Ende hätte man dann unendlich kleine Eimer mit unendlich wenig Inhalt.

Praktisch geht das natürlich nicht. Es gibt schon sehr kleine Eimer, in die nur sehr wenig Wasser passt, aber unendlich kleine Eimer stehen nicht zur Verfügung und es hätte auch niemand die Zeit, um diese Eimer unendlich oft umzuleeren.

Es muss da schon eine Grenze geben in unserer Welt, in der doch alles endlich ist. Und diese Grenze sollte objektiv, also kontextunabhängig sein. Sie sollte immer, überall und für alle gleich sein. Diese Grenze hat ja ganz natürliche Auswirkungen auf unsere erlebbare Wirklichkeit, und diese Wirklichkeit ist für uns nur erkennbar, wenn sie in einem gewissen Rahmen beständig ist und ihre Inhalte kontextunabhängig sind.

Diese Grenze sollte sich auf diejenige physikalische Größe beziehen, die selber kontextunabhängig ist, nur dann kann die beschränkte Teilbarkeit von Materie kontextunabhängig beschrieben werden. Diese physikalische Größe ist die Wirkung  $S$ , also das Produkt aus den grundlegenden Messgrößen Raum, Zeit und Kraft. Wir wissen aus Experimenten, dass es diese Grenze auch gibt und als Plancksches Wirkungsquantum  $h$  bezeichnet wird.

$h$  ist eine der wenigen Naturkonstanten. Es hat in allen Experimenten, die empfindlich für sehr kleine Wirkungen sind, denselben Wert. Das Plancksche Wirkungsquantum ist sozusagen der Maßstab, mit dem Wirkungen gemessen werden.

Wirkungen, die in der Größenordnung von  $h$  liegen, können nicht mehr genau quantifiziert werden. Man sagt, sie seien unscharf. Dann wird die Statistik wichtig und es ergeben sich sehr interessante Phänomene. Wirkungen erscheinen

sprunghaft, nichtlokal, mal als Teilchen, mal als Welle und immer in kleinen Päckchen, den Wirkungsquanten.

Auch die atomaren Wirkungen liegen in diesem Bereich. Sie basieren ganz streng auf der Unschärfe. Sozusagen bilden sie sich in dieser. Daher sind Atome auch keine Objekte, ihr Erscheinen ist kontextabhängig. Mal erscheinen sie als Energieschalen, mal als Ansammlung sehr konzentrierter, fast punktförmiger Masseverteilungen. Sie erscheinen immer nur in Zusammenhang mit sehr ausgeklügelten Experimenten und je nach Versuchsaufbau verschieden. Atome haben keine eigenständige Existenz, sie sind nicht körperlich.

Zusammen mit der elektromagnetischen Wechselwirkung bilden die Atome jedoch die Grundlage der massiven Stoffe, also der Körper, die in unserem Bewusstsein erscheinen. Die physikalischen Gesetze für das Verhalten der Stoffe lassen sich auf dieser Basis ganz natürlich erklären.

## **Die Unschärfe der Wirkungen**

Tatsächlich war die Unschärfe raumzeitlicher Bezüge bereits manchen altgriechischen Philosophen vor zweieinhalb tausend Jahren klar, zum Beispiel dem berühmten Aristoteles oder Zenon von Elea [VERH94].

Zenon ist bekannt für seine paradoxen Gedankenexperimente, mit denen er die Vorstellungen über Raum und Zeit, die von Pythagoras, Euklid und anderen Philosophen entwickelt wurden, hinterfragte. Sehr berühmt ist seine Geschichte vom Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte [VERH94].

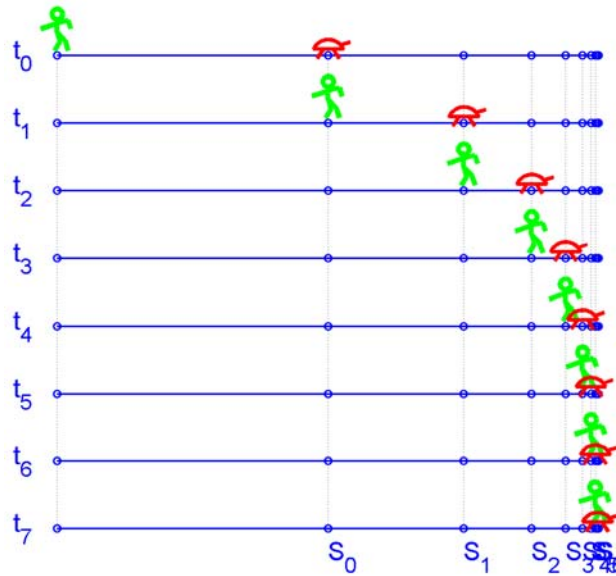


Abbildung 6-1

*Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte: Die Schildkröte erhält zur Zeit  $t_0$  den Vorsprung  $S_0$ . Bis Achilles diesen Punkt  $S_0$  erreicht hat, ist die Schildkröte bereits bei  $S_1$ . Und so geht es immer weiter. Theoretisch ist nach unendlich vielen Zeitschritten der Vorsprung der Schildkröte unendlich klein geworden, aber Achilles hat sie immer noch nicht überholen können.*

Die Schildkröte erhält, wie in Abbildung 6-1, ein paar Meter Vorsprung. Zenon beweist durch sture Anwendung der geometrischen Vorstellungen über Raum und Zeit, dass Achilles die Schildkröte gerade so einholen kann, ein Überholen jedoch unmöglich ist. Immer, wenn Achilles die Position der Schildkröte erreicht hat, ist diese schon wieder ein wenig weiter gekommen. Der Abstand zwischen Achilles und der Schildkröte wird so immer kleiner. Auch die Zeit, die Achilles zum Erreichen der letzten Schildkrötenposition braucht, wird immer kürzer. Er müsste allerdings unendlich mal die vorausgegangene Position der Schildkröte herreichen, damit der Abstand zwischen zu ihr unendlich klein wird. Und dann hat er die Schildkröte immer noch nicht überholt. Und das Unendliche gibt es in unserer bewussten Welterfahrung nicht.

Ein andermal beweist Zenon, dass ein Pfeil, der an einem scharfen Raumzeitpunkt festsetzt, sich nie bewegen kann. In einem scharfen Raumzeitpunkt kann der Pfeil keinerlei Information über Bewegung haben. Das ist so, wie wenn man beim Photographieren unendlich kurz belichten würde. Es wäre keinerlei Information über die Bewegung des Objekts vorhanden. Bei endlicher Belichtung ist der Unterschied zwischen bewegtem Objekt und ruhendem wie in Abbildung 6-2 deutlich vorhanden.

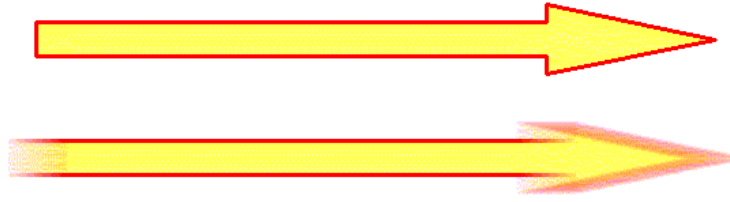


Abbildung 6-2

*Zenons scharfer Pfeil oben kann sich nicht bewegen. Er sitzt an einem exakt bestimmten Raumzeitpunkt fest und kann so keinerlei Information über Bewegung haben. Der unscharfe Pfeil unten bewegt sich, er hat keine scharfe Position in der Raumzeit.*

Zenons Argumente erscheinen auf den ersten Blick vielleicht als an den Haaren herbeigezogen. Aber sie sind doch sehr tief Sinnig und sie werden heute in Experimenten zum so genannten Quanten-Zenon-Effekt sogar experimentell bestätigt [FISC02]. Zum Beispiel wird beim 'watchdog effect' der Zerfall eines angeregten atomaren Zustandes unwahrscheinlicher, wenn man die zeitliche Auflösung bei einer fast kontinuierlichen Beobachtung erhöht [BRÄU00]. In einer scharfen Raumzeit würde die Welt in Bewegungslosigkeit erstarren.

Aristoteles konnte die Problematik der scharfen raumzeitlichen Bezüge bereits sehr gut durchschauen. Er argumentierte, dass Bewegung ein ganzheitliches Phänomen ist. Man kann eine Bewegung zwar in fast beliebig viele Abschnitte unterteilen, eine unendlich feine Unterteilung wie bei Achilles mit seinem Wettlaufgegner, der Schildkröte, ist jedoch eine Abstraktion. Praktisch geht das nicht. Und auch in der Infinitesimalrechnung, der Grundlage unserer mathematisch-physikalischen Weltbeschreibung und unseres gesamten Weltbildes entfernen wir uns weit von der sinnlichen, bewusst erlebbaren Wirklichkeit. [VERH94].

Wir selber haben bei unseren vorausgehenden Überlegungen zur Beschreibung von Raum und Zeit mit Hilfe von Koordinaten festgestellt, dass wir immer nur mittlere Geschwindigkeiten messen können. Zur Bestimmung eines Abstandes benötigen wir einen Maßstab endlicher Länge und zur Bestimmung einer Geschwindigkeit benötigen wir ein ganzes Weg- und Zeitintervall. In der Praxis geht das nie beliebig genau. Gedanklich, also in den Koordinatensystemen, gehen wir jedoch problemlos und erfolgreich mit scharfen Raum- und Geschwindigkeitskoordinaten um. Zu einer natürlicheren Beschreibung physikalischer Zusammenhänge müssen wir allerdings umdenken. Die Raumzeit, die wir uns vorstellen, gibt es nicht wirklich und unser Weltbild sollte das berücksichtigen.

In Experimenten zur Mechanik von Wirkungsquanten, kurz Quantenmechanik, findet man immer eine minimale Streuung von Messwerten. Die zugrunde liegende Gesetzmäßigkeit wurde von Heisenberg in der Form von Unschärferela-

tionen mathematisch formuliert. Sie beziehen sich auf Kombinationen von Messgrößen, deren Produkte Maße für Wirkungen sind, als auf Impuls  $p$  mal Ort  $x$  oder auf Energie  $E$  mal Zeit  $t$ :

$$\underbrace{|\Delta p \Delta x|}_{\Delta(Ft)\Delta x} \approx \underbrace{|\Delta E \Delta t|}_{\Delta(Fx)\Delta t} > h, \quad \text{mit} \quad (6-1)$$

$$\Delta f = \sqrt{\int (f - \bar{f})^2 d\bar{x}} \quad (\text{Streuung}) \text{ und}$$

$$\bar{f} = \int f d\bar{x} \quad (\text{Mittel- oder Erwartungswert}).$$

Das Unschärfemaß  $h$  ist das Plancksche Wirkungsquantum, es bezieht sich immer auf Produkte von Raum, Zeit und Kraft. Dies sind ja die elementaren physikalischen Messgrößen und ihr Produkt ist gleich der Wirkung und kann mit dem Planckschen Wirkungsquantum verglichen werden.

## Experimente zur Unschärfe

Die Unschärfe oder Streuung von Messwerten wird in sehr sensiblen Experimenten festgestellt. Die Werte des Wirkungsfeldes müssen in der Größenordnung des Planckschen Wirkungsquantums  $h$  liegen, dann tritt die Unschärfe zutage. Dies ist der Fall etwa bei einem Spaltexperiment in einer Vakuumröhre, wie in Abbildung 6-3. Ein Glühdraht gibt Energie und Impuls ab, was Ursache für eine spätere Wirkung auf einen Detektor ist, etwa auf ein Photopapier. Dort tritt ein schwarzer Punkt in Erscheinung. Durch eine Spaltblende werden die Ausbreitungsmöglichkeiten des Wirkungsfeldes in  $x$ -Richtung eingeschränkt. Der Versuchsaufbau kann so eingerichtet werden, dass das Impulsfeld im Mittel keine Komponente senkrecht zur Längsachse der Röhre hat.

Bei dem Versuch zeigt es sich, dass ein bestimmtes Maß der Blendenöffnung  $\Delta x$  ein bestimmtes Maß von Streuung des Impulses  $\Delta p$  in  $x$ -Richtung bedingt, ganz entsprechend der Heisenbergschen Unschärferelation (6-1). Macht man die Spaltbreite  $\Delta x$  kleiner, um den Ort der Wirkung bei der Blende genauer festzulegen, so wird die Streuung oder Unschärfe des Impulses entsprechend größer. Dieses Experiment kann auch relativ einfach mit LASER-Licht und einer einfachen Metallblende realisiert werden. Dazu braucht man dann keine Vakuumröhre, kann aber die einzelnen Wirkungsquanten nicht mehr voneinander unterscheiden.

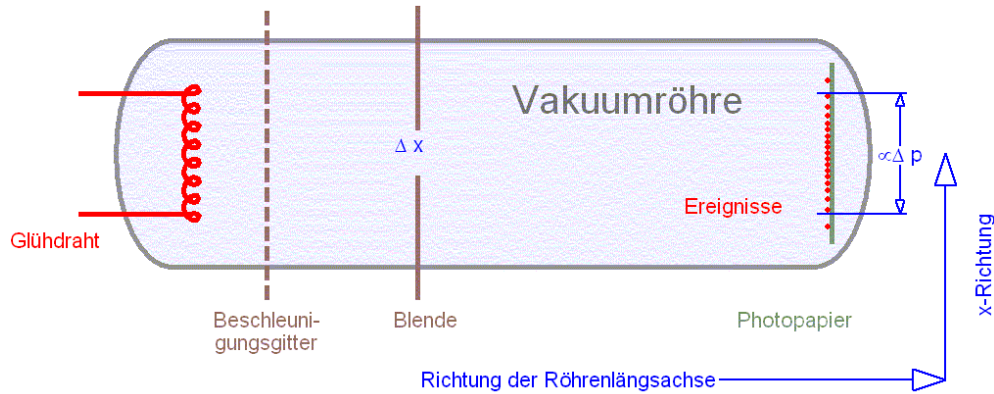


Abbildung 6-3

Versuchsaufbau zum Nachweis der Unschärfe von Wirkungen. Der Glühdraht links gibt Impuls und Energie ab, welche rechts auf ein Photopapier wirken, also eine Schwärzung hervorrufen. Die Blende stellt eine Ortsbestimmung des Wirkungsfeldes dar, und über die punktförmigen Schwärzungen des Photopapiers kann die Impulsstreuung festgestellt werden. Ganz entsprechend der Heisenbergschen Unschärferelation (6-1) ist das Produkt der beiden Größen  $\Delta x \Delta p$  im Bereich des Planckschen Wirkungsquantums  $h$  und es ist immer größer als dieses.

## Die Formulierung der Unschärfe als Unschärfepotential

Die Objektivität oder Kontextunabhängigkeit des Wirkungsfeldes, die ja durch die Hamilton-Jacobi-Gleichung formalisiert wird, erlaubt beliebige Potentiale, also Energiebeiträge, die von Raum und Zeit abhängen. Dies ergab sich im Kapitel über Wirkungen bei einer Impulsintegration mit den Potentialen als Integrationskonstanten. Die Unschärfe des Wirkungsfeldes kann durch ein solches Potential erfasst werden, das wir sinngemäß Unschärfepotential  $Q$  nennen.

Das Unschärfepotential berücksichtigt statistisch verteilte Energiebeiträge. Im Experiment von Abbildung 6-3 ist der mittlere Impuls in  $x$ -Richtung gleich Null. Die mittlere kinetische Energie für diesen Bewegungsfreiheitsgrad ist also auch Null. Wegen der Streuung des Impulses gibt es aber doch Energiebeiträge. Diese sind bei jedem Ereignis, also bei jeder einzelnen Schwärzung des Photopapiers, verschieden und nicht vorhersagbar. Genau diese Energiebeiträge werden durch das Unschärfepotential  $Q$  erfasst.

Für die statistische Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge müssen wir das Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$  hinzuziehen. Die Ursache eines Phänomens, zum Beispiel der Schwärzung auf der Photoplatte in Abbildung 6-3, ist ja wegen der Unschärfe nicht genau festzustellen und kann nur statistisch behandelt werden. Es ist entsprechend dem Feld  $\rho(x, t=0)$  auf verschiedene Orte  $x$  verteilt.

Die zeitliche Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsfeldes  $\rho$  wird durch seine Kontinuitätsgleichung beschrieben. Mit diesem Wahrscheinlichkeitsfeld kann der unscharfe Beitrag zur kinetischen Energie angegeben werden:

Unschärfebeitrag zur kinetischen Energie (6-2)

$$E_{\text{unscharf}}^{(\text{kinetisch})} = \int \rho \frac{(p - \bar{p})^2}{2m} dx = \frac{\Delta \bar{p}^2}{2m} \quad (\bar{p} = \text{mittleren Impuls}),$$

$$(\Delta \bar{p} \text{ Impulsstreuung}).$$

Die mittleren Energien zu jedem Zeitpunkt lassen sich dann mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung in Zusammenhang bringen:

$$0 = \int \rho \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + Q + V \right) dx = \underbrace{\int \rho E dx}_{\text{Gemittelte Hamilton-Jacobi-Gleichung}} + \frac{\langle \bar{p} \rangle^2}{2m} + \underbrace{\frac{\Delta \bar{p}^2}{2m}}_{\int \rho Q dx} + \langle V \rangle \quad (6-3)$$

Die Form des Unschärfepotentials  $Q$  kann sogar analytisch angegeben werden. Es ist

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\vec{\nabla}^2 R}{R}, \quad \text{mit } R = \sqrt{\rho}. \quad (6-4)$$

Dass dies die richtige Form ist, überlegen wir uns auf mehrere Arten. Als erstes nehmen wir an, dass eine Ursache entsprechend einer Gauß-Verteilung auftritt. Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf eine eindimensionale Betrachtung:

Gauß-Verteilung:  $\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}b} e^{-x^2/b^2}, \quad (6-5)$

Ortsschwankungen:  $\Delta x^2 = \int x^2 \rho dx = 2 \frac{1}{\sqrt{\pi}b} \frac{\sqrt{\pi}}{4} b^3 = \frac{b^2}{2},$

Hilfsgröße:  $-\int R \vec{\nabla}^2 R dx = \int \left( -\frac{x}{b^2} \right)^2 \rho dx = \frac{1}{b^4} \frac{b^2}{2}$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta x^2}.$$

Damit ergibt sich für den Mittel- oder Erwartungswert des Unschärfepotentials

$$\begin{aligned}
 E_{\text{unschärf}}^{(\text{kinetisch})} &= \int \rho Q dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \underbrace{R \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} dx}_{-\frac{1}{\pi b^2} \int \frac{x^2}{b^2} e^{-x^2/b^2} dx} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta x^2} \\
 &= \frac{\Delta p^2}{2m}, \quad \text{mit } \hbar = \frac{\Delta x \Delta p}{2}.
 \end{aligned} \tag{6-6}$$

Wir sehen, dass bei entsprechendem Zusammenhang zwischen Plankschem Wirkungsquantum  $\hbar$  und den Streuungen von Ort und Impuls genau der richtige Anteil der kinetischen Energie erfasst wird.

Etwas allgemeiner wird es, wenn wir nicht eine Gauß-verteilte Ursache unterstellen, sondern die Hilfsgröße in (6-5) mittels einer Fourier-Transformation aufintegrieren:

$$\begin{aligned}
 \int R \vec{\nabla}^2 R d\vec{x} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{R} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{R} \vec{\nabla}^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x} d\vec{k} d\vec{k}' = - \int \tilde{R}^2 (-\vec{k}^2) d\vec{k} \\
 &= \underbrace{\Delta \vec{k}^2}_{\text{Streuung der Fourier-Wellenvektoren}}.
 \end{aligned} \tag{6-7}$$

$\Delta \vec{k}$  ist die Streuung der Fourier-Wellenvektoren, mit denen wir das Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$  beschrieben haben. Für die Breite oder Unschärfe des Wahrscheinlichkeitsfeldes gilt dann

$$2\Delta \vec{x} = \frac{1}{\Delta \vec{k}}. \tag{6-8}$$

Die Verhältnisse sind in Abbildung 6-4 dargestellt.

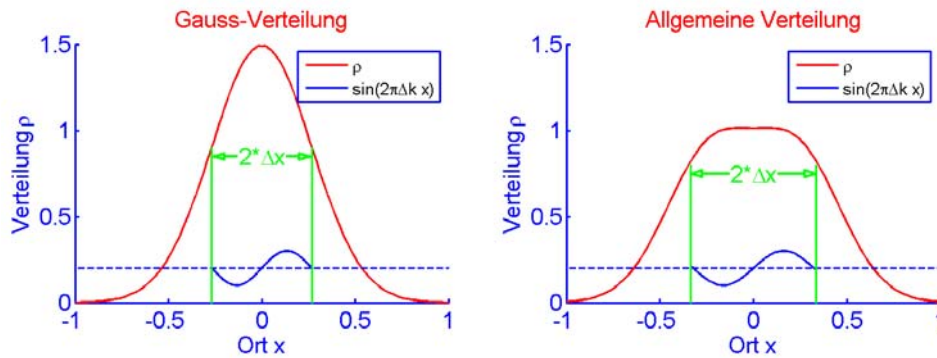


Abbildung 6-4

Beziehung zwischen  $\rho$ ,  $\Delta k$  und  $\Delta x$ .  $\Delta k$  ist die Streuung der Fourier-Wellenvektoren der jeweiligen Verteilung. Mit Hilfe der Fourier-Transformation ergibt sich eine gute Abschätzung der Verteilungsbreite.

Die Heisenbergsche Unschärferelation verknüpft nun die Streuung der Fourier-Komponenten mit der Impulsunschärfe und liefert wieder

$$E_{\text{unschärf}}^{(\text{kinetisch})} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int R \vec{\nabla}^2 R = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{k}^2 \approx \frac{\Delta \vec{p}^2}{2m}. \quad (6-9)$$

Interessant ist hier, dass ganz unvermittelt die de-Broglie-Beziehung zwischen Impuls und Fourier-Wellenzahl  $p = \hbar k$  auftaucht. Wir haben jedoch hier weder Teilchen noch Wellen vorliegen, sondern lediglich die Streuung der Fourier-Komponenten zur Abschätzung der Ortsunschärfe. De-Broglie hat für diese Beziehung in (6-9) 1929 den Nobelpreis erhalten.

## Die Heisenbergsche Unschärferelation

Das Unschärfepotential  $Q$  in (6-4) garantiert, dass die Dynamik des Wirkungsfeldes und des Wahrscheinlichkeitsfeldes die Heisenbergsche Unschärferelation (6-1) aufrecht erhält. Der Nachweis der Unschärferelationen wird üblicherweise in engen Zusammenhang mit Operatoralgebren und mit der imaginären Einheit  $i = \sqrt{-1}$  gebracht. Wir kommen hier jedoch ganz ohne diese mathematischen Hilfsmittel aus und beweisen die Unschärferelationen mit unseren Feldern und deren Ableitungen:

$$\text{mit} \quad -\int R \vec{\nabla}^2 R d\vec{x} = \int (\vec{\nabla} R)^2 d\vec{x} = \frac{2m}{\hbar^2} \langle E \rangle = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\Delta \vec{p}^2}{2m} = \frac{\Delta \vec{p}^2}{\hbar^2} \quad (6-10)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \int \vec{x}^2 R \vec{\nabla}^2 R d\vec{x} &= \int R \vec{\nabla}^2 (\vec{x}^2 R) d\vec{x} = \int R (\vec{\nabla} (\vec{x} R + \vec{x}^2 \vec{\nabla} R)) d\vec{x} \\ &= \int R (R + 2\vec{x} \cdot \vec{\nabla} R + \vec{x}^2 \vec{\nabla}^2 R) d\vec{x} \\ &= 1 + 2 \int \vec{x} R \vec{\nabla} R d\vec{x} + \int \vec{x}^2 R \vec{\nabla}^2 R d\vec{x} \end{aligned}$$

$$\text{ist} \quad \int \vec{x} R \vec{\nabla} R d\vec{x} = -\frac{1}{2}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int (\vec{x} R + \alpha \vec{\nabla} R)^2 d\vec{x} = \int (\vec{x} R + \alpha \vec{\nabla} R) \cdot (\vec{x} R + \alpha \vec{\nabla} R) d\vec{x} \quad (6-11) \\ &= \int \left( \vec{x}^2 \rho + \alpha^2 (\vec{\nabla} R)^2 + 2\alpha \vec{x} \cdot R \vec{\nabla} R \right) d\vec{x} \\ &= \Delta x^2 + \alpha^2 \frac{\Delta p^2}{\hbar^2} - \alpha = \frac{\Delta p^2}{\hbar^2} \left( \alpha^2 - \alpha \frac{\hbar^2}{\Delta p^2} + \Delta x^2 \frac{\hbar^2}{\Delta p^2} \right) \\ &= -\frac{\Delta p^2}{\hbar^2} \left( \left( \alpha + \frac{\hbar^2}{2\Delta p^2} \right)^2 - \left( \pm \sqrt{\underbrace{\left( \frac{\hbar^2}{2\Delta p^2} \right)^2 - \frac{\Delta x^2}{\Delta p^2} \hbar^2}_{<0: \text{Ungleichung verbietet reelle Nullstellen!!}}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Damit die Ungleichung (6-11) erfüllt sein kann, muss die rechte Seite reell sein. Also muss der Radikant positiv sein und wir erhalten die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Rightarrow \Delta x^2 \Delta p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (6-12)$$

## Die Bewegungsgleichungen der elementaren Felder

Wir können nun die Bewegungsgleichungen für das Wirkungsfeld  $\mathcal{J}$  und das Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$  angeben:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R} + V(\vec{x}) = 0}_{\text{Hamilton-Jacobi-Gleichung mit Unschärfepotential}} \quad \text{mit } R^2 = \rho; \\ \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left( \rho \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right)}_{\text{Kontinuitätsgleichung}} = 0. \end{cases} \quad (6-13)$$

Bevor wir gleich die mathematische Äquivalenz dieses Gleichungssystems zur Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik beweisen, wollen wir erstmal dieses Gleichungssystem wenigstens für einen Fall lösen.

Wir bringen (6-13) in eine für FEMLAB geeignete Form:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R} = 0, \\ \frac{\partial R^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left( R^2 \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right) = 0, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2m} R \frac{\partial S}{\partial x} \right) = - \frac{1}{2m} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x}. \end{cases} \quad (6-14)$$

Zur Stabilisierung wird eine so genannte künstliche Diffusion eingebaut. Diese dämpft numerische Fehler, die von der zweifachen Ortsableitung des Wirkungsfeldes herrühren. Die Eingaben für die Simulation sind

Variablen:	$\begin{cases} m = 1, & hbar2 = 1, \\ b = .4, & D^{(Artif)} = .9; \end{cases}$	Gebiet:	$solid, \quad x \in [-1, 1];$
Ausdruck:	$R0 = \exp(-x^2 / (2b^2));$	Initiierung:	$\begin{cases} R = R0, \\ S = 0; \end{cases}$
Gleichung:	$\underbrace{\frac{1}{a^{(S)}} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -D^{(Artif)} \frac{\partial S}{\partial x} \right)}_{\Gamma^{(S)}} = \underbrace{\frac{hbar2}{2mR} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2}_{F^{(S)}},$ $\underbrace{\frac{1}{a^{(R)}} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2m} R \frac{\partial S}{\partial x} \right)}_{\Gamma^{(R)}} = - \underbrace{\frac{1}{2m} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x}}_{F^{(R)}};$	Ränder:	$\begin{cases} \underbrace{R}_{R^{(R)}} = 0, \\ \underbrace{0}_{R^{(S)}} = 0; \end{cases}$

FEMLAB 6-1

Die Ergebnisse in Abbildung 6-5 zeigen das Zerfließen eines Wirkungsquants und seine Reflexion an den Rändern.

Im Kapitel über Wirkungen hatten wir dieselbe Rechnung durchgeführt, ohne die Unschärfe raumzeitlicher Bezüge zu berücksichtigen. Zeitliche Entwicklungen konnten nur in einem beschränkten Maße durchgeführt werden, weil schnellere Anteile des Wirkungsfeldes langsamere Anteile sozusagen nicht überholen konnten. Das Wirkungsfeld überschlug sich wie Wellen, die gegen den Strand laufen. Es handelte sich um ein grundsätzliches, strukturelles Problem und nicht um ein numerisches Problem.

Wir sehen nun in Abbildung 6-5, dass dieses Problem nicht mehr existiert. Die Unschärfe raumzeitlicher Bezüge schmiert die Unterschiede zwischen langsamen und schnellen Wirkungsanteilen aus und lässt das Wirkungsquant kontinuierlich zerfließen.

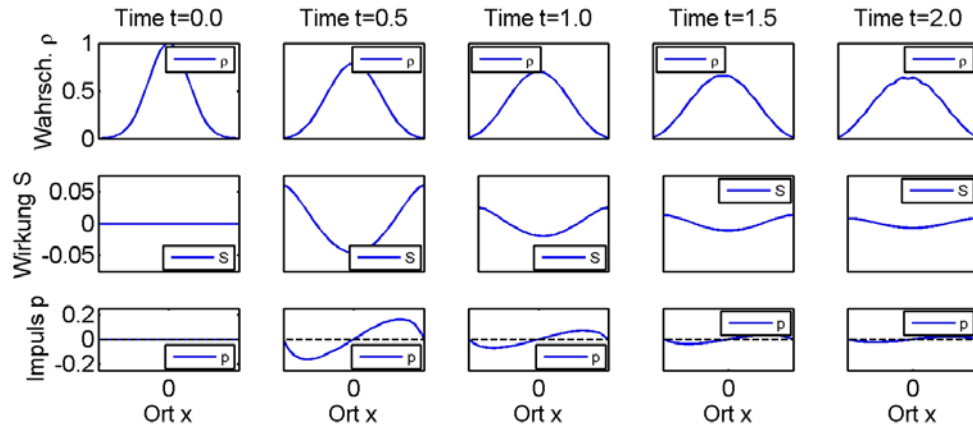


Abbildung 6-5

*Zerfließen eines Wirkungsquantums. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird zunächst breiter, bis es zur Reflexion an der Wand kommt, die reflektierten Anteile laufen wieder zusammen. Die Fließrichtungen können am Wirkungsfeld  $S$  oder am Impuls abgelesen werden. Wichtig ist vor allem auch, dass die Unschärfe raumzeitlicher Bezüge ein 'Überschlagen' der Felder unterdrückt.*

Im Prinzip kann man nun mit (6-13) alle Quantenphänomene untersuchen. Allerdings gibt es eine bessere Methode, dies zu tun. Mit einem mathematischen Kniff ist es möglich, die zwei gekoppelten, nichtlinearen Gleichungen in (6-13) auf eine einzige, lineare Gleichung abzubilden. Dies ist natürlich eine enorme Erleichterung, selbst wenn die neue Gleichung ein komplexes Feld beschreibt.

Ein weiterer Vorteil dieser transformierten Darstellung von (6-13) ist, dass wir dabei auf die bekannteste Form der Quantenmechanik stoßen, nämlich die Schrödinger-Gleichung. Die Schrödingersche Form von (6-13) ist mathematisch sehr viel leichter zu behandeln, führt aber sehr leicht zum so genannten 'Physikalischen Illusionismus' und damit zu skurrilen Interpretationen des Quantenfeldes  $\psi$ . Der Vorteil von (6-13) ist, dass sich die Dynamik der Wirkungsquanten ganz natürlich aus einer sorgfältigen Beschreibung unserer Bewusstseinsinhalte ergeben hat und eine klare Interpretation liefert. Das Wirkungsfeld  $S$  beschreibt, welche Impulse und Energien gemessen werden können und das Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$  beschreibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das entsprechende Ereignis stattfindet. Das Quantenfeld  $\psi$ , dass wir nun einführen, beschreibt eine komplexe Kombination von  $S$  und  $\rho$  und es macht keinen Sinn,  $\psi$  selbst zu interpretieren.

## Wirkungsquanten in der Schrödingerschen Darstellung

Wir führen nun das Quantenfeld  $\psi$  als komplexe Kombination des Wirkungsfeldes  $S$  und des Wahrscheinlichkeitsfeldes  $\rho$  ein und berechnen gleich ein paar Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned}
 \text{Quantenfeld } \psi &= R e^{iS/\hbar}, \quad R = \sqrt{\rho}: & (6-15) \\
 \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left( \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right) \psi, \\
 \vec{\nabla} \psi &= \left( \frac{\vec{\nabla} R}{R} + i \frac{\vec{\nabla} S}{\hbar} \right) \psi, \\
 \Delta \psi &= \left( \frac{\Delta R}{R} - \frac{(\vec{\nabla} R)^2}{R^2} + i \frac{\Delta S}{\hbar} + \left( \frac{\vec{\nabla} R}{R} + i \frac{\vec{\nabla} S}{\hbar} \right)^2 \right) \psi, \\
 &= \left( \frac{\Delta R}{R} - \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{\hbar^2} + i \frac{1}{\hbar} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left( \rho \vec{\nabla} S \right)}_{\frac{\rho}{R^2}} \right) \psi.
 \end{aligned}$$

Dies setzen wir nun in die bekannte Schrödinger-Gleichung ein und erhalten als ihren Imaginär- und Realteil unsere Gleichungen (6-13):

$$\begin{aligned}
 &\overbrace{0 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi}^{\text{Schrödinger-Gleichung}} & (6-16) \\
 &= \frac{\hbar}{i} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right) \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\Delta R}{R} - \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{\hbar^2} + i \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} S) \right) \psi + V \psi \\
 &= \underbrace{\left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R} + V \right)}_{\substack{=0 \\ \text{Hamilton-Jacobi-Gleichung} \\ \text{mit Unschärfepotential}}} \psi - \frac{i\hbar}{2\rho} \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left( \rho \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right) \right)}_{\substack{=0 \\ \text{Kontinuitätsgleichung des} \\ \text{Wahrscheinlichkeitsfeldes}}} \psi.
 \end{aligned}$$

Der Imaginärteil und der Realteil auf den rechten Seiten der Gleichungen müssen jeder für sich Null sein, woraus sich die Hamilton-Jacobi-Gleichung und die Kontinuitätsgleichung des Wahrscheinlichkeitsfeldes (6-13) ergeben.

## Quantenphänomene

Zur weiteren Diskussion des Verhaltens von Wirkungsquanten verwenden wir im Folgenden also die berühmte

$$\text{Schrödinger-Gleichung: } -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi, \quad \text{mit } \psi = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}. \quad (6-17)$$

### *Zerfließen eines Wirkungsquantums*

Zunächst wiederholen wir die Rechnung von Abbildung 6-5, nun jedoch auf Grundlage der Schrödinger-Gleichung (6-17). (6-17) und (6-13) sind mathematisch absolut äquivalent. Bei (6-13) handelt es sich jedoch um ein gekoppeltes, nichtlineares System und bei der Schrödinger-Gleichung (6-17) um ein einfaches, lineares. Das ist schon eine gewaltige Vereinfachung. Die FEMLAB-Formulierung des Problems ist daher auch sehr kompakt:

Gebiet: $solid1, \quad x \in [-1,1];$	Variablen: $\begin{cases} m=1, & b=0.4, \\ \hbar^2=1; \end{cases}$ <span style="float: right;"><i>FEMLAB</i> 6-2</span>
Ausdruck: $R0 = \exp(-x^2 / (2b^2));$	Initiierung: $\psi = R0;$
Gleichung: $i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left( \frac{1}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}_{\Gamma} = 0; \quad \underbrace{\psi}_{R} = 0.$	Ränder:

Das Ergebnis der Rechnung stimmt mit Abbildung 6-5 überein, allerdings war nun keine künstliche Diffusion mehr vonnöten.

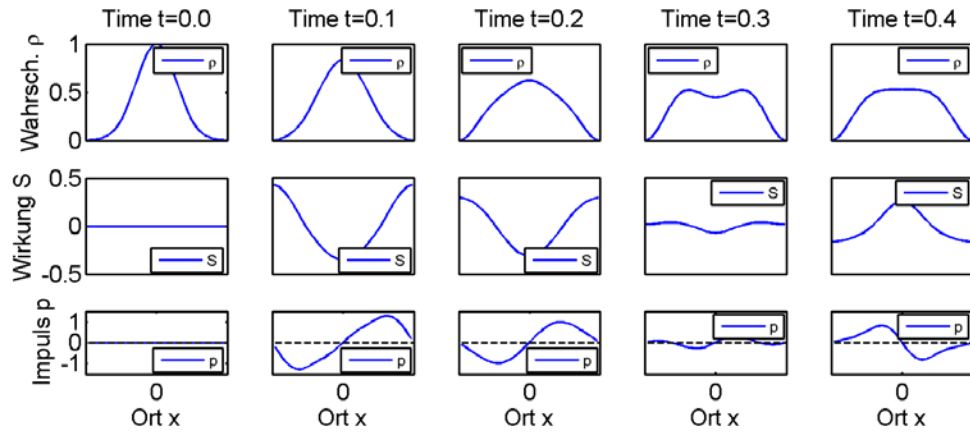


Abbildung 6-6

Zerfließen eines Wirkungsquantums und Reflektion an den Wänden wie in Abbildung 6-5, jedoch als Lösung der Schrödinger-Gleichung und ohne künstliche Diffusion.

### Reflexion eines Wirkungsquantums an einer Wand

Wir können nun ein Wirkungsquant mit einem Impuls versehen und es gegen eine Wand laufen lassen. Die FEMLAB-Eingaben sind

Gebiet: $solid1, x \in [-1,1];$	Variablen: $\begin{cases} m=1, & \hbar=1, \\ b=.3, & k=9; \end{cases}$ <span style="float: right;">FEMLAB 6-3</span>
Ausdruck: $R0 = \exp(-x^2 / (2b^2) + ikx);$	Initiierung: $\psi = R0;$
Gleichung: $i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left( \frac{1}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}_{\Gamma} = 0;$	Ränder: $\underbrace{\psi}_{\Gamma} = 0.$

In Abbildung 6-7 sind deutlich Interferenzphänomene zu erkennen. Wie bei Wasserwellen, die gegen eine Wand laufen, bildet sich so etwas wie stehende Wellen. Es handelt sich jedoch hier nicht um stoffliche Wellen, sonder um Wellen des Wahrscheinlichkeitsfeldes.

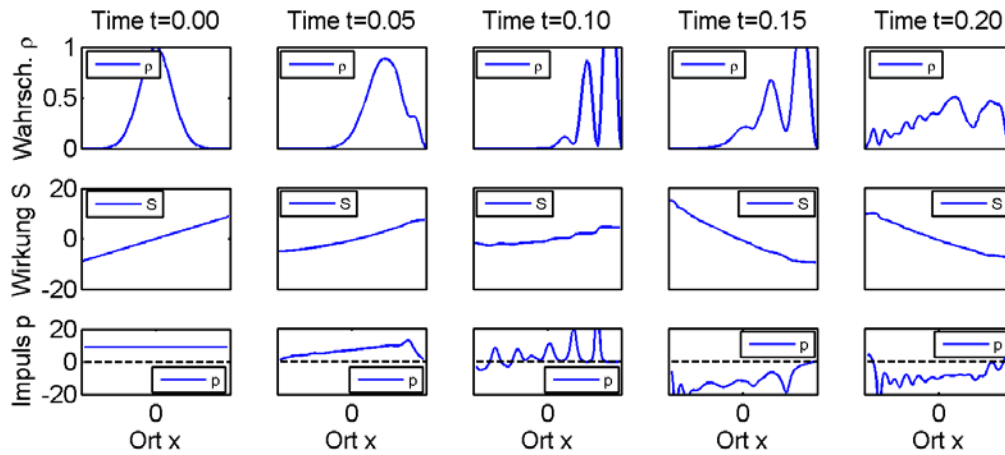


Abbildung 6-7

Reflektion eines Wirkungsquantums an der rechten Wand. Es treten deutliche Interferenzphänomene auf und das Wahrscheinlichkeitsfeld wird reflektiert, das Impulsfeld ändert sein Vorzeichen. Der Vorgang ist vergleichbar mit Wasserwellen, hier sind es jedoch Wellen eines abstrakten Quantenfeldes, welche zu Interferenzphänomenen im Wahrscheinlichkeitsfeld führen.

### Das Doppelspalt-Experiment

Sehr eindrucksvoll und lehrreich ist die Computersimulation des quantenmechanischen Doppelspaltexperiments. Hier treten alle merkwürdigen Quantenphänomene auf einmal in Erscheinung. Vor allem wird die Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik sehr klar. Simulieren wir zunächst das Phänomen:

Gebiet: <i>poly2</i> ;	Variablen:	<i>FEMLAB</i> 6-4
	$\begin{cases} m = 1, & \hbar^2 = 1, \\ b = .7, & k = 10; \end{cases}$	
Ausdruck:	Initiierung:	
$R0 = \exp\left(-\left((x+2)^2 + y^2\right)/(2b^2) + ikx\right);$	$\psi = R0;$	
Gleichung:	Ränder:	
$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left( \frac{1}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}_{\Gamma} = 0;_F$	$\underbrace{\psi}_R = 0.$	

Abbildung 6-8 zeigt, wie sich das Wahrscheinlichkeitsfeld einer Doppelspaltblende nähert und von dieser zum Großteil reflektiert wird. Ein gewisser Teil passiert die Spalten und bewegt sich weiter nach rechts, auf den Bildschirm zu. Neben den beiden Anteilen der Spalten bildete sich in der Mitte ein neuer Anteil des Wahrscheinlichkeitsfeldes. Dieser Anteil entwickelt sich anscheinend aus der Blende heraus und nicht aus den Spalten.

Das Wahrscheinlichkeitsfeld gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit jeweils eine Wirkung auftreten kann, wenn ein entsprechender Detektor vorhanden ist. Dem Feld ist abzulesen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Photopapier an der rechten Wand geschwärzt wird. Sehr viele Schwärzungen ergeben dann das berühmte Interferenzmuster [BRÄU04].

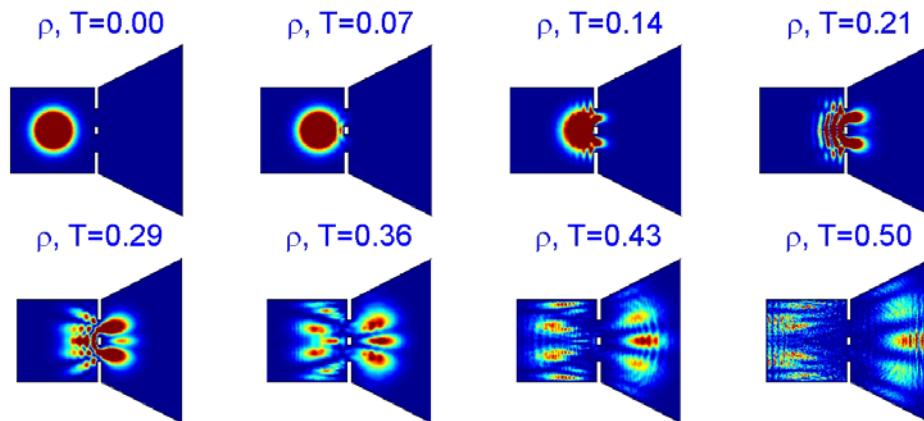


Abbildung 6-8

*Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\rho$  trifft in der Zeit  $T=0 \dots 0.5$  eine Doppelspaltblende. Ein Teil des Wahrscheinlichkeitsfeldes wird reflektiert, ein anderer passiert die Blende. Zu den zwei Wahrscheinlichkeitsanteilen hinter der Blende entwickelt sich ein weiterer, der keine direkte Verbindung zu einem der Spalten hat. Das Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$  gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Wirkung auf einen Detektor erzielt wird.*

In Abbildung 6-8 sehen wir wieder typische Interferenzphänomene. Sie resultieren aus Reflexionen an der Wand und aus dem Doppelspalt. Das Maximum nullter Ordnung des Doppelspaltes entwickelt sich zwischen den Maxima 1. Ordnung, die eine direkte Verbindung zum linken Teil der Kammer haben. Die Idee, ein einziges, objektives Elektron würde sich gleichzeitig durch beide Spalte bewegen und mit sich selber interferieren, erweist sich als abwegig. Vor allem, wenn man den Weg eines solchen, nur in der Vorstellung existierenden Elektrons verfolgen will, ergeben sich äußerst merkwürdige Phänomene. Plötzlich würde aus dem wellenartigen Elektron ein teilchenartiges. Das vorgestellte Objekt 'Elektron' hat plötzlich seine Eigenschaften grundlegend geändert. Ein un-

voreingenommenes, klares Durchdenken dieser Fakten hat vor fast einhundert Jahren auf die Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik geführt, mit der unsere Grundlagen in (6-13) in vollkommener Übereinstimmung sind.

## Die Kopenhagener Interpretation

Wir stellen uns einen Versuchsaufbau ähnlich wie in Abbildung 6-3 vor. Ein Glühdraht links in einer Vakuumröhre ist Quelle für Wirkungen rechts auf einem Photopapier. Wir haben nun jedoch eine Blende mit zwei Spalten wie in Abbildung 6-8. Bei genauer Beobachtung des Photopapiers erkennt man beim wirklichen Experiment wieder kleine, punktförmige Schwärzungen auf dem Photopapier. Nach einiger Zeit gibt es sehr viele dieser Schwärzungen und alle zusammen bilden ein typisches Interferenzmuster mit Maxima mehrerer Ordnungen.

Das Muster ist ein typisches Interferenzmuster, allerdings unterscheidet sich seine Entwicklung von Interferenzmustern stofflicher Wellen, etwa von Wasserwellen. Macht man ein ähnliches Experiment mit Wasserwellen, so prägen sich die Interferenzmuster gleichmäßig aus. Nach einer kurzen Pause zwischen den Beobachtungen haben sich alle Interferenzmaxima gleichmäßig verstärkt.

Beim Quantenexperiment ist das anders. Nach einer kurzen Beobachtungspause sind wenige neue Punkte auf dem Photopapier entstanden, verteilt gemäß dem Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$ . Es sieht aus, als würden kleine Teilchen auf dem Photopapier einschlagen und eine fast punktförmige Schwärzung hervorrufen. Die Teilchen selber sind jedoch nicht zu sehen, nur ihre Wirkungen. Die Teilchen oder Elektronen existieren nur in der Vorstellung.

Es ist ganz nahe liegend zu fragen, wie ein Teilchen, wenn es tatsächlich existieren würde, durch die beiden Spalten hindurch kommen könnte. Um mehr Informationen darüber zu erhalten, stellt man, wie in Abbildung 6-9, einen so genannten Wegedetektor auf. Dieser soll Wirkungen genau hinter einem der beiden Blendenspalte feststellen. Technisch ist es möglich, die Detektoren so zu bauen, dass sie sicher auf Wirkungen ansprechen, ohne jedoch das Wirkungsfeld selber merklich zu beeinflussen.

### *Quantensprünge*

Es ist jedoch klar, dass ein solcher Detektor das Wahrscheinlichkeitsfeld grundlegend beeinflusst. Spricht der Detektor nämlich an, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine Wirkung am Ort des Detektors plötzlich eins und sonst überall null. Spricht er nicht an, so ist es am Ort des Detektors null.

Einen kurzen Moment bevor das Wahrscheinlichkeitsfeld den Detektor erreicht hatte, waren die Werte des Feldes noch ganz anders. Sie waren hinter jedem Spalt gleich. Sobald fest steht, ob der Detektor anspricht oder nicht, ändert sich

das Wahrscheinlichkeitsfeld sprunghaft. Das ist der so genannte Quantensprung. Seine Bedeutung ist ganz offensichtlich, wenn man auf der Basis von Wahrscheinlichkeits- und Wirkungsfeld bleibt. Das Phänomen wird haarsträubend, wenn man sich hinter den wirklich beobachtbaren Wirkungen ein Objekt, etwa ein massives und geladenes Elektron auf einer Bahnkurve, vorstellt.

Vor allem eine Möglichkeit des Experiments wird dann regelrecht gespenstisch; so drückte es Albert Einstein einmal aus. Nämlich wenn der Detektor nicht anspricht. Im Rahmen der klassischen Physik ist dann nicht einzusehen, welche Rolle der Detektor überhaupt spielt. Klassisch hat ein Detektor, der nicht anspricht, nichts mit dem Experiment zu tun. Hier allerdings verschwindet das Interferenzmuster und man erhält das klassische Ergebnis aus dem früheren Kapitel über Kontinuität. Der Detektor spricht nicht an und ändert trotzdem grundlegend den Ausgang des Versuchs.

Auf der Grundlage von Wirkungen und Wahrscheinlichkeiten ist es allein die Möglichkeit, eine Wirkung festzustellen, die das Wahrscheinlichkeitsfeld verändert. Es muss nicht tatsächlich eine Wirkung auftreten. Durch den Detektor wird entschieden, welchen Weg die Wirkung tatsächlich nimmt. Aus Möglichkeiten werden so Tatsachen. Die Wirkung tritt am Detektor auf oder nicht und dadurch wird das Wahrscheinlichkeitsfeld ganz neu festgelegt.

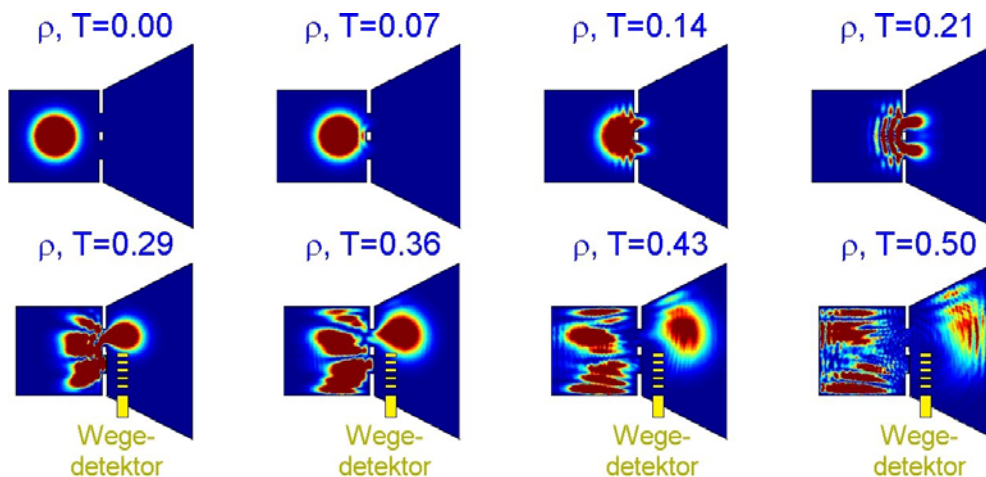


Abbildung 6-9

*Doppelspaltexperiment mit Wegedetektor. Der Wegedetektor spricht hier nicht an. Damit ändert sich das Wahrscheinlichkeitsfeld augenblicklich. Da der Wegedetektor nicht anspricht, ist das Wahrscheinlichkeitsfeld im Bereich des Detektors null, in den anderen Bereichen des Gebiets wird das Feld stärker, weil insgesamt die Wahrscheinlichkeit für eine Wirkung gleich bleiben muss.*

### Wellen-Teilchendualismus

Wir dürfen nicht unterstellen, dass sich ein Objekt auf einer Bahnkurve durch die Spalten bewegt. Diese Idee von Bahnkurven funktioniert nur bei Wirkungen,

die groß im Vergleich zum Planckschen Wirkungsquantum  $h$  sind. Dann ist automatisch die Unschärfe oder Streuung des Wahrscheinlichkeitsfeldes so klein, dass das Unschärfepotential in (6-13) bedeutungslos wird und keine Interferenzphänomene zutage treten.

Auf der Basis des Wahrscheinlichkeitsfeldes  $\rho$  und Wirkungsfeldes  $S$  verstehen wir, dass ohne Wegedetektor typische Wellenphänomene mit Interferenzmustern auftreten. Mit Wegedetektor können keine Wellenphänomene erscheinen und die Wirkungen entsprechen denen von Teilchen auf statistisch verteilten Bahnkurven, wie im Kapitel über die 'Kontinuität als umfassende Grundlage der Physik'.

Das ist der Wellen-Teilchendualismus. Je nach Art der Beobachtung, also mit oder ohne Wegedetektor, treten verschiedene Arten von Wirkungen auf. Dem Phänomen liegt also weder ein stoffliches Teilchen, etwa ein massives und geladenes Elektron zugrunde, noch eine stoffliche Welle. Was sich von der Quelle zum Photopapier ausbreitet, sind die Möglichkeiten für Wirkungen auf Detektoren. Das ist sicher nicht ganz leicht zu fassen.

### *Nichtlokalität*

Der Wegedetektor beeinflusst durch sein Ansprechen oder Nichtansprechen augenblicklich das gesamte Wahrscheinlichkeitsfeld in allen Bereichen des experimentellen Aufbaues. Das ist in Abbildung 6-10 noch einmal dargestellt. Es handelt sich um ein nichtlokales Phänomen. Die Wirkung des Detektors auf das Wahrscheinlichkeitsfeld geschieht nicht über Wechselwirkungen, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit beschränkt ist. Besonders drastisch ist das, wenn der Wegedetektor nicht anspricht und trotzdem Interferenzphänomene unterdrückt. Es gibt Experimente mit Quanteninterferometern, wo die Wirkung viele Kilometer um den Wegedetektor herumläuft und trotzdem von ihm beeinflusst wird.

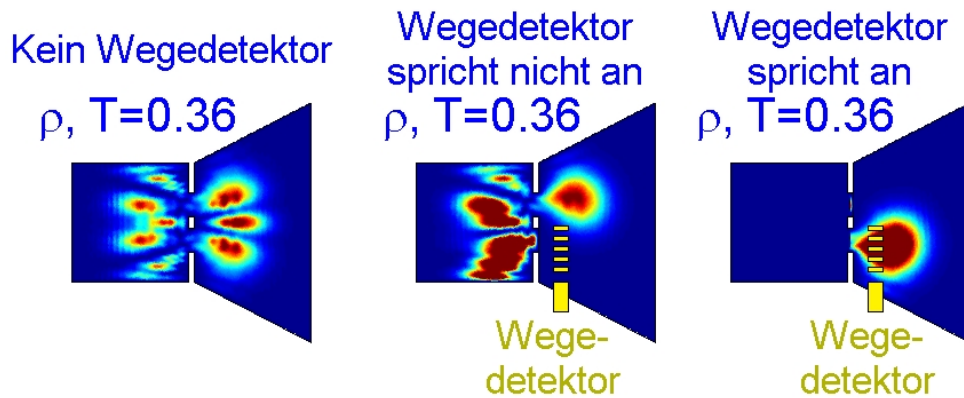


Abbildung 6-10

Aktivierung des Wegedetektors zur Zeit  $T=0.36$ . Links sehen wir die Werte des Wahrscheinlichkeitsfeldes ohne Wegedetektor, in der Mitte und links die sprunghaft durch den Wegedetektor veränderten Werte. Je nachdem, ob der Wegedetektor anspricht oder nicht, ist die Wahrscheinlichkeit einer Wirkung auf den Bereich um den Wegedetektor oder auf den Rest des Gebietes verteilt.

Besonders aufregend ist, dass die Möglichkeit des Ansprechens die Dynamik des Wahrscheinlichkeitsfeldes verändert und nicht das tatsächliche Ansprechen. In der Mitte spricht der Wegedetektor nicht an, und trotzdem wird der gesamte Ablauf grundlegend geändert. Klassisch dürfte es keinen Unterschied zwischen den Feldwerten links und in der Mitte geben.

### Atomare Wirkungsquellen

Die Unschärfe der Wirkungen ist für atomare Strukturen verantwortlich. Unter einem atomaren Zustand versteht man eine Lösung von (6-13) mit einer räumlich und zeitlich konstanten Energie. Der atomare Zustand ist auch räumlich auf den Bereich der atomaren Wirkung beschränkt, und das ergibt sich letztendlich aus der elektromagnetischen Wechselwirkung, die wir in den nächsten Kapiteln erst noch ableiten müssen. Dazu werden wir die Eichfreiheitsgrade des Wirkungsfeldes heranziehen.

Für eine erste Betrachtung atomarer Zustände können wir die räumliche Beschränkung des Quantenfeldes  $\psi$  auch durch Randbedingungen festlegen. Dann folgt aus (6-17) die so genannte zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung und ihre zeitunabhängige Form

$$\left. \begin{array}{l}
 \underbrace{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi}_{\text{Freie Schrödinger-Gleichung}}, \\
 \underbrace{\psi = u_n e^{-iE_n t/\hbar}}_{\text{Ansatz für Lösungen mit konstantem Energiefeld}};
 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{E_n u_n = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u_n}_{\text{Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung}}. \quad (6-18)$$

Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung stellt mathematisch gesehen ein Eigenwertproblem dar, das wir mit FEMLAB leicht lösen können:

Gebiet: <i>circ2</i> ;	Variablen: $m = 1$ ; <span style="float: right;"><i>FEMLAB 6-5</i></span>
Gleichung:	Ränder:
$\underbrace{\frac{1}{a} E u + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2m} \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{\Gamma} = \underbrace{0}_{\Gamma}$	$\underbrace{u}_{\bar{R}} = 0.$

Abbildung 6-11 zeigt zweidimensionale atomare Zustände. Wir sehen radiale und angulare Anregungen. Die angularen Anregungen sind mehrfach entartet, es gibt also unterschiedliche Zustände mit derselben Energie.

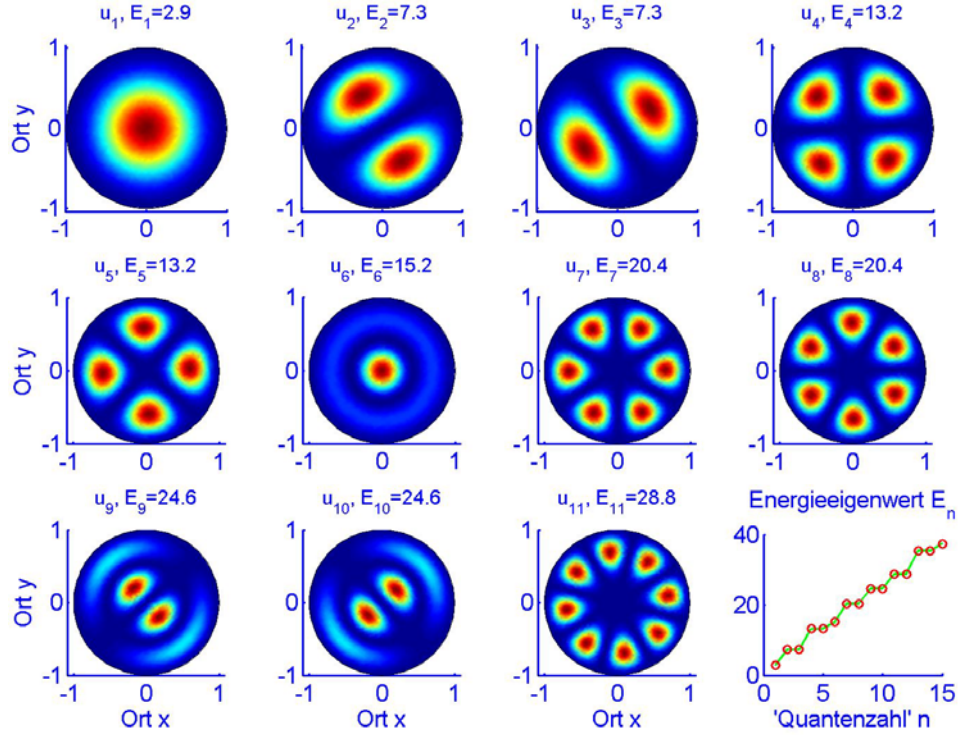


Abbildung 6-11

Bindungszustände  $u_n$  von Wirkungsquanten der 'Quantenzahl'  $n$ . Es gibt radiale und angulare Anregungen. Die angularen Anregungen sind entartet.  $E_n$  gibt die Werte der Energieeigenwerte an. Das gesamte Energiespektrum rechts unten ist stufenförmig mit Unterbrechungen durch die radialen Anregungen.

Die Schrödinger-Gleichung (6-17) wird durch jede beliebige Linearkombination der Eigenzustände gelöst:

$$\psi = \sum_k c_k u_k e^{-iE_k t/\hbar} \quad \text{mit} \quad |c_k|^2 \quad \text{als Wahrscheinlichkeit für } u_k. \quad (6-19)$$

Man spricht von einem reinen Zustand, wenn nur ein Koeffizient  $c_k$  von null verschieden ist, also

$$\psi = u_k e^{-iE_k t/\hbar} \quad \text{und} \quad \rho = \psi^* \psi = |u_k|^2. \quad (6-20)$$

Dieses Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$  eines reinen Zustandes ändert sich nicht mit der Zeit, es ist stationär. Wir werden sehen, dass ein solcher Zustand keine Quelle für Lichtwirkungen sein kann.

Das Wahrscheinlichkeitsfeld eines gemischten Zustandes ändert sich mit der Zeit. Der Einfachheit halber betrachten wir ein Quantenfeld mit nur zwei Koeffizienten  $c_k, c_l$  ungleich null:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u_k e^{-iE_k t/\hbar} + u_l e^{-iE_l t/\hbar} \right) \quad (6-21)$$

und

$$\begin{aligned} \rho &= \psi^* \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u_k e^{iE_k t/\hbar} + u_l e^{iE_l t/\hbar} \right) \left( u_k e^{-iE_k t/\hbar} + u_l e^{-iE_l t/\hbar} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( u_k^2 + u_k u_l e^{i \frac{E_k - E_l}{\hbar} t} + u_k u_l e^{-i \frac{E_k - E_l}{\hbar} t} + u_l^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( u_k^2 + 2 \cos \left( \frac{\omega}{\Delta E/\hbar} t \right) u_k u_l + u_l^2 \right) \end{aligned}$$

Das Wahrscheinlichkeitsfeld oszilliert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \Delta E / \hbar$ . Wir werden sehen, dass dieses Wahrscheinlichkeitsfeld Quelle von Lichtwirkungen der Frequenz  $f = \omega / 2\pi = \Delta E / h$  ist. So erklären sich die bekannten atomaren Spektren.

Ein angeregtes Atom wird durch mehrere von Null verschiedene Koeffizienten  $c_k, c_l$  beschrieben. Das Wahrscheinlichkeitsfeld oszilliert mit den Frequenzen  $f_{kl} = \Delta E_{kl} / h$ . In einem Spektrometer treten diese Frequenzen als scharfe Spektrallinien auf.

Um diesen Prozess vollständig auf der Basis von Wirkung und Wahrscheinlichkeit simulieren zu können, müssen wir uns in den nächsten beiden Kapiteln mit den Konsequenzen der Relativität raumzeitlicher Bezüge und den Eichfreiheitsgraden des Wirkungsfeldes befassen.



# 7. Relativität

## Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen

Unter Licht stellen wir uns immer etwas ganz Konkretes, Gegenständliches vor. Je nach Umständen glauben wir an Lichtstrahlen, Lichtwellen, Lichtteilchen, Lichtquanten oder auch an Photonen als Elementarteilchen. Das ist im Einzelfall natürlich immer sehr sinnvoll. Dass es so viele, ganz unterschiedliche Vorstellungen über Licht gibt sollte uns jedoch schon etwas stutzig machen, wenn wir die Natur des Lichtes begreifen wollen.

Licht ist auf keinen Fall objektiv wie ein Körper oder eine Flüssigkeit. Was wir uns unter Licht vorstellen, ist ganz extrem kontextabhängig. Und für viele wird es sehr überraschend sein, dass wir Licht selber tatsächlich gar nicht wahrnehmen. Was wir wahrnehmen, sind immer beleuchtete Körper. Im Licht erscheint die Welt in unserem Bewusstsein anders als ohne Licht. Wir erkennen das beleuchtete Objekt, nicht jedoch das Licht selbst.

Denken wir zum Beispiel an Sonnenstrahlen unter einer Gewitterwolke, oder an einen Regenbogen. Viele werden sich sehr sicher sein, hier ganz deutlich und greifbar Licht zu sehen. Die Lichtstrahlen sind deutlich und erscheinen so objektiv wie nur irgendetwas. Was wir tatsächlich sehen, ist jedoch etwas ganz anderes. Die Sonne strahlt Wassertröpfchen an, die so zu leuchten beginnen. Im Grunde sehen wir die Sonne, die sich in Wassertröpfchen spiegelt.

Ähnlich ist es mit den elektromagnetischen Feldern, die wir für sehr greifbar und wirklich halten. Im nächsten Kapitel wird begründet, dass Lichtphänomene und elektromagnetische Felder im Grunde sehr eng zusammenhängen. Wir legen eine Glasscheibe auf einen Stabmagneten und streuen Eisenfeilspäne darauf. Wir sehen, wie sich die Eisenspäne entlang so genannter Feldlinien anordnen und glauben, direkt das elektromagnetische Feld zu sehen. Tatsächlich sehen wir jedoch Eisenspäne, die sich auf besondere Weise angeordnet haben. Sonst sehen wir nichts.

Es wird hier sehr klar, was mit physikalischem Illusionismus gemeint ist. Licht ist ein Musterbeispiel dafür. Licht hat nichts Körperliches an sich, es ist nicht wahrnehmbar. Es ist jedoch eine Notwendigkeit unseres Denkens und Wissens, sich von allem ein objektives Bild zu machen. Das gilt für Licht genauso wie für Raum und Zeit. Strahlen, Wellen, Quanten und dergleichen sind Bilder, die uns helfen, Lichtphänomene zu begreifen und sie sehr erfolgreich zu unserem Vorteil zu nutzen. Mit dem mathematischen Modell von Lichtwellen etwa lassen sich ganz großartige optische Geräte entwickeln: Brillengläser, Fernrohre und vieles mehr. Wir verwechseln jedoch die Interpretation der mathematischen

Modelle mit der Wirklichkeit und das führt uns zu einem verzerrten und verwirrten Bild der Welt.

Licht selber ist etwas Umfassendes, eine Grundlage für die Erkennbarkeit des Körperlichen, eine Beziehung zwischen den Körpern. Im bewussten Erkennen der Welt erscheint diese Bruchstückhaft. Wir projizieren Objekteigenschaften aus unserem Gedächtnis in die Welt hinein und können sie so erkennen. Licht ist genau das, was wir so nicht erfassen können, nämlich die unendlich feine Verflechtung zwischen allem Körperlichen. Die physikalischen Gesetze der Lichtwirkungen oder der Elektrodynamik werden wir genau so herleiten: Die Dynamik des Wirkungsfeldes ist durch die körperlichen Kräfte der klassischen Mechanik oder der Quantenmechanik nicht eindeutig festgelegt. Die Gesetzmäßigkeit von Lichtwirkungen folgt aus den restlichen Freiheitsgraden des Wirkungsfeldes. Die Kontinuität dieser so genannten Eichfreiheitsgrade ist mathematisch äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik.

Um uns etwas von unseren körperlichen Vorstellungen von Licht zu lösen, sollten wir bei physikalischen Betrachtungen nicht von Licht oder Lichtgeschwindigkeit sprechen, sondern besser von Lichtwirkungen oder von der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen. Es gibt Lichtquellen und Wirkung auf Detektoren, etwa auf die Netzhaut des menschlichen Auges. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtwirkungen ergibt sich aus dem Abstand zwischen Quelle und Detektor und der Zeit zwischen Ursache und Wirkung. Alles andere sind mathematische Hilfsmittel.

## **Die Unabhängigkeit der Lichtsignale vom Koordinatensystem**

Zur mathematischen Beschreibung der Natur sind wir in der Regel auf Koordinatensysteme angewiesen. Diese basieren auf einem endlichen Maßstab und einem festen Bezugspunkt. Mit Maßstab und Bezugspunkt erstellen wir ein Bild der raumzeitlichen Bezüge zwischen den Objekten, die an dem betrachteten physikalischen Phänomen beteiligt sind.

Den Bezugspunkt gibt es ja in der Natur nicht wirklich, er hat jedoch recht verwirrende Konsequenzen auf die mathematische Beschreibung der Lichtausbreitung. Jeder Beobachter hat nämlich eine bestimmte Position und Geschwindigkeit relativ zu diesem Bezugspunkt. Und diese sind absolut willkürlich, sie sollte für die physikalischen Phänomene überhaupt keine Rolle spielen. So wie wir in den vorausgehenden Kapiteln mit Raum und Zeit umgegangen sind, tun sie es jedoch. Wir werden so auf physikalische Illusionen hingewiesen, denen wir in der Regel unterliegen. Nur in unseren Koordinatensystemen hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen von der Bewegung des Beobachters ab, in der Wirklichkeit kann das jedoch nicht der Fall sein.

Wir wollen das etwas genauer betrachten. In Abbildung 7-1 ist ein Diagramm für die gleichförmige Bewegung eines Beobachters und eines Signals auf einem materiellen Träger wie Wasser oder Luft dargestellt. Die Geschwindigkeit des Beobachters und die des Signals ergeben sich aus den von ihnen pro Zeitintervall zurückgelegten Raumintervallen. Die Relativgeschwindigkeit zwischen Signal und Beobachter ist dann die Differenz der Geschwindigkeiten. Bei Lichtsignalen ist die Geschwindigkeit des Beobachters jedoch ein reines Artefakt, hervorgerufen durch die Wahl des Bezugssystems. Ohne dieses Artefakt ergibt sich zwangsläufig eine Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtsignals, die unabhängig von der Bewegung des Beobachters ist:

Mit Bezugspunkt: 
$$v^{(Beobachter)} = \frac{x_2^{(Beobachter)} - x_1^{(Beobachter)}}{t_2 - t_1}, \quad (7-1)$$

$$v^{(Signal)} = \frac{x_2^{(Signal)} - x_1^{(Signal)}}{t_2 - t_1},$$

$$v^{(Relativ)} = \frac{\left(x_2^{(Relativ)}\right) - \left(x_1^{(Relativ)}\right)}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{\left(x_2^{(Signal)} - x_2^{(Beobachter)}\right) - \left(x_1^{(Signal)} - x_1^{(Beobachter)}\right)}{t_2 - t_1}$$

$$\rightarrow \underbrace{v^{(Relativ)} = v^{(Signal)} - v^{(Beobachter)}}_{\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit materieller Signale}};$$

Ohne Bezugspunkt: 
$$\underbrace{v^{(Relativ)} = v^{(Signal)}}_{\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen}} = c.$$

Das ist nun der Unterschied zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit von materiellen Signalen, etwa in Wasser oder Luft, und von Lichtsignalen: Bei materiellen Signalen gibt es einen Bezugspunkt oder es liegt zumindest die Geschwindigkeit des Mediums fest, in dem sich das Signal ausbreitet. Die Geschwindigkeit von Wasserwellen ist immer relativ zur Fließgeschwindigkeit des Wassers zu sehen. Bei Lichtsignalen gibt es dieses Medium nicht. Lichtsignale basieren ja auf der Ausbreitung von Wirkungen, also auf einem reinen Kausalzusammenhang ohne materiellen Träger. Daher hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen unabhängig von der Bewegung des Bezugssystems immer denselben Wert  $c$ , zumindest im Vakuum.

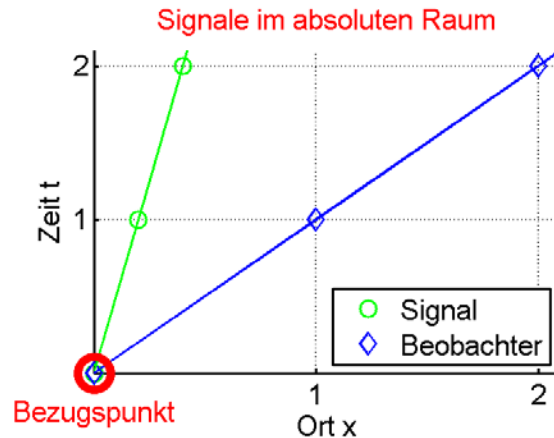


Abbildung 7-1

*Signalausbreitung in einem absoluten Raum. Der Beobachter und ein materielles Signal, etwa Schall- oder Wasserwellen, bewegen sich relativ zum Bezugspunkt. Misst der Beobachter die Geschwindigkeit des Signals, so findet er wie in (7-1) die absolute Geschwindigkeit des Signals abzüglich seiner eigenen Geschwindigkeit. Die Signalgeschwindigkeit hängt von seiner Bewegung relativ zum Bezugspunkt ab. Bei Lichtsignalen ist das anders.*

Nun sind wir bei der physikalischen Beschreibung von Lichtphänomenen in der Regel auf Koordinatensysteme angewiesen, zu denen eben ein Bezugspunkt gehört. Das Problem lässt sich jedoch lösen und man bekommt dabei sogar ganz wichtige Hinweise auf die Dynamik der physikalischen Wirkungen. Die Energiefunktion bzw. die Hamilton-Jacobi-Gleichung, die wir in einem vorausgehenden Kapitel noch etwas schwerfällig mit der Objektivität der physikalischen Phänomene begründet haben, ergibt sich nun fast von selbst.

Die Beobachtung wird in dem Koordinatensystem beschrieben, in dem der Beobachter ruht. Die Transformation in das so genannte Ruhesystem eines anderen Beobachters muss dann so gestalten sein, dass sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen dabei nicht ändert. Das leistet die bekannte Lorentz-Transformation. Weiterhin müssen die mathematischen Ausdrücke zur Beschreibung von Wirkungen so sein, dass sie sich unter dieser Lorentz-Transformation nicht ändern. Das legt die Dynamik des Wirkungsfelds ganz genau fest.

## Die Lorentz-Transformation

Bei der Transformation zwischen Ruhesystemen verschiedener Beobachter muss die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen  $c$  denselben Wert behalten. Daher wird die Transformation Raum- und Zeitkoordinaten verknüpfen. Wenn bei der Transformation Wegintervalle länger werden, müssen ja auch

gleichzeitig Zeitintervalle länger werden, damit die Geschwindigkeit gleich bleibt. Daher ist es sinnvoll, für die mathematische Beschreibung so genannte Vierervektoren einzuführen, die Raum- und Zeitkoordinaten verknüpfen. Damit breiten sich Lichtsignale auf raumzeitlichen Kegeln aus, was sehr elegant angegeben werden kann:

$$\begin{aligned} \text{Vierervektor: } & \begin{cases} x^\mu = (\vec{x}, -ct); \\ x_\mu = (\vec{x}, ct); \end{cases} \quad \rightarrow \quad (7-2) \\ \text{Lichtkegel: } & x_\mu x^\mu = (\vec{x})^2 - (ct)^2 = 0. \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber wählen wir im Folgenden die Koordinatensysteme so, dass sich das Lichtsignal genau in x-Richtung ausbreitet.

Zwei Bezugssysteme bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $v_x$  relativ zueinander. Dann ist die Lorentz-Transformation

$$\underbrace{\begin{cases} x' = \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v_x^2 / c^2}}; \\ t' = \frac{t - x v_x / c^2}{\sqrt{1 - v_x^2 / c^2}}; \end{cases}}_{\text{Lorentz-Transformation}} \Rightarrow x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu. \quad (7-3)$$

Abbildung 7-2 zeigt ein Beispiel mit der Ausbreitung eines Lichtsignals und zwei relativ zueinander bewegten Beobachtern. Links ist das Ruhesystem von  $\mathcal{A}$  zu sehen und rechts das von  $\mathcal{B}$ . Die raumzeitlichen Bezüge jedes einzelnen Ereignisses im Beobachtungsraum (oder Bewusstseinsraum) von  $\mathcal{A}$  wurden mit (7-3) in den Beobachtungsraum von  $\mathcal{B}$  transformiert. Der so genannte Lichtkegel wird dabei verzerrt. Die Ereignisse, die im Beobachtungsraum  $\mathcal{A}$  gleichzeitig stattfanden, sind im Beobachtungsraum  $\mathcal{B}$  nicht mehr gleichzeitig. Wie sich aber den Diagrammen in Abbildung 7-2 leicht ablesen lässt, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtsignale in beiden Räumen identisch  $c=1$ , die Steigung der Lichtkegel bleibt gleich. Genau das wird ja von der Lorentz-Transformation (7-3) gefordert.

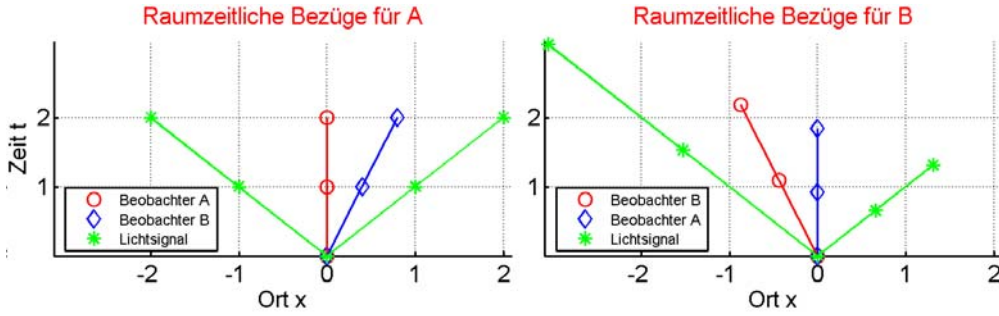


Abbildung 7-2

Signalausbreitung und Bewegung von zwei Beobachtern in ihren Beobachtungsräumen (oder Bewusstseinsräumen); links der von A und rechts der von B. Bei A finden viele Ereignisse gleichzeitig statt, die Punkte liegen horizontal genau nebeneinander. Nach der Lorentz-Transformation in das Ruhesystem von B ist das nicht mehr so. Auch ist der Lichtkegel bei B verzerrt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen ist in beiden Räumen jedoch gleich  $c=1$ .

Die Unabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen aufgrund der Lorentz-Transformation lässt sich natürlich auch leicht analytisch zeigen:

$$c' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\overbrace{dx - v_x dt}^{=cdt}}{\underbrace{dt - (v_x/c^2) dx}_{=cdt}} = \frac{(c - v_x/c^2) dt}{(1 - v_x/c) dt} = c \quad (7-4)$$

Bei sehr kleinen Relativgeschwindigkeiten  $v_x \ll c$  der beiden Beobachtungsräume A und B geht die Lorentz-Transformation über in die altbekannte Galilei-Transformation, also in die Transformation zwischen absoluten Räumen mit festen Bezugspunkten:

$$x' = \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = \underbrace{(x - v_x t)}_{\text{Lorentz-Transf.}} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v_x^2}{c^2} + O\left(\frac{v_x^4}{c^4}\right) \right) = \underbrace{x - v_x^2 t}_{\text{Galilei-Transf.}} + O\left(\frac{v_x^2}{c^2}\right);$$

$$t' = \frac{t - x v_x / c^2}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = \underbrace{(t - x v_x / c^2)}_{\text{Lorentz-Transf.}} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v_x^2}{c^2} + O\left(\frac{v_x^4}{c^4}\right) \right) = \underbrace{t}_{\text{Galilei-Transf.}} + O\left(\frac{v_x^2}{c^2}\right).$$

Gerne stellt man die Konsequenzen dieser Verzerrungen raumzeitlicher Bezüge in verschiedenen Beobachtungsräumen mit Hilfe des Zwillingsparadoxons dar

[BRÄU04]. Es beruht auf dem hypothetischen Fall eines Zwillingspaares, einem Nesthocker und einem galaktischen Reisenden. Nach der Rückkehr ist der Reisende weniger gealtert als sein nesthockender Bruder.

Etwas realistischer, also experimentell zugänglicher, ist das Verhalten von Myonen. Das sind elementare Wirkungsquanten wie die Elektronen, nur mit etwa 200-fach größerer Masse. Sie entsteht unter anderem, wenn die Sonnenstrahlung etwa 50 km über der Erdoberfläche auf die Atmosphäre trifft und sie zerfallen wieder nach nur 2 Mikrosekunden. Wegen dieser kurzen 'Lebensdauer' dürften sie die Erdoberfläche eigentlich nicht erreichen. Sie werden jedoch in irdischen Labors nachgewiesen, weil die raumzeitlichen Bezüge im Ruhesystem der Myonen sich sehr von denen in unserem Ruhesystem unterscheiden [BRÄU04]. Die in der Lorentz-Transformation beschriebenen raumzeitlichen Verzerrungen verändern den Weg der Myonen und ihre Zeit, so dass sie es bis zur Erdoberfläche schaffen, bevor sie wieder zerfallen.

Auch das immer mehr verbreitete 'Satellitengestützte Navigationssystem (GPS)' berücksichtigt die raumzeitlichen Verzerrungen zwischen den Satelliten und den Messgeräten auf der Erde. Nur so kann eine Position auf der Erdoberfläche auf wenige Meter genau bestimmt werden.

### **Der individuelle Charakter raumzeitlicher Bezüge und ihre kollektive Grundlage**

Es wird sehr deutlich, dass wir unsere Vorstellung von einem absoluten Raum, in den wir hineingeboren werden, in dem wir gemeinsam mit unseren Mitmenschen existieren und den wir auch zur gegebenen Zeit wieder verlassen, ganz aufgeben müssen. Dieser absolute Raum existiert nicht, wir haben ihn uns ausgedacht.

Die raumzeitlichen Bezüge zwischen unseren Bewusstseinsinhalten, die wir ja tatsächlich erleben, sind individueller Natur. Sie unterscheiden sich für jeden, der sich relativ zu einem anderen bewegt. Dieser Unterschied ist sehr klein, aber es sind eben nur die gleichen, und nicht dieselben Bezüge. Raum ist Bewusstseinsraum.

Jedoch existiert eine Transformation zwischen den verschiedenen raumzeitlichen Bezügen und die Konsequenzen dieser Transformation sind nachweisbar. Wenn ich im Auto sitze und das Navigationssystem meine Position tatsächlich auf der Straße anzeigt und nicht 10 Meter daneben im Acker, dann nur, weil die Lorentz-Transformation die richtige Beziehung zwischen den Satelliten und meinem GPS-Empfänger angibt.

Das bedeutet doch, dass die Phänomene, die ich ganz individuell in meinem Bewusstsein erlebe, einen kollektiven Charakter haben. Andere erleben genau dieselben Phänomene, nur in geringfügig anderen raumzeitlichen Beziehungen.

Nur deshalb kann die Unabhängigkeit der Lichtsignale vom Bezugssystem Konsequenzen haben auf die beobachteten Phänomene. Es bedeutet, dass die Welt ganz individuell in meinem Bewusstsein raumzeitlich erscheint, dass dies jedoch eine den Menschen gemeinsame kollektive Basis hat.

## Der relativistische Energiesatz

Im früheren Kapitel über Wirkungen haben wir die Energiebeziehung aus der Unabhängigkeit des Wirkungsfeldes vom expliziten Impuls eines massiven Körpers abgeleitet. Wir werden jetzt eine entsprechende Energiebeziehung allein aus der Unabhängigkeit der Lichtsignale vom Bezugssystem ableiten. Für kleine Geschwindigkeiten sind beide Energiefunktionen gleich. Die nun folgende Ableitung ist jedoch eleganter und von umfassender Gültigkeit.

### *Invariante Zeit oder Eigenzeit*

In (7-2) haben wir den Viervektor für Ort und Zeit eingeführt. Seine Länge ist auf dem Lichtkegel null. Zur Beschreibung von Geschwindigkeiten oder Impulsen benötigen wir auch Vierervektoren für die Geschwindigkeit und den Impuls, also für die zeitliche Ableitung des Ortszeitvektors. Allerdings sollte die Zeit, nach der abgeleitet wird, nicht vom Bezugssystem abhängen. Daher müssen wir die invariante Zeit oder besser die Eigenzeit  $\tau$  einführen. Das Quadrat des Ortszeitvektors hängt nicht vom Bezugssystem ab und ermöglicht dies:

$$x_\mu x^\mu = (\vec{x})^2 - (ct)^2 = -(c\tau)^2 = \begin{cases} \geq 0 & \text{innerhalb des Lichtkegels;} \\ 0 & \text{auf dem Lichtkegel;} \\ < 0 & \text{außerhalb des Lichtkegels.} \end{cases} \quad (7-6)$$

$\tau$  ist die Zeit im Bezugssystem, in dem sich der Beobachter nicht bewegt, also die Eigenzeit:

$$dx = 0: \quad dt = \frac{d\tau - \frac{v^2}{c^2} \overbrace{dx}^{=0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7-7)$$

Dies ist der wichtige Zusammenhang zwischen invarianter Eigenzeit  $\tau$  und der Zeitkoordinate  $t$ .

### *Weitere Vierervektoren*

Damit können wir nun die Vierergeschwindigkeit angeben:

$$v_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\vec{v}, -c). \quad (7-8)$$

Die Länge dieses Vektors sollte wieder unabhängig vom Bezugssystem sein:

$$v_\mu v^\mu = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (\vec{v}^2 - c^2) = \frac{\vec{v}^2 - c^2}{c^2 - \vec{v}^2} c^2 = -c^2. \quad (7-9)$$

Den Viererimpuls konstruieren wir so, dass das Wirkungsfeld unabhängig vom Bezugssystem ist; das ist ja unsere allererste Forderung:

$$dS = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu} S}_{\substack{\text{siehe} \\ \text{Fußnote!}}} dx^\mu = \underbrace{\vec{p}}_{= \vec{\nabla} S} \cdot d\vec{x} - \underbrace{\frac{1}{c} E}_{\substack{\frac{c}{\frac{\partial S}{\partial t}}}} c dt = p_\mu dx^\mu; \quad (7-10)$$

→

$$p_\mu = \left( \vec{p}, \frac{1}{c} E \right).$$

Die gesuchte Energie-Impuls-Beziehung fällt uns damit praktisch in den Schoß. Wir müssen nur das Wirkungsfeld nach der Eigenzeit ableiten, um den richtigen Ausdruck für die Energie zu erhalten:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \underbrace{p_\mu}_{\substack{\frac{\partial S}{\partial x^\mu}}} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = p_\mu v^\mu = \underbrace{m_0}_{\text{Ruhemasse}} v_\mu v^\mu = -m_0 c^2; \quad (7-11)$$

→

$$p_\mu p^\mu = \vec{p}^2 - \frac{1}{c^2} E^2 = -m_0^2 c^2;$$

→

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4.$$

Das ist die berühmte Einstein-Relation und wir sehen ganz deutlich, wie diese allein auf der Unabhängigkeit der Lichtsignale vom Bezugssystem beruht. Diese Ableitung ist viel direkter als die frühere mit absoluten raumzeitlichen Bezügen.

$m_0$  ist die invariante Masse oder auch Ruhemasse und sie ist von der trägen Masse  $m$  folgendermaßen zu unterscheiden:

$$\underbrace{\left(\vec{p}, \frac{1}{c}E\right)}_{p_\mu} = m_0 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_{v_\mu} (\vec{v}, -c); \quad (7-12)$$

$$\text{also } \vec{p} = m_0 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_m \vec{v}.$$

Für kleine Geschwindigkeiten oder Impulse  $v/c \ll 1$  sind die Energie-Impuls-Beziehungen natürlich gleich:

$$\begin{aligned} E &= \underbrace{\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}}_{\text{für relative Bezüge}} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \vec{p}^2 / m_0^2 c^2} \\ &= \underbrace{m_0 c^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m_0}}_{\text{für absolute Bezüge}} + O(\vec{p}^4 / m_0^2 c^2). \end{aligned} \quad (7-13)$$

Abbildung 7-3 zeigt die Verhältnisse für  $m_0=c=1$ .

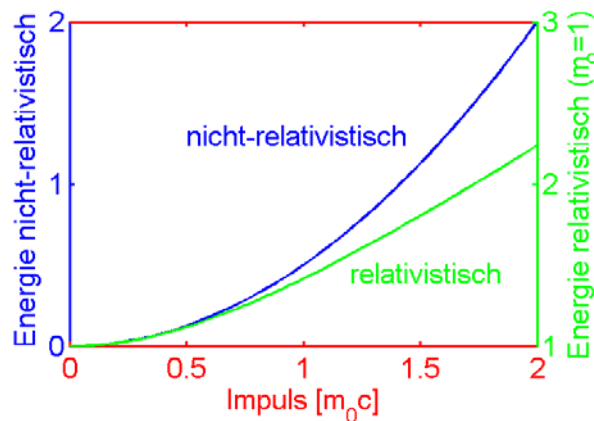


Abbildung 7-3

Vergleich zwischen der Energiefunktion im absoluten oder nichtrelativistischen Raum mit der relativistischen. Bei kleinen Impulsen sind die Funktionen gleich.

## Homogenität raumzeitlicher Bezüge und Kontinuität des Wirkungsstromes:

Homogenität oder Gleichförmigkeit raumzeitlicher Bezüge impliziert die Erhaltung des Viererimpulses. Das ist nun leicht zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu S(x^\nu + \varepsilon^\nu) &\stackrel{!}{=} \partial_\mu S(x^\nu), \\
p_\mu(x^\nu + \varepsilon^\nu) &= p_\mu(x^\nu) + \partial^\nu p_\mu(x) \varepsilon_\nu + O(\varepsilon_\nu \varepsilon^\nu) \stackrel{!}{=} p_\mu(x^\nu), \\
\Rightarrow \underbrace{\partial^\nu p_\mu = \partial^\nu \partial_\mu S}_{\text{Erhaltung des Viererimpulses}} &= 0.
\end{aligned} \tag{7-14}$$

Nun können wir mit der Energiefunktion (7-11) die Kontinuitätsgleichung des Wirkungsfeldes für relative raumzeitliche Bezüge aufstellen:

$$\begin{aligned}
E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 &\rightarrow \partial_\mu S \partial^\mu S = -m_0^2 c^2, \text{ also} \\
\partial_\mu \underbrace{(S \partial^\mu S)}_{\text{Wirkungsstrom}} &= -S \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu S}_{\substack{=0 \\ \text{(Impulserhaltung)}}} - m_0^2 c^2. \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Quellen}}
\end{aligned} \tag{7-15}$$

Damit ergibt sich die relativistische Feldmechanik zu

$$\begin{cases} \underbrace{\partial_\mu (S \partial^\mu S)}_{\text{Kontinuität des Wirkungsstromes}} = \underbrace{-m_0^2 c^2}_{\text{Quellen des Wirkungsstromes}} ; \\ \underbrace{\partial_\mu (\rho \partial^\mu S)}_{\text{Kontinuität des Dichtestromes}} = 0. \end{cases} \tag{7-16}$$

## Die Klein-Gordon-Gleichung

Das Unschärfepotential  $Q$ , das wir im vorausgehenden Kapitel zur Quantenmechanik wegen unscharfer raumzeitlicher Bezüge eingeführt haben, muss natürlich auch bei den relativen raumzeitlichen Bezügen berücksichtigt werden. Das führt uns direkt auf die relativistische Quantenmechanik, nämlich auf die Klein-Gordon-Gleichung.

Die mechanischen, statistischen Feldgleichungen mit Unschärfeanteil der kinetischen Energie lauten in Entsprechung zu den früheren Gleichungen

$$\begin{cases} \underbrace{R^2 \partial_\mu (S \partial^\mu S)}_{\text{Wirkungsstrom}} + \underbrace{\hbar^2 \partial_\mu R \partial^\mu R}_{\text{Unschärfepotential}} = \underbrace{-R^2 m_0^2 c^2}_{\text{Quelle des Wirkungsstromes}} ; \\ \underbrace{\partial_\mu (\rho \partial^\mu S)}_{\text{Wahrscheinlichkeitsstrom}} = 0. \end{cases} \tag{7-17}$$

Mit der Transformation

$$\phi = Re^{iS/\hbar} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = R^2 = \phi^* \phi, \\ S = \frac{\hbar}{2i} \ln \frac{\phi}{\phi^*}, \end{cases} \quad (7-18)$$

ist dies genau die Klein-Gordon-Gleichung der relativistischen Quantenmechanik:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0, \quad (\text{Klein-Gordon-Gleichung}) \quad (7-19)$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\phi = Re^{iS/\hbar}}$$

$$\begin{cases} R^2 \partial_\mu S \partial^\mu S + \hbar^2 \partial_\mu R \partial^\mu R = -R^2 m_0^2 c^2, & (\text{Hamilton-Jacobi-Gleichung}) \\ \partial_\mu (\rho \partial^\mu S) = 0, & (\text{Kontinuitäts-Gleichung}). \end{cases}$$

Zum Beweis betrachten wir nun den Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\begin{aligned} j_\mu &= \underbrace{R^2}_{=\rho} \partial_\mu S = R^2 \frac{\hbar}{i} \frac{\phi^*}{\phi} \left( \frac{\partial_\mu \phi}{\phi^*} - \frac{\phi \partial_\mu \phi^*}{\phi^{*2}} \right) = R^2 \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial_\mu \phi}{\phi} - \frac{\partial_\mu \phi^*}{\phi^*} \right) \\ &= \frac{\hbar}{i} (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) \end{aligned} \quad (7-20)$$

und dessen Kontinuität

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^\mu j_\mu = \frac{\hbar}{i} \partial^\mu (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) = \frac{\hbar}{i} (\phi^* \partial^\mu \partial_\mu \phi - \phi \partial^\mu \partial_\mu \phi^*) \\ &= \frac{\hbar}{i} \left( \phi^* \partial^\mu \partial_\mu \phi - \underbrace{\phi^* a \phi + \phi^* a \phi}_{=0} - \phi \partial^\mu \partial_\mu \phi^* \right) \\ &= \frac{\hbar}{i} (\phi^* \partial^\mu \partial_\mu \phi - \phi^* a \phi) - \frac{\hbar}{i} (\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi^* - \phi^* a \phi) \\ &= \frac{\hbar}{i} \phi^* \left( \underbrace{\partial^\mu \partial_\mu \phi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \phi}_{=a} \right) - \frac{\hbar}{i} \phi \left( \underbrace{\partial^\mu \partial_\mu \phi^* - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \phi^*}_{=a} \right). \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(\text{Klein-Gordon-Gleichung})} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(\text{Klein-Gordon-Gleichung})} \end{aligned} \quad (7-21)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung gewährleistet also die Kontinuität des relativistischen Wahrscheinlichkeitsstromes (7-20).

Zur Vervollständigung des Beweises identifizieren wir nun noch den Realteil der Klein-Gordon-Gleichung mit der Hamilton-Jacobi-Gleichung in (7-19):

$$\begin{aligned}
 0 &= \underbrace{\partial^\mu \partial_\mu \phi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \phi}_{\text{Klein-Gordon-Gleichung}} \\
 &= \partial^\mu \partial_\mu R e^{iS/\hbar} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} R e^{iS/\hbar} = \partial^\mu \left( \partial_\mu R + i R \partial_\mu S / \hbar \right) e^{iS/\hbar} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} R e^{iS/\hbar} \\
 &= \left( \partial^\mu \partial_\mu R + i \partial^\mu R \partial_\mu S / \hbar + i R \partial^\mu \partial_\mu S / \hbar + i \partial^\mu S / \hbar \left( \partial_\mu R + i R \partial_\mu S / \hbar \right) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} R \right) e^{iS/\hbar} \\
 &= \left( \partial^\mu \partial_\mu R - \frac{R}{\hbar^2} \partial^\mu S \partial_\mu S - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} R \right) e^{iS/\hbar} + i \underbrace{\left( \dots \right)}_{=0} e^{iS/\hbar} \\
 &\hspace{15em} \text{Konitnuität des Wahr-} \\
 &\hspace{15em} \text{scheinlichkeitsstromes} \\
 &= -\frac{1}{\hbar^2 R} \underbrace{\left( R^2 \underbrace{\partial^\mu S \partial_\mu S}_{\text{Difergenz des Wirkungsstromes}} - \hbar^2 \underbrace{R \partial^\mu \partial_\mu R}_{\text{Unschärfepotential}} + \underbrace{m_0^2 c^2 R^2}_{\text{Wirkungsquelle}} \right)}_{\substack{=0 \\ \text{relativistische, unscharfe} \\ \text{Hamilton-Jacobi-Gleichung}}} e^{iS/\hbar}.
 \end{aligned}
 \tag{7-22}$$

Also ist die Klein-Gordon-Gleichung tatsächlich, wie in (7-19) behauptet, mathematisch äquivalent zur unscharfen Hamilton-Jacobi-Gleichung und zur Kontinuitätsgleichung des Wahrscheinlichkeitsfeldes bei relativen raumzeitlichen Bezügen.

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass der Wahrscheinlichkeitsstrom (7-20) die Quelle elektromagnetischer Wirkungen ist.



## 8. Elektrodynamik

Unser bewusstes Welterleben beruht auf meist unbewussten psychischen Ordnungsstrukturen. Diese sind gleichermaßen Grundlage für alles Körperliche oder Materielle und für unsere Gedanken und Gefühle. Der Tiefenpsychologe C.G. Jung bezeichnete diese kollektiven, unbewussten Anordner aller psychischen und körperlichen Bewusstseinsinhalte als Archetypen. Erkennbar ist nur das Geordnete, das immer wieder auf gleiche Art in Erscheinung Tretende, das schon Bekannte. Unser Bewusstsein entwickelt sich mit diesen Archetypen. Neues wird durch Gewahrsein in unser Bewusstsein aufgenommen.

Archetypen sind kontextunabhängig. Sie wirken in jedem einzelnen, speziellen Fall auf dieselbe Art und Weise. Das geht so weit, dass viele Wirkungen quantifizierbar, also berechenbar sind. Wir haben gesehen, dass genau dies die Quelle der physikalischen Grundgesetze darstellt. Klassische Mechanik, Elastizitätstheorie und Hydrodynamik ergaben sich auf dieser Grundlage ganz selbstverständlich.

Ein kritischer Umgang mit den Koordinatensystemen zur Beschreibung raumzeitlicher Bezüge führte zwingend auf die Grundgleichungen der Quantenmechanik. In den Koordinatensystemen sind die raumzeitlichen Bezüge auf den unendlich kleinen Punkt genau, in der Natur nicht. Die Besonderheiten der Quantenmechanik beruhen genau auf dieser Unschärfe wirklicher raumzeitlicher Bezüge.

In Koordinatensystemen sind raumzeitliche Bezüge absolut, sie beziehen sich auf den Ursprung des Systems. Auch dieser Ursprung ist unnatürlich, er existiert in der wirklichen Welt nicht. Wir haben gesehen, dass deswegen die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen unabhängig vom Bezugssystem oder vom Beobachter immer den gleichen Wert  $c$  haben muss. Wir sollten nun noch klären, was Lichtsignale eigentlich sind und wie sie sich aus dem bisher entwickelten Formalismus ergeben.

### **Die Natur der Lichtsignale und anderer elektrodynamischer Phänomene**

Wir haben gesagt: In Raum und Zeit werden Wirkungen als messbare Kräfte erkennbar. Die Kontextunabhängigkeit dieser Kraftwirkungen hat zum einen die Beziehung zwischen Impuls und Wirkungsgeschwindigkeit und zum anderen die Energiefunktion zur Folge. Das erklärt die Trägheit der Materie und offenbart uns so die Natur der Masse. Das Wirkungsfeld breitet sich mit einer Geschwindigkeit aus, die vom Impuls und von der Masse abhängt.

Kräfte hängen mit der zweifachen Ableitung des Wirkungsfelds zusammen, einer nach dem Ort und einer nach der Zeit. Das bedeutet, dass durch die direkt beobachtbaren, kontextunabhängigen Kräfte das Wirkungsfeld nicht eindeutig festgelegt wird. Es können Terme zum Wirkungsfeld addiert werden, die bei der Berechnung der Kraftfelder durch Ableiten verschwinden. Man sagt: das Wirkungsfeld hat Eichfreiheitsgrade. Eichfreiheitsgrade sind also Anteile des Wirkungsfeldes, die bei der Abbildung der Wirkung auf einzelne Objekte nicht direkt in Erscheinung treten.

Diese Eichfreiheitsgrade erweisen sich als Ursprung der Elektrodynamik, also auch der Lichtphänomene. Sie beschreiben die Beziehungen der einzelnen objektiven Bewusstseinsinhalte untereinander, also ihre Wechselwirkung. Diese ist selbst nicht erlebbar, sondern nur durch ihre Wirkung auf erkennbare Körper.

## Die Eichfreiheitsgrade des Wirkungsfeldes

Das Wirkungsfeld ändert sich mit Ort und Zeit. Ein Teil dieser Änderung äußert sich im Materiellen als Impuls und Energie oder als Kraft. Ein anderer Teil, den wir nun betrachten wollen, äußert sich nicht direkt im Materiellen. Wir untersuchen nun also die Eigenschaften dieses Anteils  $S^{(Eich)}$  des Wirkungsfeldes  $S$ :

$$S \rightarrow S^{(Mat)} + S^{(Eich)}; \quad (8-1)$$

$$dS \rightarrow \underbrace{p_\mu}_{=\partial_\mu S^{(Mat)}} dx^\mu + \underbrace{eA_\mu}_{=\partial_\mu S^{(Eich)}} dx^\mu.$$

Es ist üblich, wie in (8-1) den Vierergradienten der Eichkomponente des Wirkungsfeldes mit  $A$  und die so genannte 0-te Komponente mit  $\varphi$  zu bezeichnen:

$$\partial_\mu S^{(Eich)} = eA_\mu = e(\varphi, \vec{A}). \quad (8-2)$$

Die so genannte Ladung  $e$  wird vom Feld abgespalten. Das macht Sinn, weil die elementaren Prozesse immer quantisiert sind und die entsprechenden Ströme immer proportional zu einem Vielfachen von  $e$  sind. Wir werden später  $e$  als elektrische Elementarladung identifizieren.

Unter Eichinvarianz des Wirkungsfeldes  $S$  versteht man nun die Tatsache, dass die materiellen und die Eichanteile des Wirkungsfeldes gleichzeitig lokalen Eichtransformationen unterzogen werden können, ohne dass sich an den beobachtbaren Phänomenen etwas ändert:

$$\left. \begin{aligned} S^{(Mat)}(\vec{x}, t) &\rightarrow S'^{(Mat)}(\vec{x}, t) = S^{(Mat)}(\vec{x}, t) + \chi(\vec{x}, t), \\ S^{(Eich)}(\vec{x}, t) &\rightarrow S'^{(Eich)}(\vec{x}, t) = S^{(Eich)}(\vec{x}, t) - \chi(\vec{x}, t); \end{aligned} \right\} \Rightarrow S' = S. \quad (8-3)$$

Von der Möglichkeit zur Umeichung der Wirkungsanteile wird in der Elektrodynamik intensiv gebrauch gemacht. Eichinvarianz ist auch ein Grundpfeiler des so genannten Standardmodells der Physik, wo auch starke und schwache Wechselwirkungen mit Eichfeldern (Eichbosonen Z, W, ...) beschrieben werden. Man spricht von einer Abelschen Eichtheorie und von Yang-Mills Eichfeldern.

Mit dem Eichanteil des Wirkungsfeldes führt die Kontinuität des Wirkungsstromes, den wir im letzten Kapitel abgeleitet haben, auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_\mu S \partial^\mu S &= -\frac{1}{c^2} (E + e\varphi)^2 + (\vec{p} + e\vec{A})^2 = -m_0^2 c^2 \\ &= \underbrace{-\frac{1}{c^2} E^2 + \vec{p}^2}_{\text{Mechanik}} - \underbrace{2\frac{1}{c^2} eE\varphi + 2e\vec{p} \cdot \vec{A}}_{\text{Elektrodynamische Wechselwirkung}} - \underbrace{e^2 \varphi^2 + e^2 \vec{A}^2}_{\text{Elektrodynamik}} = -m_0^2 c^2. \end{aligned} \quad (8-4)$$

Das ist bereits die allgemein bekannte Energiefunktion elektrodynamisch-mechanischer Systeme. Die restlichen elektromagnetischen Gesetze, also die Maxwell-Gleichungen, ergeben sich aus der Kontinuität der elektromagnetischen Felder. Wir betrachten also die Kontinuitätsgleichungen

$$\underbrace{\partial_\nu c \overbrace{\partial^\nu A_\mu}^{\substack{\text{elektro-} \\ \text{magn.} \\ \text{Feldtensor}}}}_{\text{Kontinuitätsgleichungen für den elektromagnetischen Feldtensor}} = \underbrace{\overbrace{j_\mu}^{\substack{\text{Quelle der} \\ \text{elektromagnetische} \\ \text{Felder}}}}_{\substack{\text{quantenmechanische} \\ \text{Wahrscheinlichkeits-} \\ \text{dichte}}} = \underbrace{\overbrace{\rho}_{\substack{\text{mechanischer} \\ \text{Viererimpuls}}}}_{\substack{\text{mechanischer} \\ \text{Viererimpuls}}}. \quad (8-5)$$

Hier geht ganz wesentlich ein, dass sich Lichtwirkungen, oder allgemeiner, elektromagnetische Wirkungen mit der kontextunabhängigen Geschwindigkeit  $c$  ausbreiten. Das bestimmt die Form der Gleichung.

Um vertrauen zu (8-5) zu bekommen, können wir zunächst einmal das Coulomb-Potential extrahieren. Wir betrachten dazu den Spezialfall des stationären elektrischen Potentials. (8-5) wird zu

$$\underbrace{\Delta \varphi}_{\substack{-\partial_\nu \partial^\nu A_0 \\ \text{(stationär)}}} = -\underbrace{\rho}_{p_0} \underbrace{\frac{1}{c}}_{\substack{\text{c} \\ p_0}} E. \quad (8-6)$$

Für eine (hypothetische) Punktladung folgt das berühmte Coulomb-Potential:

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\underbrace{\delta(\vec{r}-\vec{r}')}_{\text{Punktladung}} \frac{1}{c} E \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi c/E} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (8-7)$$

## Die Kontinuität der Eichfreiheitsgrade und die Maxwell-Gleichungen

Um nun die mathematische Äquivalenz der Kontinuität (8-5) zu den bekannten Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik zu zeigen, führen wir die elektromagnetischen Felder<sup>2</sup> ein:

$$\text{Elektrisches Feld; } \vec{E} \equiv -\vec{\nabla} \cdot \varphi - c^{-1} \partial_t \vec{A}; \quad (8-8)$$

$$\text{Magnetisches Feld: } \vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

### Lorentz-Bedingung

Beide Anteile des Wirkungsfeldes, der mechanische und der elektrodynamische, müssen sich kontinuierlich mit der Zeit entwickeln. Das ist die Grundlage unseres physikalischen Rahmens. Damit das der Fall ist, muss eine Beziehung zwischen den elektrischen und magnetischen Komponenten der Eichfelder bestehen. Um dies zu sehen, leiten wir die Kontinuitätsgleichungen (8-5) ab und berücksichtigen die Kontinuität des mechanischen Wirkungsanteils:

$$\partial_\mu \partial^\nu \partial_\nu A^\mu = \underbrace{\partial_\mu \overbrace{j^\mu}^{\rho p^\mu}}_{\substack{\text{Kontinuitätsgleichung} \\ \text{des wahrscheinlichen} \\ \text{Wirkungsstromes}}} = 0 \Rightarrow \partial_\mu A^\mu = \underbrace{-c^{-1} \partial_t \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{\text{Lorentz-Bedingung}} = 0. \quad (8-9)$$

Mögliche Konstanten werden durch Randbedingungen  $A^\mu \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  unterdrückt. Die Lorentz-Bedingung wird für die Ableitung der Maxwell-Gleichung gebraucht.

### Das Coulomb-Gesetz und das Ampere-Gesetz

Wir können nun die Maxwell-Gleichungen ableiten, indem wir die Kontinuitätsgleichungen (8-5) für die elektromagnetischen Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  umschreiben:

<sup>2</sup> Elektrisches Feld und Energie werden mit demselben Buchstaben  $E$  bezeichnet! Zur Unterscheidung dient der Vektorpfeil über dem Symbol für das elektrische Feld.

$$\begin{cases}
 -c^{-2}\partial_t^2\varphi + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} A_0}_{-\vec{E} \cdot c^{-1}\partial_t \vec{A}} = \rho p_0, \\
 -c^{-2}\partial_t^2 \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}}_{=\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}} = \rho \vec{p}; \\
 \begin{cases}
 -c^{-2}\partial_t^2\varphi - \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - c^{-1}\partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \rho \frac{1}{c} E, \\
 -c^{-2}\partial_t^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{B}} = \rho \vec{p};
 \end{cases} \\
 \begin{cases}
 -c^{-1}\partial_t \left( \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + c^{-1}\partial_t \varphi}_{=0 \text{ (Lorentz-Bedingung)}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \frac{1}{c} E, \\
 \underbrace{-c^{-2}\partial_t^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{=0} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = \rho \vec{p};
 \end{cases} \\
 \text{(Lorentz-Eichung, siehe unten)} \\
 \begin{cases}
 \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{\text{Coulomb-Gesetz}} = -\rho, \\
 \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\text{Ampere-Gesetz}} = -\rho \vec{p}.
 \end{cases}
 \end{cases} \quad (8-10)$$

Der zweite Teil des Ampere-Gesetzes folgt aus der Definition des magnetischen Feldes im Zusammenhang mit der Divergenzfreiheit von Rotationsfeldern:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{\text{Ampere-Gesetz}} = 0. \quad (8-11)$$

### Induktionsgesetz

Als letzte der Maxwell-Gleichungen folgt das Induktionsgesetz wieder aus dem Zusammenhang der Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  mit den Potentialen  $\varphi$  und  $\vec{A}$

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \underbrace{\vec{E}}_{-\vec{\nabla} \varphi - c^{-1}\partial_t \vec{A}} &= \left( -\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi}_{=0} - c^{-1}\partial_t \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{=\vec{B}} \right); \\
 \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{\text{Induktionsgesetz}} &= -c^{-1}\partial_t \vec{B}.
 \end{aligned} \quad (8-12)$$

### Die Lorentz-Eichung

In der Ableitung des Coulomb-Gesetzes in (8-10) haben wir die Bedingung

$$-c^{-2}\partial_t^2\vec{A} + \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (8-13)$$

verwendet. Dies müssen wir noch begründen.

Da, wie ja auch das gesamte Wirkungsfeld, die elektromagnetischen Potentiale nicht direkt beobachtbar sind, können sie nicht eindeutig festgelegt sein. Sie können umgeichtet werden, ohne dass sich an den Bewegungsgleichungen etwas ändert:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S' = S + \chi; \\ \partial_\mu S &\rightarrow \partial_\mu S' = \partial_\mu S + \partial_\mu \chi \\ &= \vec{p}_\mu + \underbrace{A_\mu + \partial_\mu \chi}_{=A'_\mu}. \end{aligned} \quad (8-14)$$

Dies nutzen wir aus:

$$\begin{aligned} -c^{-2}\partial_t^2\vec{A} + \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &\rightarrow -c^{-2}\partial_t^2\vec{A}' + \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' \\ &= -c^{-2}\partial_t^2(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) + \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) \\ &= -c^{-2}\partial_t^2\vec{A} + \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - c^{-2}\partial_t^2\vec{\nabla}\chi + \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\chi. \end{aligned} \quad (8-15)$$

Mathematisch ist nun klar:

$$\begin{aligned} \text{für jedes } \vec{A}' = (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) \text{ existiert } \chi, \text{ so dass } -c^{-2}\partial_t^2\vec{A}' + \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0 \text{ ist} \\ \text{(Lorentz-Eichung).} \end{aligned} \quad (8-16)$$

Damit sind alle Grundlagen der Elektrodynamik mit der Kontinuität physikalischer Phänomene begründet.

## Elektrisches Dipolfeld in einem leitenden und einem isolierenden Gehäuse

Die Berechnung des statischen Feldes elektrischer Ladungsverteilungen ist das einfachste Problem, das wir in der Elektrodynamik angehen können. Die Gleichung für das elektrische Potential ist nach (8-10):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} c^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ c^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = j_0. \quad (8-17)$$

Diese setzen wir nun mit FEMLAB für ein stationäres Problem um. Der Quellterm  $j_0$  soll dabei aus einer positiven und einer negativen Punktladung bestehen.

Gebiet:

Ellipse + Punkt + Punkt ;  $c = 1$ ;  
 Achsen: (1.4,1)    Position 1: (-0.5,0)    Position 2: (0.5,0)

Variablen:

Gleichung:

$$\underbrace{0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} -c^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -c^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\Gamma} = \underbrace{0}_{\tilde{F}};$$

Punktförmige Ladungen

an den Punkten:

$$\int_{\partial^2 \Omega_1} \phi_{Test}, \int_{\partial^2 \Omega_2} -\phi_{Test};$$

Isolierender Rand:

$$\begin{cases} \underbrace{0}_{\tilde{R}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma = c^2 \vec{\nabla}^{(n)} \phi = \underbrace{0}_{\tilde{G}}; \end{cases}$$

Leitender Rand:

$$\begin{cases} \underbrace{\phi}_{\tilde{R}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma = c^2 \vec{\nabla} \phi \\ \quad = \underbrace{0}_{\tilde{G}} + \eta^{(Lag)}. \end{cases}$$

FEMLAB 8-1

Abbildung 8-1 zeigt, wie sich die Feldlinien, also die elektrischen Äquipotentiallinien, verhalten. In einem leitenden Gehäuse schmiegen sie sich an dieses an und in einem isolierenden Gehäuse laufen sie senkrecht auf dieses zu.

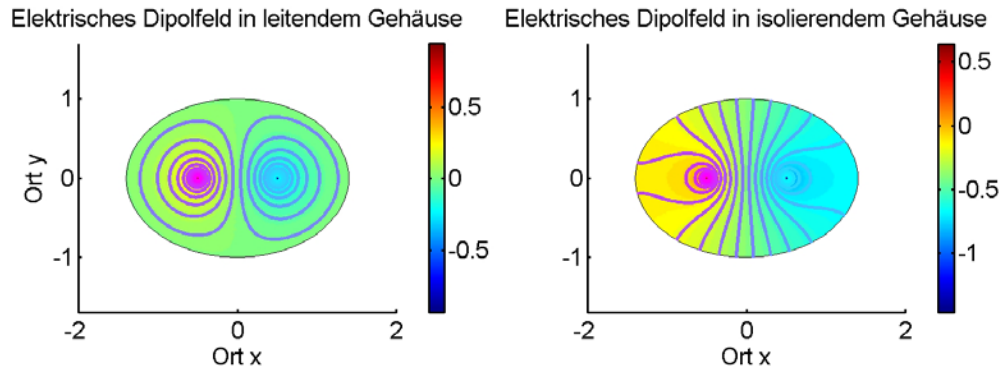


Abbildung 8-1

Elektrisches Dipolfeld in einem leitenden (links) und in einem isolierenden Gehäuse (rechts). Die Farbpalette bezeichnet die Werte des elektrischen Potentials  $\phi$  und Linien sind die Äquipotentiallinien. Wie bei Höhenlinien auf Wanderkarten ist der Feldgradient umgekehrt proportional zum Linienabstand. Links ist der elektrische Dipol in einem leitenden Gehäuse untergebracht, rechts in einem Isolatorgehäuse. Dem entsprechend verlaufen die Feldlinien entweder parallel oder senkrecht zum Rand.

## Atomare Emission eines elektrischen Wirkungsquants

Die Beschreibung der atomaren Emission eines elektrischen Wirkungsquants ist komplexer und interessanter. Wir können der Frage nachgehen, warum elektrische Wirkungen quantisiert als Photonen in Erscheinung treten und sich fast wie Teilchen verhalten.

Wir simulieren eine angeregte atomare Wirkung, also ein Atom, in einem elektrischen Hohlraumresonator. Die atomare Wirkung gibt ihre Energie an ein elektrisches Feld ab und geht dabei in einen energetisch tieferen Zustand über. Dabei findet eine kurzzeitige Anregung des elektrischen Feldes statt. Die Frequenz des elektrischen Feldes entspricht genau der Energiedifferenz der atomaren Zustände und auch die Menge an Energie des elektrischen Feldes entspricht dieser Energiedifferenz. Nach der Simulation werden wir uns eingehend mit der Interpretation des Prozesses, der ja auf der statistischen Grundlage der Messwahrscheinlichkeit von Wirkungen beruht, befassen.

Nun kommen wir zur Simulation. Die Grundgleichungen für das Atom und für das elektrische Potential sind die

Schrödinger-Gleichung: 
$$-\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + e\phi \psi, \quad (8-18)$$

elektrische  
Potentialgleichung: 
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi = j_e$$

$$= -ie \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right).$$

### Behandlung des atomaren Systems

Die zeitliche Integration der Schrödinger-Gleichung in der Ortsdarstellung ist für längere Zeiten immer etwas problematisch. Die sehr schnellen Phasenänderungen der Quantenwellenfunktion  $\psi$  konkurrieren mit den wesentlich langsameren Schwankungen des Dichtefeldes und es gibt keine glättende Diffusion. Zur Stabilisierung der Simulation behandeln wir diese schnellen Phasenänderungen analytisch:

Unsere atomare Wirkung soll 2 Energieniveaus haben. Die Wirkungsquanten sind in einem Kreis mit einem Radius von 1 eingeschlossen. Der Kreis befindet sich in einem Hohlraumresonator. Die Geometrie und die Wahrscheinlichkeits- und Wirkungsfelder sind in Abbildung 8-2 dargestellt. Die Basisfunktionen und ihre Eigenschaften sind in (8-19) zusammengestellt.

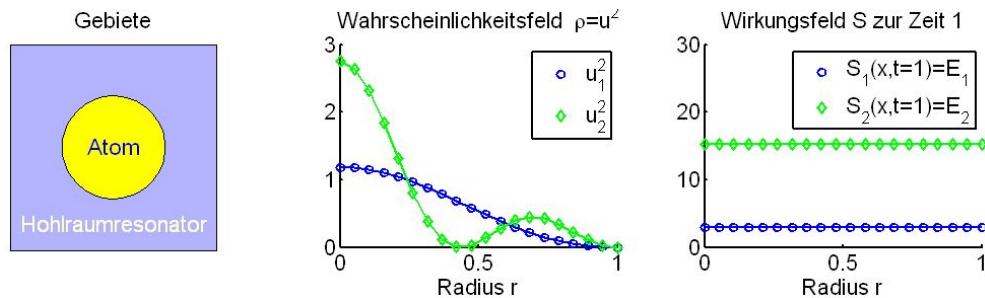


Abbildung 8-2

Atomare Wirkungen sind in einem Kreis vom Radius 1 eingeschlossen, sie befinden sich in einem Hohlraumresonator (Links). Die Wahrscheinlichkeitsfelder für die beiden Zustände niederster Energie fallen zum Rand hin ab und haben eine und zwei Nullstellen (Mitte). Die Wirkungsfelder sind in diesen beiden Zuständen konstant (Rechts).

<p>Basisfunktionen:</p> $u_n = a_n \underbrace{J_o(k_n r)}_{\text{Bessel-Funktion der 1. Art}}, \quad \Delta u_n = -k_n^2 u_n;$	<p>Parameter: (8-19)</p> $\begin{cases} k_1 = 2.405, & E_1 = \frac{1}{2} k_1^2 = 2.892, \\ k_2 = 5.520, & E_2 = \frac{1}{2} k_2^2 = 15.2352; \end{cases}$
<p>Normierung:</p> $a_n = \left( 2\pi \int_0^1 r J_o(k_n r)^2 dr \right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}  J_1(k_n) };$	<p>Orthonormalität:</p> $2\pi \int_0^1 r u_m u_n dr = \delta_{nm};$
<p>Ansatz der Quantenwellenfunktion:</p> $\psi = c_1 u_1 e^{-iE_1 t} + c_2 u_2 e^{-iE_2 t}.$	

Setzen wir den Ansatz für die Quantenwellenfunktion von (8-19) in die Schrödinger-Gleichung (8-18) ein, dann erhalten wir die Bewegungsgleichungen der Freiheitsgrade  $c_i$ :

Schrödinger-Gleichung: (8-20)

$$\begin{cases} i\partial_t c_1 = U_{11} c_1 + U_{12} c_2 e^{-i(E_2 - E_1)t}, \\ i\partial_t c_2 = U_{12} c_1 e^{-i(E_1 - E_2)t} + U_{22} c_2, \end{cases} \quad \left( U_{mn} = 2\pi \int_0^1 r u_m u_n \varphi dr \right).$$

Der statistische Wirkungsstrom, der durch die Quantenwellenfunktion beschrieben wird, ist Quelle des elektrischen Potentials im Hohlraum:

$$\begin{aligned} j_e &= \underbrace{\rho p}_{\text{statistischer Wirkungsstrom}} = -ie(\psi^* \partial_t \psi - \partial_t \psi^* \psi), & (8-21) \\ \psi &= c_1 u_1 e^{-iE_1 t} + c_2 u_2 e^{-iE_2 t}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -i \left\{ \underbrace{\left( (E_1 + U_{11}) u_1 + U_{12} u_2 \right)}_{\chi_1} c_1 e^{-iE_1 t} + \underbrace{\left( U_{12} u_1 (U_{22} + E_2) u_2 \right)}_{\chi_2} c_2 e^{-iE_2 t} \right\}, \\ \psi \partial_t \psi^* &= i \left( \underbrace{|c_1|^2 u_1 \chi_1 + |c_2|^2 u_2 \chi_2}_{\text{nicht effektiv!}} + c_1^* c_2 u_1 \chi_2 e^{-i(E_1 - E_2)t} + c_1^* c_2 u_2 \chi_1 e^{-i(E_2 - E_1)t} \right), \\ j_e^{(eff)} &= -e(u_1 \chi_2 + u_2 \chi_1) 2 \operatorname{Re}(c_1^* c_2 e^{-i\Delta E t}). \end{aligned}$$

Sehr interessant sind die Schwankungen des mittleren Radius der atomaren Wirkung:

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= 2\pi \int_0^1 r^2 \psi^* \psi r dr = 2\pi \int_0^1 r^3 \left( c_1^* u_1 e^{iE_1 t} + c_2^* u_2 e^{iE_2 t} \right) \left( c_1 u_1 e^{-iE_1 t} + c_2 u_2 e^{-iE_2 t} \right) dr \\ &= |c_1|^2 I_{11}^{(3)} + |c_2|^2 I_{22}^{(3)} + 2 \operatorname{Re} \left( c_1^* c_2 e^{-i\Delta E t} \right) I_{12}^{(3)},\end{aligned}\quad (8-22)$$

$$\text{mit } \Delta E = E_2 - E_1 \quad \text{und} \quad I_{kl}^{(3)} = 2\pi \int_0^1 r^3 u_k u_l dr.$$

Sobald wir die Zeitentwicklung der Freiheitsgrade  $c_i$  kennen, können wir den mittleren Radius  $\langle r^2 \rangle$  berechnen.

Die Bewegungsgleichungen der Freiheitsgrade  $c_i$  sind gewöhnliche Differentialgleichungen. Für die Lösung mit FEMLAB machen wir daraus eindimensionale partielle Differentialgleichungen auf einer Linie, indem wir die Freiheitsgrade räumlich konstant halten:

Gebiet: <u>Linie</u> ; $z \in [-.5, .5]$	Lösungsmethode: <i>zeitabhängig</i> ;
Variablen: $\begin{cases} k_1 = 2.405, \\ k_2 = 5.520, \\ \alpha = 1.57; \end{cases}$	Kopplungsvariablen: $\begin{cases} c_{1-} = c_1, \\ c_{2-} = c_2; \end{cases}$
Ränder: $\begin{cases} \underset{R^{(x)}}{0} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma = \pm \frac{\partial c_1}{\partial z} = \pm \frac{\partial c_2}{\partial z} = \underset{G}{0}; \end{cases}$	Startwerte ( $t = 0$ ): $\begin{cases} c_1 = c_1^{(0)}, \\ c_{2-} = c_1^{(0)}; \end{cases}$
Gleichungen: $\begin{cases} \underset{a^{(1)}}{i} \frac{\partial c_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial c_1}{\partial z} \right)}_{\substack{\Gamma^{(1)} \sim 0 \\ \text{(künstliche} \\ \text{Diffusion)}}} = \underbrace{U_{11} c_1 + U_{12} c_2 \exp(-i\Delta E t)}_{F^{(1)}}, \\ \underset{a^{(2)}}{i} \frac{\partial c_2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial c_2}{\partial z} \right)}_{\substack{\Gamma^{(2)} \sim 0 \\ \text{(künstliche} \\ \text{Diffusion)}}} = \underbrace{U_{12} c_1 \exp(i\Delta E t) + U_{22} c_2}_{F^{(2)}}; \end{cases}$	Ausdrücke: $\begin{cases} c_1^{(0)} = \cos(\alpha), \\ c_2^{(0)} = i \sin(\alpha), \\ E_1 = \frac{1}{2} k_1^2, \\ E_2 = \frac{1}{2} k_2^2. \end{cases}$

### Behandlung der elektrischen Freiheitsgrade

Der Zeitaufwand für die Simulation der Emission des Photons, also der elektrischen Wirkung, ist schon etwas größer. Es ist sinnvoll, die Geometrie des Hohlraums und die Parameter der elektrischen Potentialgleichung sorgfältig zu bestimmen. Die Schwingungsmöglichkeit des elektrischen Potentials sollte räumlich und zeitlich gut zur atomaren Quelle passen und der Hohlraum sollte auf Resonanz abgestimmt sein. Wir bestimmen also die Größe des Gebietes so, dass die räumlichen Schwingungen von Atom und  $\varphi$ -Feld gut zusammenpassen. Und wir bestimmen die Lichtgeschwindigkeit so, dass die Eigenfrequenz des  $\varphi$ -Feldes gerade der Energiedifferenz des Atoms, die ja in (8-21) als Frequenz der Quelle auftritt, übereinstimmt.

Dazu betrachten wir zunächst die freie elektrische Potentialgleichung. Wir können sie analytisch lösen und die Resonanzbedingung aufstellen:

$$\begin{aligned}
 \text{freie elektrische} & \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, & x, y \in [-R, R]; & \quad (8-23) \\
 \text{Potentialgleichung:} & & & \\
 \text{Lösung:} & \quad \varphi = \cos(Kx) \cos(Ky) \sin(\omega t) \Rightarrow \omega = \sqrt{2}cK; \\
 \text{Resonanzbedingung:} & \quad \omega = \underbrace{\frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1)}_{\text{Frequenz der Quelle } j_e} = \underbrace{\sqrt{2}cK}_{\text{Frequenz des E-Potentials}} \Rightarrow c = \frac{E_2 - E_1}{\sqrt{2}K\hbar}.
 \end{aligned}$$

Die halbe Hohlraumlänge  $R$  und die Wellenzahl  $K$  des Potentials  $\varphi$  wählen wir so:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{5}{3}, & (8-24) \\
 K &= \frac{3\pi}{2} = \frac{15\pi}{6R}.
 \end{aligned}$$

Abbildung 8-3 zeigt den räumlichen Verlauf der analytischen Lösung für  $\varphi$  in einer Richtung und Abbildung 8-4 zeigt eine Auswahl von drei Schwingungsmoden, die mit FEMLAB berechnet wurden. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der rechten Mode stimmt genau mit der Winkelgeschwindigkeit der atomaren Quelle überein. Diese Mode ist also in Resonanz mit der atomaren Quelle und wird durch das Atom angeregt werden.

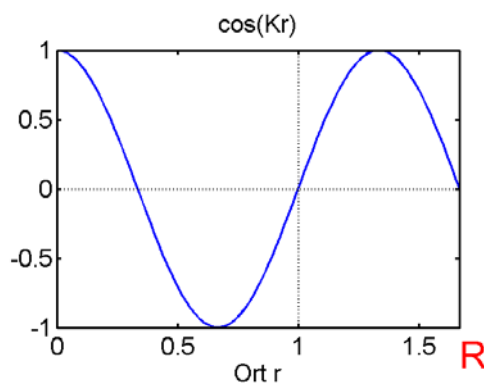


Abbildung 8-3

Räumlicher Anteil der analytischen Lösung der elektrischen Potentialgleichung für die Parameter von (8-24). Der Verlauf passt gut zu den Wahrscheinlichkeitsfeldern der atomaren Wirkung in Abbildung 8-3. Diese sind auf den Bereich  $r < 1$  eingeschränkt.

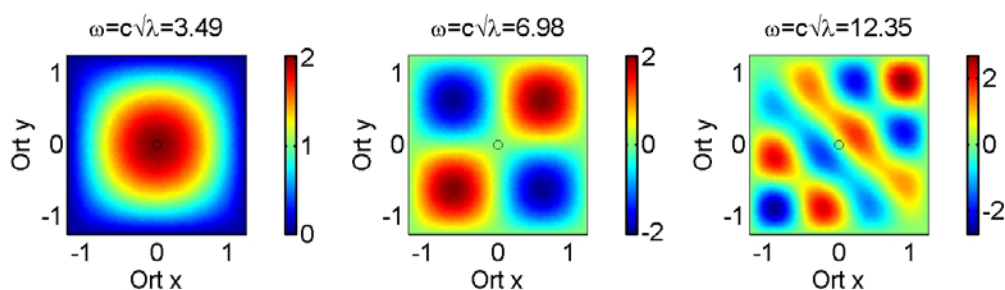


Abbildung 8-4

Auswahl von Schwingungsmöglichkeiten des elektrischen Potentials im Hohlraumresonator. Rechts ist ein Schwingungszustand gezeigt, der in Resonanz mit der atomaren Quelle  $j_e$  ist. Die Quelle wird diesen Zustand am stärksten anregen.

Für die Simulation des Vorganges mit FEMLAB machen wir die Eingaben:

Gebiet: <u>Rechteck</u> ; $x, y \in [-R, R]$	Lösungsmethode: <u>zeitabhängig</u> ;	FEMLAB 8-3
Variablen: $\begin{cases} k_1 = 2.405, \\ k_2 = 5.520, \\ e^2 = 10, \\ R^{(\text{Reibung})} = 1; \end{cases}$	Kopplungsvariablen: $\begin{cases} U_{11} = 2\pi \int u_1 u_1 \phi dr, \\ U_{12} = 2\pi \int u_1 u_2 \phi dr, \\ U_2 = 2\pi \int u_2 u_2 \phi dr. \end{cases}$	

Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 r &= \text{sqrt}(x^2 + y^2), \\
 E_1 &= \tfrac{1}{2} k_1^2, & u_1 &= a_1 \text{besselj}(0, k_1 r) (r < 1), \\
 E_2 &= \tfrac{1}{2} k_2^2, & u_2 &= a_2 \text{besselj}(0, k_2 r) (r < 1), \\
 \Delta E &= E_2 - E_1, & \chi_1 &= (E_1 + U_{11}) u_1 + U_{12} u_2 \exp(-i E_1 t), \\
 K &= 15\pi / (6R), & \chi_2 &= U_{12} u_1 + (E_2 + U_{22}) u_2 \exp(-i E_2 t), \\
 c_{\text{Licht}}^2 &= K^2 / \Delta E^2, & j_e &= -e (u_1 \chi_2 + u_2 \chi_1) 2 \operatorname{Re}(c_1^* c_2 \exp(-i \Delta E)).
 \end{aligned}$$


---

Gleichung:  $\frac{1}{a} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -c_{\text{Licht}}^2 \varphi_x \\ -c_{\text{Licht}}^2 \varphi_y \end{pmatrix}}_{\Gamma} = \underbrace{j_e - R^{(\text{Reibung})}}_F \varphi_t;$

---

Ränder:  $\begin{cases} \varphi = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} = \underset{\check{G}}{0} + \eta^{(\text{Lag})}. \end{cases}$

---

Das Ergebnis der Simulation ist in Abbildung 8-5 dargestellt.

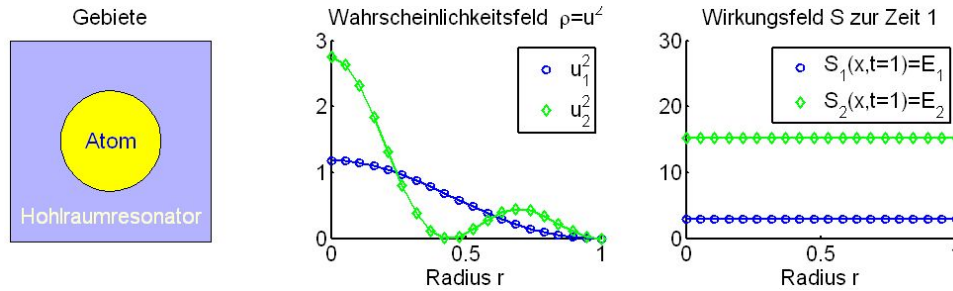


Abbildung 8-5

#### Simulation der Emission eines Photons:

Beim Start ( $t=0$ ) befindet sich die atomare Wirkung in ihrem angeregten Zustand, die Wahrscheinlichkeit  $|c_2|^2$  dafür ist 1, die für den Grundzustand  $|c_1|^2$  ist 0 (links unten).

Dieser Zustand ist labil. Wegen Störungen besteht eine kleine Wahrscheinlichkeit für Abgabe von Energie an die elektrischen Freiheitsgrade. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit für eine Mischung aus angeregtem Zustand und Grundzustand mit der Zeit größer. Die Wahrscheinlichkeitsquelle beginnt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \Delta E / \hbar$  zu oszillieren (links oben). Die Möglichkeit für die Emission des elektrischen Wirkungsquants wächst (rechts oben).

Nach einer gewissen Zeit (etwa 7 Zeiteinheiten) hat die atomare Wirkung mit aller Wahrscheinlichkeit die Energie  $\Delta E$  abgegeben. Diese ist irgendwo in Erscheinung getreten, eventuell als fast punktförmige Erwärmung oder Schwärzung einer Stelle der Resonatorwand.

Allerdings besteht auch eine kleine Wahrscheinlichkeit von etwa 0.05 dafür, dass die atomare Wirkung nach etwa 8 Zeiteinheiten die Energie selber wieder absorbiert.

Sehr deutlich wird der gesamte Wahrscheinlichkeitsablauf am mittleren Radius der atomaren Wirkung (rechts unten). Der mittlere Radius des angeregten atomaren Wirkungsquantums ist etwa 0.3. Bei einer Wahrscheinlichkeit für einen gemischten Zustand oszilliert der mittlere Radius mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \Delta E / \hbar$  und nach der Photon-Emission verbleibt sie im Grundzustand mit  $\langle r^2 \rangle \sim 2.2$ . Auch das mehrfache Nachschwingen wird deutlich.

#### Interpretation

Wir haben hier noch einmal eine sehr gute Möglichkeit, uns mit der Interpretation von Quantenphänomenen vertraut zu machen und diese zu verinnerlichen.

Die Grundlage für die Beschreibung des Atoms ist die unscharfe Kontextunabhängigkeit einer physikalischen Wirkung. Kontextunabhängig oder objektiv bedeutet ganz allgemein, dass der Kausalzusammenhang zwischen Ursache und (Kraft)-Wirkung immer und überall derselbe ist, unabhängig von irgendwelchen Umständen. Eine bestimmte Ursache hat immer und überall dieselbe Wirkung. Wie in Kapitel 2 beschrieben, legt dies die Dynamik des Wirkungsfeldes  $S$  fest, in Form der Hamilton-Jacobi-Gleichung.

Nun zur Unschärfe. Koordinatensysteme liefern idealisierte Bilder für die Beschreibung raum-zeitlicher Bezüge. Sie basieren auf dem idealen Punkt. Dieser hat keinerlei Ausdehnung oder andere Eigenschaften. Dieser Punkt ist eine geniale Erfindung der antiken Mathematiker, in der von uns erlebten Natur existiert er nicht. Daher können Ursachen und Wirkungen grundsätzlich nicht punktgenau festgelegt werden. Die Genauigkeitsgrenze ist das Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar$ , eine der wenigen Naturkonstanten.

Die Ausbreitung von Wirkungen muss also statistisch beschrieben werden. Es gibt eine Wahrscheinlichkeit für eine Ursache und mit genau derselben Wahrscheinlichkeit tritt irgendeine Wirkung ein. Wie in Kapitel 6 beschrieben, wird dies durch die Kontinuitätsgleichung für das Wahrscheinlichkeitsfeld  $\rho$  gewährleistet. Die Dynamik des Wirkungsfeldes  $S$  und die des Wahrscheinlichkeitsfeldes  $\rho$  werden zusammengefasst in der Schrödinger-Gleichung für die so genannte Quantenwellenfunktion  $\psi = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}$ .

Die elektromagnetische Wechselwirkung oder, wie in unserer Computersimulation, bestimmte Randbedingungen führen zu diskreten Bindungszuständen der Quantenwellenfunktion  $\psi$  und damit zur Beschreibung atomarer Wirkungsquanten.

Die Quelle  $j_e$  des elektrischen Potentials ist ein statistischer Wirkungsstrom. Sie besteht nicht aus einer kontinuierlichen Strom- oder Ladungsverteilung, das sieht nur so aus. Dementsprechend ist auch das von ihr angeregte elektrische Potential  $\phi$  statistisch zu interpretieren.  $\phi$  ist zwar kein Wahrscheinlichkeitsfeld, aber es wirkt als Potential auf andere atomare Strukturen und ändert deren Wahrscheinlichkeitsfelder. Das führt dann zu beobachtbaren Phänomenen, etwa in einem Photopapier, einer Nebelkammer oder einem Photomultiplier.

Die Gleichung für das elektrische Potential folgt aus der Kontinuitätsgleichung der Eichfreiheitsgrade des Wirkungsfeldes. Als solches kann es nicht direkt beobachtbar sein. Es kann jedoch auf andere Atome wirken, deren Zustand verändern und sich so äußern.

Das elektrische Potential breitet sich formal nach allen Seiten aus, aber es wirkt statistisch an einer ganz bestimmten Position. Es kann etwa ein Atom im Gehäuse des Resonators anregen und eine chemische Reaktion oder eine Erwärmung bewirken. Das geschieht aber nur an einer fast punktförmigen Stelle. Die Wirkung ist nicht gleichmäßig auf den gesamten Raum verteilt, etwa der Amplitude des elektrischen Potentials oder ihrem Quadrat entsprechend.

Auch die Energie wird nicht gleichmäßig über den Raum verteilt, sondern erscheint bei einem einzigen Ereignis vollständig, also etwa bei der fast punktförmigen chemischen Reaktion oder Erwärmung am Gehäuse. Die gesamte Energiedifferenz  $\Delta E = E_2 - E_1$  zwischen angeregtem Zustand und Grundzustand der

atomaren Quelle wird dabei auf diesen kleinen Bereich konzentriert. Dieselbe Energiedifferenz  $\Delta E$  bestimmt auch die Winkelfrequenz des elektrischen Potentials, sie schwingt mit  $\omega = \Delta E / \hbar$ . Diese Winkelgeschwindigkeit ist für die Brechung und Beugung der elektrischen Phänomene relevant.

Insgesamt erscheint so das elektrische Feld quantisiert. Es bewirkt fast punktförmige Phänomene mit einer ganz bestimmten Energie, nämlich der Energiedifferenz  $\Delta E$  der atomaren Quellanregungen. Das erinnert sehr stark an die Wirkung eines Teilchens, also eines kleinen Materiekügelchen. Ein solches ist hier jedoch nirgends vorhanden. Der Begriff Photon steht nicht für 'Lichtteilchen' sondern für 'Wirkungsquant des elektromagnetischen Feldes'.



# 9. Selbstorganisation und Morphogenese

## Formen in der unbelebten und belebten Natur

Wir erleben die Welt in Farben, Tönen, Düften, Berührungen, vor allem aber auch in Formen. Die Form ist in der Regel das erste, was wir an einem Ding erkennen, und die Form bestimmt ganz wesentlich auch die Bedeutung oder Funktion des Dings.

Schon in der unbelebten Natur begegnet uns eine unglaubliche Vielzahl von Formen. Die Erde hat eine fein gestaltete Oberfläche, die Bewegung von Wasser in Flussströmungen oder in Meereswogen bringt einen unglaublichen Formenreichtum hervor und betrachtet man an einem schönen Sommertag die aufsteigenden Quellwolken, so kann man darin alles Mögliche entdecken, nicht nur Schäfchen.

In der belebten Natur ist der Formenreichtum noch viel ausgeprägter. Die Form einer Pflanze, eines Tieres oder auch eines Menschen ist ganz eng mit dem Wesen verknüpft; sie ist meist das erste, das wir an dem Wesen erkennen.

Dabei ist es immer noch eines der großen Rätsel unserer Zeit, wie Organismen ihre Form hervorbringen. Warum wächst uns an der rechten Hand ein rechter Daumen und auf der linken Kopfseite ein entsprechendes Ohrfläppchen? Welche Kräfte formen das Herz mit seinen komplexen mechanischen, chemischen und elektrischen Eigenschaften.

Erzählt wird uns bei vielen Gelegenheiten, dass es die Gene seien, die alle Information über die biologische Morphogenese enthalten und bei Bedarf zur Verfügung stellen, wie aus einem Computerspeicher. Das ist allerdings mehr ein Dogma als eine nachgewiesene Tatsache.

Die Tübinger Entwicklungsbiologin Christiane Nüsslein-Volhard erhielt 1995 den Medizin-Nobelpreis für den Nachweis, dass Veränderungen der Gene eine Veränderung der biologischen Form eines Lebewesens bewirken können, im speziellen Fall betraf es die Taufliege *Drosophila*. Nüsslein-Volhard hatte gezeigt, dass die Gene etwas mit der biologischen Form zu tun haben. Sie hat jedoch nicht gezeigt, dass Gene die biologische Form gespeichert haben, etwa als Bauplan.

Der britische Biochemiker Rupert Sheldrake [SHEL81]..[ SHEL94] stellt dazu den Vergleich mit einem Fernsehgerät an. Man verändert einen Widerstand in

dem Gerät und beeinflusst damit das Bild. Ein Fachmann kann so leicht ein Doppelbild erzeugen. Ganz offensichtlich hat dieser Widerstand etwas mit der Entstehung des Fernsehbildes zu tun. Er hat jedoch nichts mit dem Bild selbst zu tun. Die Widerstände im Fernsehgerät sind keine Bildspeicher. Es ist ganz klar, dass das Bild eine andere Quelle hat, von der uns ja monatlich auch eine Rechnung ist Haus flattert.

So haben auch die Gene ganz offensichtlich etwas mit der biologischen Morphogenese zu tun. Niemand sollte allerdings glauben, dass die Formen der belebten Natur in ihnen gespeichert sind.

Die biologische Morphogenese ist ein sehr spannendes und eines der großen ungelösten Probleme unserer Zeit. Eine kompetente und sachliche Diskussion gibt es in dem Buch 'Thinking in Complexity' von Klaus Mainzer [MAIN94]. Mainzer führt neben der genetischen Erbinformation noch die Tendenz zur Selbstorganisation der Materie zur Erklärung der biologischen Morphogenese an.

Vielleicht wird Morphogenese jedoch erst ganz verständlich, wenn wir das Weltbild der klassischen Physik hinter uns lassen und zu einem Weltbild übergehen, in dem es keine absolute Raumzeit gibt und in dem die atomaren Grundlagen der Materie keine Objekte sind, sondern Wirkungsquanten mit kontextabhängigem Charakter. Gene enthalten unzählige Möglichkeiten zu wirken, und quantenmechanisch können sich sehr viele dieser Möglichkeiten überlagern. Welche der Möglichkeiten sich dann manifestiert, wie also das Gen im Einzelfall wirkt, hat dann wenig mit Kausalität zu tun. Vielleicht ist es der Mensch, der unbewusst durch sein Erkennen der Welt die Formvielfalt der belebten Natur mitprägt.

## Die Selbstorganisation der Materie

Selbstorganisation ist eine ganz selbstverständliche Eigenschaft nichtlinearer Systeme. Grob gesagt ist ein nichtlineares System dadurch gekennzeichnet, dass mehrere Einflüsse komplex miteinander verknüpft sind. Wenn sich ein Wassertropfen in einem Bach von einer ruhigen Stelle in die reißende Strömung hinein bewegt, dann hängt die Änderung seiner Geschwindigkeit davon ab, wie schnell er sich bewegt und wie sehr sich das Geschwindigkeitsfeld des Baches mit dem Ort ändert. Zwei Einflüsse wirken auf die Geschwindigkeit des Tropfens, und wenn wir den Bach betrachten, sehen wir, wie dies die unglaublichsten Formen hervorbringt.

Wie sich ein ganz einfacher Wasserwirbel bilden kann, haben wir im Kapitel über Hydrodynamik gesehen. Viele Beispiele für nichtlineare Systeme sind in dem Buch 'Chaos, Attraktoren und Fraktale' [BRÄU02] vorgestellt.

In einem linearen System ist alles sehr einfach. Wenn wir doppelt so stark an einer Feder ziehen, dehnt sich diese doppelt so weit aus. Die Ausdehnung hängt einfach oder linear mit der Zugkraft zusammen. Solche Systeme bilden selten komplexe Strukturen.

Interessant ist, dass die Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen kontinuierlicher Materie, die wir in den vorausgehenden Kapiteln ja ausführlich diskutiert haben, direkt aus der Objektivität oder Kontinuität unserer bewussten Welterfahrung folgt. Materie ist ja genau das, was seinen Bewegungszustand nicht ohne Grund ändert. Dieses Beharrungsvermögen ist Folge der Kontinuität beziehungsweise der Kontextunabhängigkeit physikalischer Phänomene. Es bedeutet Impulserhaltung der Materie und führt damit auf nichtlineare Bewegungsgleichungen.

Es ist die Art unserer bewussten Welterfahrung, die zu materiellen Strukturen führt, und diese enthalten in sich die Tendenz zur Selbstorganisation. Das ist doch phantastisch! Im nächsten Abschnitt werden wir das nochmals formal vertiefen und mit FEMLAB einige Computersimulationen dazu durchführen. Wir werden jedoch sehen, wie beschränkt unsere Möglichkeiten dabei wegen der komplexen Berechnungen sind. In den Simulationen müssen wir uns auf relativ einfache Formen beschränken.

Eine andere Möglichkeit, die formbildenden Kräfte der kontinuierlichen Materie zu entdecken besteht darin, sie direkt in der Natur aufzuspüren. Die unbelebte und die belebte Natur ist voll von Formen, die sich unmittelbar auf die Nichtlinearität der Impulserhaltung in kontinuierlichen Medien zurückführen lassen. Theodor Schwenk [SCHW95] zeigt in seinem Buch über 'Das sensible Chaos' viele Beispiele solcher Formen in Bildern und Zeichnungen.

Dazu gehören Geländeformationen, Magmaflüsse, Wolkenformen, Mäander von fließendem Wasser, Hoch-Tiefdruck-Gebiete oder Tornados. Das Bild von Prielien im Wattenmeer ist von Bildern des Systems menschlicher Blutadern kaum zu unterscheiden. Besonders aufregend sind Aufnahmen vom Einfließen trüber Flüssigkeiten in ein Wasserbecken. Hier zeichnen sich regelrechte Organformen ab, die an Nieren, Herzen oder gar an das Gehirn mit seiner äußeren Schale und seinen inneren Weichteilen erinnern. Wer einen Gartenteich hat und im Frühjahr das erste Mal den Wasserzufluss einschaltet, kann selber darüber staunen, welche Formen die Trübe in das Wasser zeichnet.

Ein sehr interessantes Beispiel ist auch die Form der Qualle. Diese hinterlässt bei ihrer Fortbewegung einen Wasserwirbel und, wie in Abbildung 6-1 dargestellt, entspricht dieser Wirbel so ziemlich exakt ihrer eigenen Form.

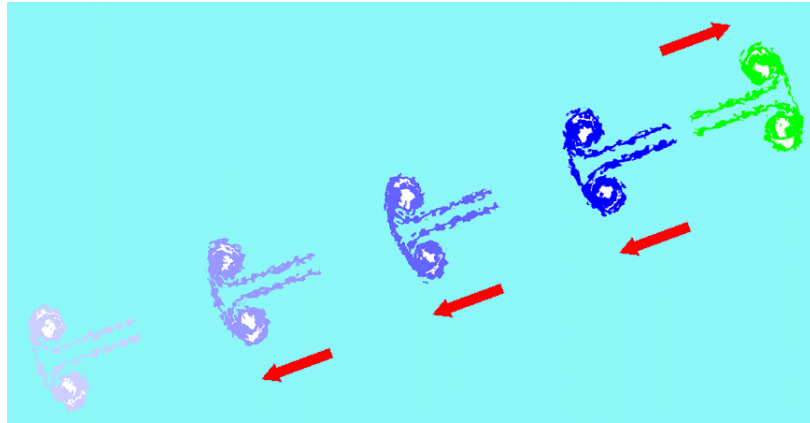


Abbildung 9-1

Die Qualle rechts oben erzeugt bei der Fortbewegung im Wasser die Wirbel links unten. Diese entsprechen ziemlich genau ihrer eigenen Form. Man kann fast sagen, dass die Qualle 'festgewordene Form' der von ihr erzeugten Strömungen ist.

Es scheint also, als ließen sich selbst die Grundformen der belebten Natur mit der Tendenz zur Selbstorganisation der Materie begründen. Einfache Strömungen um Hindernisse, wie in Abbildung 9-2, bilden Grenzflächen, Hohlräume mit Ruhezonzen und ganze Kammersysteme. Beim Maikäferherz etwa sind einzelne Herzkammern noch nicht durch Gewebe getrennt, sondern nur durch Ruhezonzen zwischen Blutwirbeln. Bei höheren Lebewesen bilden sich in diesen Ruhezonzen Gewebe, wodurch die Herzen Kammern ausbilden und wesentlich effizienter funktionieren.

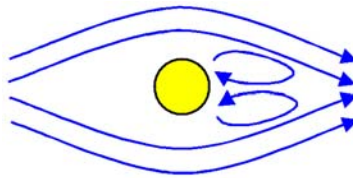


Abbildung 9-2

Hohlraumbildung und Grenzflächen der Strömung hinter einem umströmten Hinderniss.

Komplexe Systeme wie ganze Organismen bedürfen natürlich weitaus mehr strukturbildender Mechanismen, als sie die Hydrodynamik bieten kann. Ganz selbstverständlich wird dabei die genetische Information unverzichtbar. Es gibt mathematische Modelle, die solche Information grob einbeziehen und damit sehr einfache Strukturen wie die Form des Süßwasserpolyeps Hydra, die der

Sonnenblume oder die unterschiedlichsten Tierfellzeichnungen erklären [BRÄU02].

## Die Tendenz zur Formbildung in der Hydrodynamik

Die Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen kontinuierlicher Materie, etwa die von Flüssigkeiten in der Hydrodynamik, folgt aus der Kontextunabhängigkeit physikalischer Wirkungen. Damit Wirkungen für uns erkennbar sind, müssen sie immer wieder und überall gleich sein. Die Energiefunktion  $E$ , die wir ja vorausgehend als logische Folge dieser Kontextunabhängigkeit abgeleitet haben, darf daher nicht vom speziellen Ort abhängen. Dies ist ein Weg, die Erhaltung des Impulses zu begründen:

$$\underbrace{E(\vec{x} + \vec{a})}_{\text{Energiefunktion}} \stackrel{!}{=} E(\vec{x}), \quad (9-1)$$

$$E(\vec{x} + \vec{a}) = \underbrace{E(\vec{x}) + \vec{\nabla} E \cdot \vec{a} + O(\vec{a}^2)}_{\text{Taylor-Entwicklung}}, \quad \forall \vec{a} \Rightarrow 0 = -\vec{\nabla} E = \frac{d}{dt} \vec{p} \quad (= \vec{F}).$$

Der Impuls ändert sich also nicht, solange keine Kräfte auf die Materie einwirken. In kontinuierlicher Materie ist dieser Ausdruck nun nichtlinear:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(\vec{x}(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}(\vec{x}(t), t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \vec{x}(t)}_{=\vec{v}} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{p}(\vec{x}(t), t), \quad \text{also} \quad (9-2)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{\nabla}}_{\text{Nicht-linearität}} \vec{v}.$$

Mathematisch gesehen ist es die Kettenregel beim Ableiten nach der Zeit, die zu einer doppelten Abhängigkeit der Beschleunigung von der Geschwindigkeit führt. Physikalisch hängt die Geschwindigkeitsänderung zum Beispiel eines Wassertropfens eben davon ab, wie schnell der Tropfen sich bewegt und wie stark sich das Geschwindigkeitsfeld mit dem Ort ändert.

Dieser nichtlineare Term in (9-2) ist einer der Hauptschlüssel zum Verständnis der Formenwelt. Weiterhin ist er auch dafür verantwortlich, dass jede Wettervorhersage selbst kurzfristig unzuverlässig ist und wir nie wissen, ob wir unseren Regenschirm nun brauchen oder nicht.

Durch Reibungs- und Druckkräfte wird (9-2) zur Navier-Stokes-Gleichung, also zur Grundgleichung der Hydrodynamik. Wir haben sie im Kapitel über Hydrodynamik aus der klassischen oder scharfen Kontinuität des Wirkungsfeldes her-

geleitet. Nun wollen wir diese Gleichung anwenden, um uns die der Materie innewohnenden formbildenden Kräfte vertraut zu machen.

### *Strömungen um ein Hindernis*

Diese Simulation entspricht ganz der einer Flugzeugtragfläche im Kapitel über Hydrodynamik. In diesem Kapitel hier interessieren wir uns jedoch mehr für den Strömungsverlauf nach dem Hindernis und nicht so sehr für die Kräfte auf das Hindernis:

Gebiet:

Rechteck - Kreis ;  
Ecken:  $(0,0);(2.2,0.41)$     Mittelpunkt:  $(0.2,0.2)$   
Radius:  $R=.05$

Variablen:

$\left\{ \begin{array}{l} \eta = 10^{-3}, \\ v_0 = 0.3 \dots 1.5; \end{array} \right.$

FEMLAB 9-1

Gleichungen:

$$\frac{1}{a^{(x)}} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(x)}} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \underbrace{\left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{F^{(x)}},$$

$$\frac{1}{a^{(y)}} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ -\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(y)}} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \underbrace{\left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)}_{F^{(y)}},$$

$$\frac{0}{a^{(P)}} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}}_{\Gamma^{(P)}} = \frac{0}{F^{(P)}}.$$

Ränder:

Zufluss:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_x - v_0(1 - y^2)}_{R^{(x)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(x)}} + \eta^{(Lag)}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_y}_{R^{(y)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(y)}} + \eta^{(Lag)}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{0}_{R^{(P)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(P)} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(P)}}; \end{array} \right.$$

Wände und Hindernis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_x}_{R^{(x)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial n} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(x)}} + \eta^{(Lag)}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v_y}_{R^{(y)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial n} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(y)}} + \eta^{(Lag)}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{0}_{R^{(P)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(P)} = \frac{\partial v_n}{\partial n} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(P)}}; \end{array} \right.$$

Abfluss:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{0}_{R^{(x)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(x)} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(x)}}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{0}_{R^{(y)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(y)} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(y)}}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{P}_{R^{(P)}} = 0, \\ -\hat{n} \cdot \Gamma^{(P)} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \quad = \underbrace{0}_{G^{(P)}} + \eta^{(Lag)}; \end{array} \right.$$

Die FEMLAB-Simulationen zeigen, wie die Strömung nach dem Hindernis von der Geschwindigkeit des Strömungsfeldes abhängt. In Abbildung 9-3 schmiegt sich bei einem sehr schwachen Geschwindigkeitsfeld das Strömungsfeld sehr eng an das Hindernis an. Bei stärkerem Feld bildet sich eine Ruhezone aus und bei starkem Feld bilden sich Wirbel oder Kammern. Es gibt klare Grenzlinien zwischen den Strömungsbereichen.

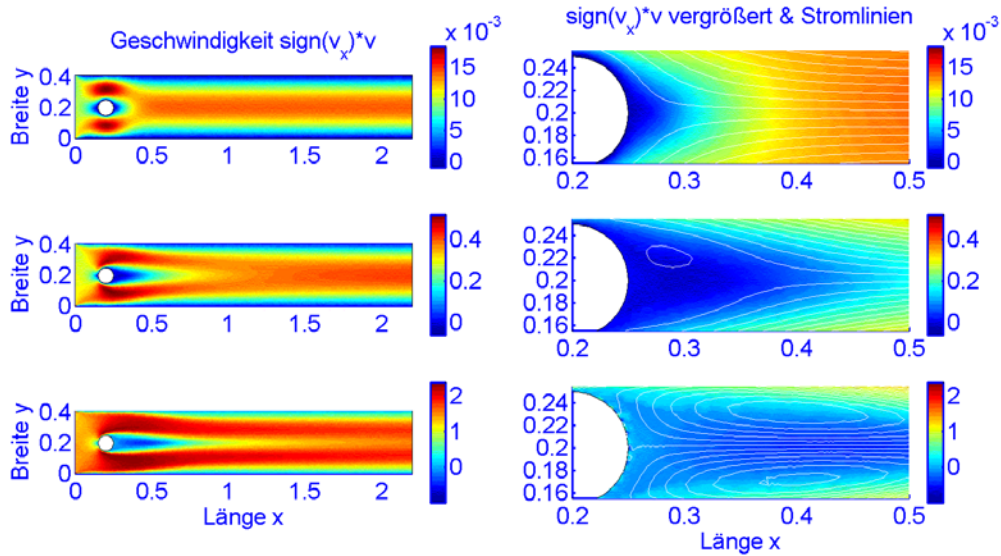


Abbildung 9-3

Hohlraumbildung und Grenzflächen hinter umströmten Hindernissen. Gezeigt ist das Geschwindigkeitsfeld. In den rechten Darstellungen ist der Bereich nach dem Hindernis vergrößert und es sind (weisse) Stromlinien eingezeichnet. Wassertropfen fließen entlang dieser Linien und der Linienabstand ist umgekehrt proportional zu ihrer Geschwindigkeit.

Bei einem sehr schwachen Geschwindigkeitsfeld oben schmiegt sich die Strömung sehr eng an das Hindernis an. Bei stärkerem Feld in der Mitte bildet sich eine Rubezone aus und bei starkem Feld unten bilden sich Wirbel. Es gibt klare Grenzlinien zwischen den Strömungsbereichen.

Eine zeitabhängige Lösung von (FEMLAB 8-1) zeigt die Karmansche Wirbelstraße. Diese Simulation ist allerdings nicht ganz einfach, die Parameter müssen sehr sorgfältig gewählt werden und der Rechenaufwand ist etwas größer als sonst. Wer sie nachvollziehen möchte, sollte weitere Informationen über den 'Flow past a cylinder' aus der FEMLAB Model-library hinzuziehen.

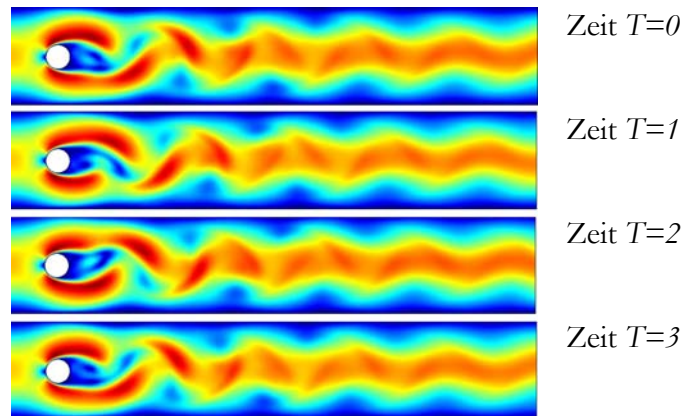


Abbildung 9-4

*Karmansche Wirbelstraße nach einem Hindernis. In der Zeitfolge von oben nach unten ist unter anderem sehr schön zu sehen, wie sich über dem Hindernis ein Wirbel ablöst und wie sich gleichzeitig unter dem Hindernis ein neuer Wirbel bildet.*

### *Einfluss trüber Flüssigkeiten in ein Wasserbecken*

Theodor Schwenk [SCHW95] zeigt in seinem Buch über 'Das sensible Chaos' fast unglaubliche Bilder vom Einfluss trüber Flüssigkeiten in ein Wasserbecken. Es ist recht schwierig, diese komplexen Formen in Computersimulationen nachzuvollziehen. Ein Problem dabei ist, dass die Ausdehnung des berechenbaren Gebietes durch die Rechenkapazität doch sehr beschränkt ist und dass die Erhaltung der Flüssigkeitsmenge zusammen mit den Randbedingungen die Lösungen sehr dominieren.

Es hilft, wenn man lokale Schwankungen der Wasserstandshöhe erlaubt. Dadurch kann sich Flüssigkeit lokal ansammeln und sich zeitverzögert verteilen. Das Strömungsbild kann so wesentlich komplexer werden als in einem vollständig abgeschlossenen Gebiet.

Im Prinzip wird so die Simulation dreidimensional: zu Länge und Breite einer Röhre kommt noch die Höhe hinzu. Um den Rechenaufwand trotzdem auf erträgliche Maße zu beschränken, gibt es eine sehr elegante Näherung, die Saint-Venants Flachwassergleichungen [PIRO89] [BENE80]. Sie ist auch im FEM-LAB Handbuch bei den 'Fluid dynamic models' beschrieben.

In dieser Näherung wird die vertikale Strömungsbewegung  $v_z$  vernachlässigt und die vertikale Koordinate  $z$  anstelle von  $v_z$  als dynamisches Feld  $z^W(x,y,t)$  der Wasserstandshöhe behandelt. Die horizontalen Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_y$  werden über die Wasserstandshöhe  $z$  gemittelt:

Mittelung:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{z^{(W)}(x,y,t)} v_i(x,y,z',t) dz' \\
 &= z^{(W)}(x,y,t) \underbrace{\tilde{v}_i(x,y,t)}_{\text{gemittelte Geschwindigkeiten}}, \quad i \in \{x, y\};
 \end{aligned} \tag{9-3}$$

Druck:

$$p = g z^{(W)};$$

nichtlineare Terme:

$$\int_0^{z^{(W)}} v_j v_i dz \approx \tilde{v}_j \int_0^{z^{(W)}} v_i dz \approx z^{(s)} \tilde{v}_i \tilde{v}_j.$$

Die Dynamik der Wasserstandshöhe  $z^{(W)}$  ergibt sich aus der Kontinuität der Flüssigkeitsmenge. Insgesamt darf sich die Menge an Flüssigkeit nicht ändern. Fließt in einen Bereich  $dx dy$  eine bestimmte Flüssigkeitsmenge  $V$  ein, so muss sich der Wasserspiegel entsprechend heben. Dies ist anschaulich in Abbildung 9-5 dargestellt.

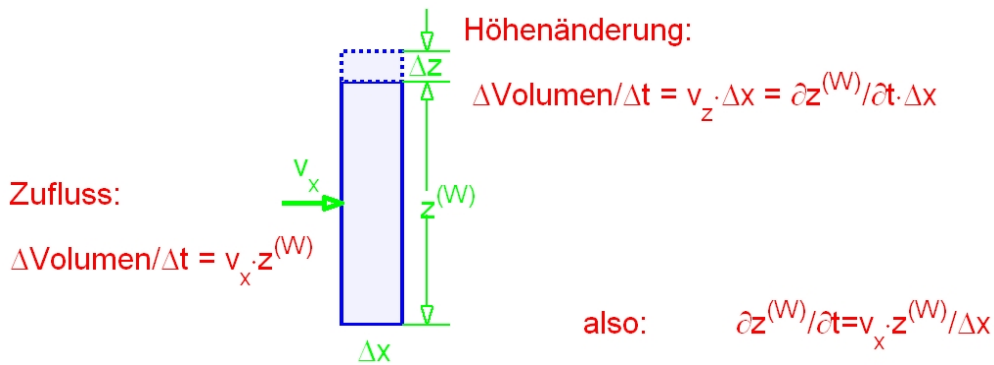


Abbildung 9-5

Die Dynamik der Wasserstandshöhe  $z^{(W)}$  ergibt sich aus der Erhaltung der Wassermenge: Die Menge an zufließendem Wasser wird durch die Änderung des Wasserstandes ausgeglichen.

In (9-4) ist die Dynamik des Wasserstandes  $z^{(W)}$  formal abgeleitet:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{zeitliche Änderung des Flüssigkeitsvolumens}} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = \int \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y \right)}_{\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{v}_x z^{(w)}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{v}_y z^{(s)})} dz dxdy + \int \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} v_z}_{\frac{\partial z^{(w)}}{\partial t}} dz dxdy; \quad (9-4)$$

$$\forall dxdy: \underbrace{\frac{\partial z^{(w)}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\tilde{v} z^{(w)})}_{\text{Dynamik des Wasserstandes}} = 0, \quad \tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_x(x, y, t) \\ \tilde{v}_y(x, y, t) \end{pmatrix}.$$

Für eine elegante Mittelung der Navier-Stokes-Gleichung formen wir den nicht-linearen Term der Impulserhaltung mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung um:

$$\text{Umformung:} \quad \vec{\nabla} \cdot (\tilde{v} v_i) = \vec{\nabla} \cdot \tilde{v} v_i + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \tilde{v}}_{=0} v_i, \quad (9-5)$$

$$\text{Navier-Stokes-Gleichung:} \quad \frac{\partial}{\partial t} v_i = -\vec{\nabla} \cdot (\tilde{v} v_i) + \eta \Delta v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} p + g \delta_{iz}.$$

Die Mittelung der Bewegungsgleichungen führt dann auf ein zweidimensionales Problem:

Mittlung: (9-6)

$$\begin{cases} \int_0^{z^{(w)}} dz \frac{\partial}{\partial t} v_i = \int_0^{z^{(w)}} dz \left( -\vec{\nabla} \cdot (\tilde{v} v_i) + \eta \Delta v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} p \right), & i \in \{x, y\}, \\ \int_0^{z^{(w)}} dz \vec{\nabla} \cdot \tilde{v} = 0; \end{cases}$$

→

Gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

(Saint-Venants Flachwassergleichungen):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (z^{(w)} \tilde{v}_i) = -\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{(z^{(w)} \tilde{v}_i)(z^{(w)} \tilde{v})}{z^{(w)}} \right) + \eta \Delta (z^{(w)} \tilde{v}_i) - z^{(w)} \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{g z^{(w)}}_p, \\ \frac{\partial}{\partial t} z^{(w)} + \vec{\nabla} \cdot (z^{(w)} \tilde{v}) = 0. \end{cases} \quad i \in \{x, y\};$$

Für die FEMLAB-Computersimulation vom Einfluss einer trüben Flüssigkeit in ein Wasserbecken können wir folgende Eingaben machen:

Initiierung:	$\begin{cases} zu = zv = 0, \\ z = z0; \end{cases}$	Variablen:	$\begin{cases} eta = 10^{-3}, & gz = 10, \\ z0 = 1, & z\_source = 1, \\ B = .2, & dB = .005; \end{cases}$
Gebiet:	$\left( \underbrace{\text{Rechteck}}_{\text{Ecken } (-1,-1);(1,1)} - \underbrace{\text{Rechteck}}_{\text{Ecken } (-1,-B-dB);(0,B+dB)} \right) + \underbrace{\text{Rechteck}}_{\text{Ecken } (-1,-B);(0,B)} ;$	Ränder	<div>Zufluss:</div> $\begin{cases} \underset{R}{0} = 0, \\ \underset{\Gamma}{\ddot{\ddot{}}} = \underset{G}{0}; \end{cases}$ <div>Wände:</div> $\begin{cases} \underset{R^{(zu)}}{zu} = \underset{R^{(zv)}}{zv} = 0, \\ \underset{\Gamma^{(zu,zv)}}{\ddot{\ddot{}}} = \underset{G^{(zu,zv)}}{\eta^{(Lag)}} + \underset{G^{(zu,zv)}}{0} ; \\ \underset{R^{(z)}}{0} = 0, \\ \underset{\Gamma^{(z)}}{\ddot{\ddot{}}} = \underset{G^{(z)}}{0} , \\ weak = z\_test \cdot z\_source. \end{cases}$

FEMLAB 9-2

Gleichung:

FEMLAB

9-3

$$\frac{1}{a^{(x)}} \frac{\partial (z^{(w)} \tilde{v}_x)}{\partial t} + \nabla \cdot \underbrace{\left( \begin{pmatrix} z^{(w)} \tilde{v}_x \\ z^{(w)} \tilde{v}_y \end{pmatrix} / z - eta \begin{pmatrix} z^{(w)} \tilde{v}_x \\ z^{(w)} \tilde{v}_y \end{pmatrix}_x \right)}_{\Gamma^{(x)}} = \underbrace{-gz^{(w)} z_x^{(w)}}_{F^{(x)}},$$

$$\frac{1}{a^{(y)}} \frac{\partial (z^{(w)} \tilde{v}_y)}{\partial t} + \nabla \cdot \underbrace{\left( \begin{pmatrix} z^{(w)} \tilde{v}_x \\ z^{(w)} \tilde{v}_y \end{pmatrix} / z^{(w)} - eta \begin{pmatrix} z^{(w)} \tilde{v}_x \\ z^{(w)} \tilde{v}_y \end{pmatrix}_x \right)}_{\Gamma^{(y)}} = \underbrace{-gz^{(w)} z_y^{(w)}}_{F^{(y)}},$$

$$\frac{1}{a^{(z)}} \frac{\partial z^{(w)}}{\partial t} + \nabla \cdot \underbrace{\left( \begin{pmatrix} z^{(w)} \tilde{v}_x \\ z^{(w)} \tilde{v}_y \end{pmatrix} \right)}_{\Gamma^{(z)}} = \underset{F^{(z)}}{0}.$$

Die Simulation in Abbildung 9-6 führt zu einem Strömungsverlauf, der den Verhältnissen bei der Quelle in Abbildung 6-1 genau entspricht.

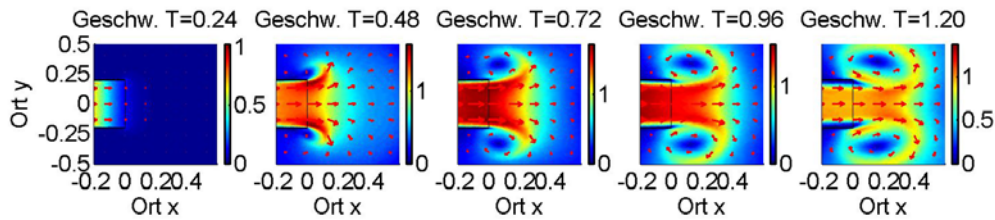


Abbildung 9-6

Robrströmung in ein Wasserbecken mit dynamischer Wasserstandshöhe. Es bildet sich ein Strömungsmuster aus, das die Form einer Qualle sehr gut wiedergibt. Gezeigt ist ein Ausschnitt des Geschwindigkeitsfeldes  $v$  zu verschiedenen Zeiten  $T$ .

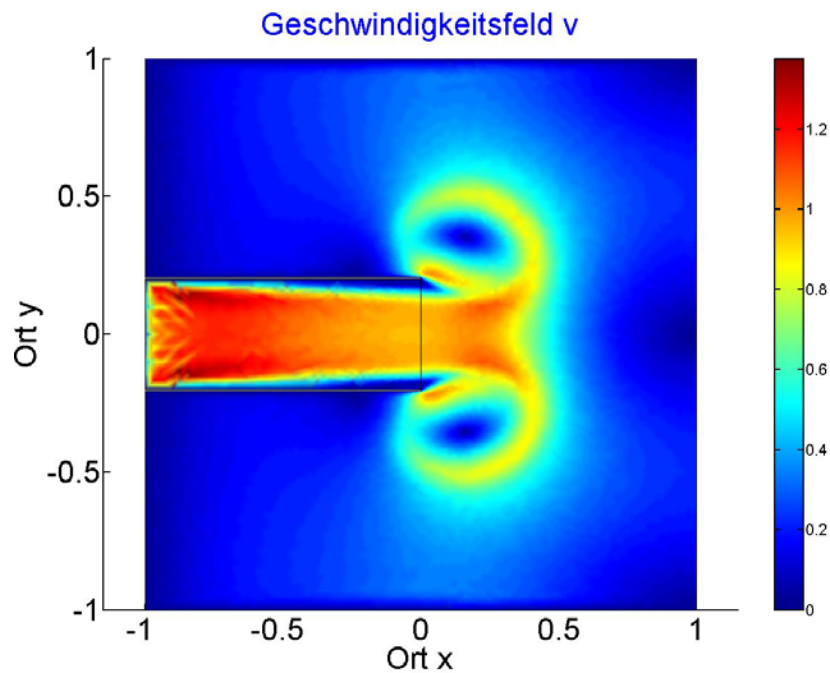


Abbildung 9-7

Vollständige Darstellung des Gebietes mit dem Geschwindigkeitsfeld von Abbildung 9-6 zur Zeit  $T=1.20$ .

Diese Simulationen bieten Ansätze für ein Verständnis der Selbstorganisation von Materien und deren Zusammenhang mit den vielfältigen Formen, denen wir in der unbelebten und belebten Natur begegnen. Es ist interessant zu sehen, wie komplex diese Problematik ist und wie bescheiden alle Simulationen in dieser Richtung sind. Wir brauchen Phantasie um uns vorzustellen, dass diese Tendenz zur Selbstorganisation in einem größeren Stiel, der leider über unsere nu-

merischen Möglichkeiten hinausgeht, wirklich die Formen unserer Welt wesentlich mitbestimmen.

Dass es andere Einflüsse auf die Formentwicklung geben muss, ist klar. Als Abschluss sollen nun die uns bekannten Einflüsse zu einer ganzheitlichen Erklärung der natürlichen Formen und Gestalten verbunden werden.

### **Versuch einer umfassenden Erklärung der Form- und Gestaltbildung in der Natur**

Der Mensch erkennt sich und die Welt. Dabei entwickelt er Ordnungsstrukturen, die ein Bewusstsein über die Welt ermöglichen. Räumliche Bezüge sind die Grundlage dieser Ordnungsstrukturen. In dem bewussten Bild der Welt erscheint alles Erkannte neben- hinter- über- oder nacheinander. C.G. Jung bezeichnete solche Ordnungsstrukturen als Archetypen. Sie ordnen die Inhalte der 'Einen Welt' (Unus mundus), in der alles mit allem untrennbar verwoben ist, so an, dass Einzelheiten bewusstseinsfähig werden.

Die Ordnungsstrukturen beruhen auf Gedächtnis, und Gedächtnis beruht auf Beharrungsvermögen oder Trägheit. Trägheit ist gleichbedeutend mit Materie. Also sind Gedächtnis und Ordnungsstrukturen gleichbedeutend mit träger Materie: Gedächtnis ist Materie und Materie ist Gedächtnis.

Die Dynamik kontinuierlicher Materie, wie Wasser, Gas oder elastische Körper ist nichtlinear: ein Tropfen Wasser bewegt sich in einem Geschwindigkeitsfeld. Er kommt an eine Position, wo das Feld einen anderen Geschwindigkeitswert hat. Er ändert also seine Geschwindigkeit. Wie schnell das geschieht, hängt nochmals von der Geschwindigkeit des Wassertropfens ab, mit der er sich an die andere Position bewegt.

Daher hängt die Änderung der Geschwindigkeit des Wassertropfens davon ab, wie schnell er ist und wie stark sich das Geschwindigkeitsfeld mit dem Ort ändert. Diese doppelte Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ist die Nichtlinearität, die der Dynamik aller kontinuierlichen Materie eingeprägt ist. Sie ist eine Konsequenz der Gleichförmigkeit oder Kontextunabhängigkeit raumzeitlicher Bezüge.

Wegen dieser Nichtlinearität hat die Materie von sich aus die Tendenz zur Selbstorganisation und zur Strukturbildung. Viele Beispiele sind in Schwenk: 'Das sensible Chaos' [SCHW95] vorgestellt. Ein Musterbeispiel ist die Qualle. Ihre Form entspricht dem Wasserwirbel, den sie bei der Fortbewegung erzeugt. Und dieser Wasserwirbel ist eine reine Konsequenz der Nichtlinearität kontinuierlicher Materie.

Nun kommt noch die Unschärfe aller raumzeitlichen Bezüge hinzu. Auf sie wurde bereits von Zenon von Elea und von Aristoteles vor über 2000 Jahren

hingewiesen. Jos Verhulst [VERH94] schildert dies in seinem 'Der Glanz von Kopenhagen': Zenon versuchte mit seiner populären Geschichte von Achilles und dessen Wettlauf mit der Schildkröte und mit seinem in Raum und Zeit eingefrorenen Pfeil schon damals, seine Mitmenschen von der Fragwürdigkeit unserer objektiven Vorstellungen über Raum und Zeit zu überzeugen.

In dieser Unschärfe entwickeln sich materielle Formen als Möglichkeiten. Es gibt nicht nur eine zeitliche Entwicklung, sondern es überlagern sich viele, so wie sich beim quantenmechanischen Doppelspaltexperiment oder im Quanteninterferometer mehrere Wirkungsmöglichkeiten überlagern und sogar miteinander interferieren. Wegen der Nichtlinearität der Dynamik, die der Entwicklung zugrunde liegt, können sich die einzelnen Möglichkeiten sehr unterschiedlich entwickeln.

Im Bewusstsein manifestiert sich immer nur eine dieser Möglichkeiten. In sehr feinen physikalischen Experimenten kann dies als Quantensprung beobachtet werden. Welche sich warum manifestiert, kann wissenschaftlich nicht untersucht werden. Der Tiefenpsychologe C.G. Jung und der Physik-Nobelpreisträger Wolfgang Pauli sahen darin jedoch den Weg, auf dem Sinn in die Welt unseres Bewusstseins kommt: Der Mensch mit seinen unbewussten Gedächtnisinhalten erkennt genau eine der vielen Möglichkeiten, vielleicht eine der sinnvollsten. Durch das Erkennen wird diese real, sie manifestiert sich.

Gleichzeitig wird diese Manifestation einer materiellen Erscheinungsform in das kollektive Gedächtnis der Menschheit aufgenommen. Sie wird so Grundlage für das Erkennen von komplexeren Formen und Gestalten der Materie.

Dieser selbstbezügliche Prozess der Morphogenese erscheint sehr natürlich. Er bedarf keiner neuen Zutaten wie morphogenetischer Felder oder ähnlichem. Er beruht allein auf den Möglichkeiten des kollektiv Unbewussten und auf der Fähigkeit des Menschen, sinnvolles zu erkennen und damit zu manifestieren.

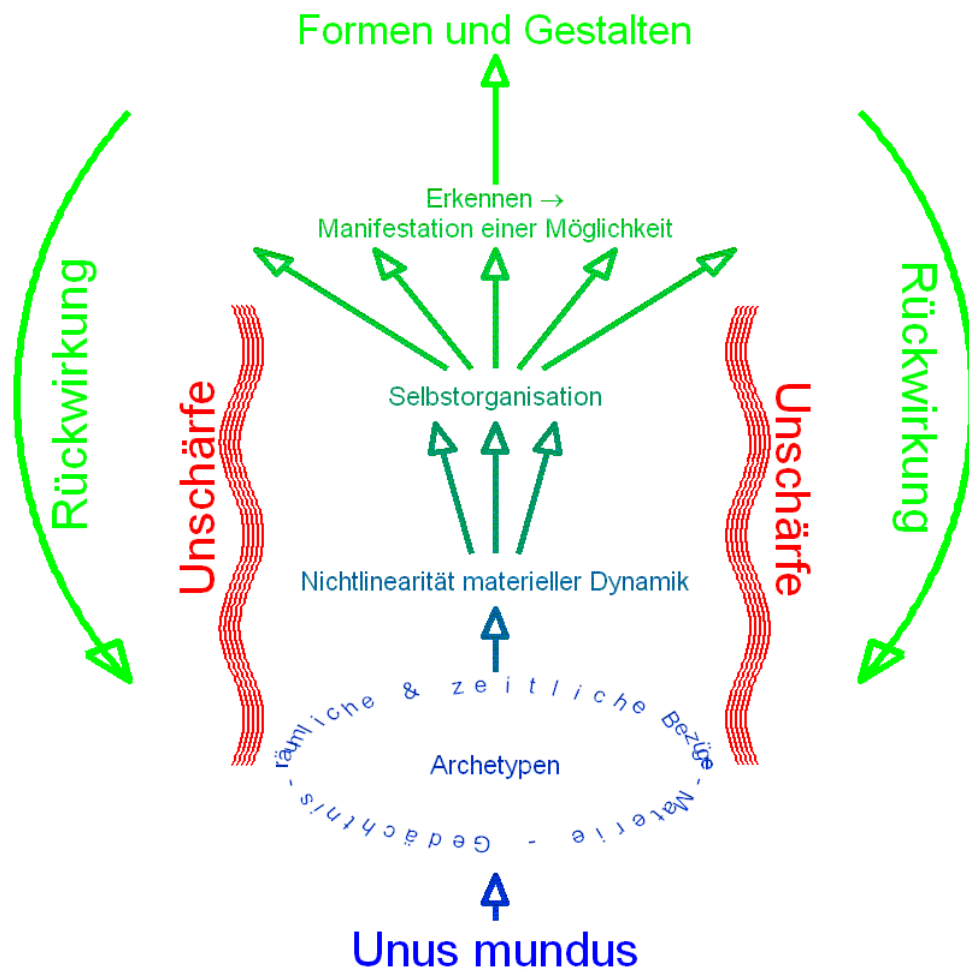


Abbildung 9-8

Die Welt, die wir in unserem Bewusstsein in ihren Formen, Farben, Gerüchen, Klängen oder Gefühlen erleben, entwickelt sich aus einer ganzheitlichen Welt heraus, die wir bewusst nicht fassen können. Sie hat viele Namen, etwa *Unus mundus* (C.G.Jung), *Implizite Ordnung* (D.Bohm), *Paradies* oder *Nirvana*.

Auf der Grundlage von Materie, Gedächtnis und raum-zeitlichen Bezügen entwickeln sich Ordnungsstrukturen, die ein bewusstes Welterleben ermöglichen.

Die Nichtlinearität der Materie macht zeitliche Entwicklungen hochsensibel abhängig von kleinsten Kleinigkeiten. Die Unschärfe der materiellen Wirkungen erlaubt eine Überlagerungen dieser unterschiedlichsten Möglichkeiten.

Die Manifestation der erlebten Welt basiert auf einer einzigen dieser Möglichkeiten. Wie es zu dieser Auswahl kommt, entzieht sich der naturwissenschaftlichen Erforschung.

Vielleicht ist es der menschliche Geist, der unbewusst in den Möglichkeiten sinnvolles erkennt und so kreativ

*auf die Entwicklung der materiellen Welt Einfluss nimmt.*

*Das durch das Erkennen Manifestierte wird zum Erkannten und zum Bestandteil des kollektiven menschlichen Wissens. Es wird Grundlage für die Manifestation noch komplexerer Formen und Gestalten in der Natur.*



# 10. Anhang:

## Die Methode der Finiten Elemente

Die Computersoftware FEMLAB zur Lösung partieller Differentialgleichungen ist sehr ausgefeilt und komfortabel. Mit wenigen Mausklicks und Tastatureingaben lassen sich auch komplexe Probleme definieren und lösen.

Trotz allem erweist es sich immer wieder als notwendige Voraussetzung für das Gelingen der Computersimulationen, dass man sich im Klaren ist über das zu lösende Problem und auch darüber, wie die Lösung durchgeführt wird.

Daher sollen in diesem Anhang die mathematischen Grundlagen der Methode der Finiten Elemente beschrieben werden. Wenn man sich auf ein sehr einfaches Problem und auf sehr einfache Basisfunktionen beschränkt, können sogar alle Matricelemente analytisch berechnet und mit Standardroutinen einer beliebigen Computersprache gelöst werden. Wir können so der Frage nachgehen, ob man aus dem Klangspektrum einer Trommel auf ihre Form schließen kann.

### Motivation der Finiten Elemente Methode

Physikalische Theorien führen in aller Regel zu Feldgleichungen in Form partieller Differential-Gleichungen. Einige fundamentale Beispiele sind:

Klassische Mechanik:	Wellengleichung Hamilton-Jakobi-Gleichung Euler-Gleichung der Strukturmechanik Navier-Stokes-Gleichung der Hydrodynamik
Quantenmechanik:	Schrödinger-Gleichung Klein-Gordon-Gleichung Dirac-Gleichung
Elektrodynamik:	Maxwell-Gleichungen Potentialgleichungen
Thermodynamik:	Liouville-Gleichung Boltzmann-Gleichung Fock-Planck-Gleichung

Nur in wenigen Spezial- oder Näherungsfällen können diese Gleichungen analytisch gelöst werden.

Bei numerischen Lösungsansätzen ist man mit dem Problem konfrontiert, partielle Ableitungen der Felder bestimmen zu müssen, obwohl diese noch gar nicht bekannt sind. Das ist zu schaffen, indem man die Felder nach Basisfunktionen entwickelt. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned}\Delta\psi(x, y) &= \Delta \underbrace{\sum_{m,n=1}^{\infty} c_n \sin(m\pi x) \sin(n\pi y)}_{\equiv \psi(x,y)} \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} -(m^2 + n^2) c_n \sin(mx) \sin(ny).\end{aligned}\quad (10-1)$$

Damit sind die partiellen Ableitungen behandelt und man kommt insgesamt zu gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten  $c$ .

Eine weitere Möglichkeit zur Behandlung partieller Differentialgleichungen besteht in der Bildung Finiter Differenzen, etwa

$$\begin{aligned}\Delta\psi(x, y) &= \frac{\psi(x+h, y) + \psi(x-h, y) + \psi(x, y+h) + \psi(x, y-h) - 4\psi(x, y)}{h^2} \\ &\quad + O(h^2), \quad \text{oder in ökonomischer Schreibweise} \\ \Delta\psi_{ij} &= \frac{\psi_{(i+1)j} + \psi_{(i-1)j} + \psi_{i(j+1)} + \psi_{i(j-1)} - 4\psi_{ij}}{h^2} + O(h^2).\end{aligned}\quad (10-2)$$

Auch so kommt man zu gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Feldfreiheitsgrade  $\psi_{ij}$ .

Beide Verfahren sind hervorragend geeignet für Probleme mit einfachen Geometrien und einfachen Randbedingungen. Sind diese kompliziert, wächst der analytische und programmtechnische Aufwand schnell an und diese Lösungsmethoden werden unzumutbar.

Dann eignet sich die Methode der Finiten Elemente. Mit Hilfe so genannter Testfunktionen schreibt man die partiellen Differentialgleichungen um in Integralgleichungen und berechnet die Integrale näherungsweise auf vielen kleinen Teilgebieten. Insgesamt kommt man zu einem algebraischen Gleichungssystem für die diskreten Feldfreiheitsgrade.

Einige wichtige Vorteile des Verfahrens der Finiten Elemente sind:

- Die Geometrie des Integrationsgebietes ist so gut wie frei wählbar.
- Die Geometrie kann verändert werden, ohne dass andere Teile des Formalismus berührt werden.
- Dirichletsche und von Neumannsche Randbedingungen können kombiniert und leicht auch auf krummen Rändern in Kombination formuliert werden.
- Partielle Ableitungen der Felder können in vielen wichtigen Fällen durch partielle Integration auf Testfunktionen umgeschrieben und so analytisch ausgeführt werden.

Im Übrigen gibt es viele Methoden der Finiten Elemente und viel verschiedene Formulierungen. Wir werden uns im Folgenden auf eine spezielle Form beschränken, die auch in modernen, kommerziellen Computerprogrammen wie FEMLAB verwendet wird.

## Formulierung partieller Differentialgleichungen mit Finiten Elementen

### *Allgemeine Form einer partiellen Differential-Gleichung*

Wir betrachten zunächst eine einfache, partielle Differentialgleichung. Die Verallgemeinerung auf gekoppelte Gleichungen ist ohne weiteres möglich. Die Form der Gleichung ist generalisiert und alle oben in der Motivation aufgeführten physikalischen Beispiele können in diese Form gebracht werden.

Wir bezeichnen das Feld mit  $u$  und das Integrationsgebiet mit  $G$ . Dann kann die generalisierte partielle Differentialgleichung und ihre Randbedingungen in folgender Form angegeben werden:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_i D + \nabla \cdot \Gamma = F & \text{in } \Omega \quad (\text{Inhom. Kontinuitäts-Gl.}); \\ 0 = R & \text{auf } \partial\Omega \quad (\text{Dirichlet Randbed.}); \\ \underbrace{-\hat{n}}_{\substack{\text{Einheitsvektor} \\ \text{senkrecht auf } \partial\Omega}} \cdot \Gamma = G + \underbrace{(\partial_u R)}_{\substack{\text{Lagrange-} \\ \text{Multiplikator}}} \mu & \text{auf } \partial\Omega \quad (\text{von Neumann Randbed.}). \end{array} \right. \quad (10-3)$$

Die Funktionen  $D, \Gamma, F, R$  und  $G$  sind allgemeine Funktionen und hängen eventuell auch linear oder nichtlinear vom Feld  $u$  ab. Sie können in folgender Weise interpretiert werden:

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \overbrace{c \nabla u}^{\text{Erhaltener Strom}} + \underbrace{\alpha u}_{\text{Konvektion}} - \underbrace{\gamma}_{\text{Quelle}}, & F &= \underbrace{f}_{\text{Quelle}} - \underbrace{au}_{\text{Absorption}}, \\
 D &= \underbrace{d}_{\text{Masse}} u, & G &= \underbrace{g}_{\text{Rand-Quelle}} - \underbrace{qu}_{\text{Rand-Absorption}}.
 \end{aligned} \tag{10-4}$$

Dirichletsche Randbedingungen können unter anderem sein:

$$\begin{aligned}
 R = 0: & \quad \text{keine Dirichletsche Bedingung;} \\
 R = u: & \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial G; \\
 R = f - u: & \quad u = f \quad \text{auf } \partial G.
 \end{aligned} \tag{10-5}$$

Dirichletsche Randbedingungen beeinflussen immer auch den erhaltenen Strom  $\Gamma$  auf dem Rand  $\partial G$ . Ist zum Beispiel die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit am Rand  $v=0$ , also  $R=v=0$ , dann wirkt vom Rand eine Kraft auf die Flüssigkeit  $F = \mu \partial_u R = \mu$ , welche die Druck- und Reibungskräfte gerade kompensiert.

Die Stärke der Kraft bzw. des Lagrange-Parameters  $\mu$  muss so bestimmt werden, dass sich das Kräftegleichgewicht bei der richtigen Geschwindigkeit  $v=0$  einstellt.

In (10-3) sehen wir den entsprechenden Term in der von Neumannschen Randbedingung. Die Dirichletsche Randbedingung  $R$  wird nach dem Feld  $u$  abgeleitet und mit einem Lagrange-Multiplikator  $\mu$  so verstärkt, dass beide Randbedingungen kompatibel sind. Wie dieser Multiplikator  $\mu$  berechnet wird, sehen wir später.

### Integrale Form

Um zu Finiten Elementen zu kommen, wird die partielle Differentialgleichung in eine integrale Form gebracht. Dies geschieht mit Hilfe von Testfunktionen  $v$ . An diese Testfunktionen werden von vornherein keine speziellen Bedingungen gestellt, sie sollten lediglich stetig und differenzierbar sein. Aus dem weiteren Verlauf der Betrachtungen ergibt sich dann eine ganz natürliche Wahl dieser Funktionen.

Die Integrale Form der partiellen Differentialgleichung ist

$$\int_{\Omega} v (\partial_i D + \nabla \cdot \Gamma) dA = \int_{\Omega} v F dA. \tag{10-6}$$

Da diese Gleichung für jede beliebige Testfunktion gelten soll, ist sie äquivalent zur ursprünglichen Gleichung:

$$\int_{\Omega} v (\partial_t D + \nabla \cdot \Gamma - F) dA = 0 \quad \forall v \Rightarrow \partial_t D + \nabla \cdot \Gamma - F = 0. \quad (10-7)$$

In der integralen Form (10-6) können nun noch die von Neumannschen Randbedingungen verwertet werden. Dazu wird die Stromdivergenz partiell integriert:

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot \Gamma dA = \int_{\Omega} \nabla \cdot v \Gamma \cdot \hat{n} dA - \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot \Gamma dA \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial\Omega} v \underbrace{\Gamma \cdot \hat{n}}_{= -(G + \mu \partial_u R)} ds - \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot \Gamma dA. \quad (10-8)$$

Insgesamt liegt die Gleichung mit ihren Randbedingungen dann vor als

$$\begin{cases} 0 = \int_{\Omega} (-v \partial_t D + (\nabla v) \cdot \Gamma + v F) dA + \int_{\partial\Omega} v (G + \mu \partial_u R) ds, & \forall v \\ 0 = R & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (10-9)$$

Alle Randbedingungen sind berücksichtigt und die Ableitung des erhaltenen Stromes wurde auf die Testfunktion übertragen. Dies erweist sich oft als enormer numerischer Vorteil.

### Netz (mesh)

Um endlich zu Finiten Elementen zu kommen, wird das Integrationsgebiet  $G$  partitioniert:

$$G = \bigcup_{i=1}^{N(\text{Elemente})} G^{(i)}, \quad G^{(i)} \cap G^{(j)} = 0 \quad \forall i \neq j \in \mathbb{N}^{N(\text{Elemente})}. \quad (10-10)$$

Ein typisches Beispiel für ein Finites Element in 2 Dimensionen ist

$$\begin{aligned} G^{(i)} & \text{ als konvexe Hülle von } \{\vec{x}_1^{(i)}, \vec{x}_2^{(i)}, \vec{x}_3^{(i)}\}, \\ \vec{x} \in G^{(i)} : \quad \vec{x} &= \vec{x}_1^{(i)} + s(\vec{x}_2^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}) + t(\vec{x}_3^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}), \\ & \{s, t\} \in [0, 1], \quad s + t \leq 1. \end{aligned} \quad (10-11)$$

Das gesamte Integrationsgebiet  $G$  wird in  $N$  Dreiecke zerlegt, wie es auch in Abbildung 10-1 Mitte angedeutet ist.

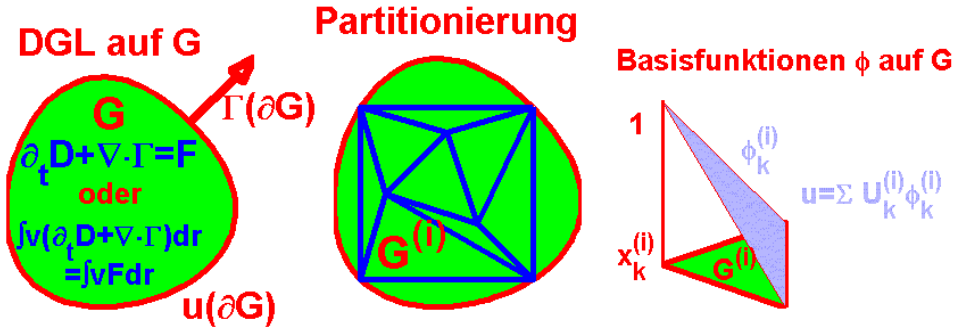


Abbildung 10-1

Schematische Darstellung des Vorgehens vom Umschreiben der partiellen Differentialgleichung in eine Integralgleichung auf dem Gebiet  $G$  (Links), der Partitionierung des Gebiets  $G$  (Mitte) und der Entwicklung des Felds  $u$  nach diskreten Freiheitsgrade  $U$  (Rechts):

### Finite Elemente

Der kontinuierliche Raum ist eine geniale Erfindung der griechischen Philosophen für mathematische Beweise und analytische Berechnungen. Ein solcher Raum existiert nirgends in der Natur und er eignet sich auch nicht für numerische Berechnungen. Wir gehen daher über zu diskreten Freiheitsgraden (DOF, 'degrees of freedom').

Mit Bezug auf (10-11) wählen wir

$$\text{für jedes Gebiet } G^{(i)} \text{ die Freiheitsgrade (DOF) } U_k^{(i)} = u(\vec{x}_k^{(i)}), k \in \{1, 2, 3\}. \quad (10-12)$$

Ferner wählen wir

$$\text{für jedes Gebiet } G^{(i)} \text{ die Basisfunktionen} \quad (10-13)$$

$$\varphi_k^{(i)} : \begin{cases} \varphi_k^{(i)}(\vec{x}_k^{(i)}) = 1, \\ \varphi_k^{(i)}(\vec{x}_l^{(i)}) = 0 \text{ für } l \neq k; \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \varphi_k^{(i)}(\vec{x}) \text{ stetig differenzierbar } \forall \vec{x} \in G^{(i)}, \\ \varphi_k^{(i)}(\vec{x}) = 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Oft nimmt man einfache Polynome als Basisfunktionen, zum Beispiel lineare:

$$\varphi_k^{(i)}(\vec{x}) = a_k^{(i)}x + b_k^{(i)}y + c_k^{(i)} = \left(A_{kl}^{(i)}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } A^{(i)} = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} & b_1^{(i)} & c_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} & b_2^{(i)} & c_2^{(i)} \\ a_3^{(i)} & b_2^{(i)} & c_3^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (10-14)$$

Um die drei Parameter  $a, b, c$  festzulegen, genügen dann genau die Funktionswerte jeder Funktion an den Ecken des jeweiligen Dreiecks. In zwei Dimensionen geht das so:

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(\vec{x}) &= A^{(i)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10-15) \\ \varphi_k^{(i)}(\vec{x}_k^{(i)}) &= \delta_{kk'} : \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(i)} & b_1^{(i)} & c_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} & b_2^{(i)} & c_2^{(i)} \\ a_3^{(i)} & b_2^{(i)} & c_3^{(i)} \end{pmatrix}}_{A^{(i)}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ y_1^{(i)} & y_2^{(i)} & y_3^{(i)} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv X^{(i)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A^{(i)} &= \left(X^{(i)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Mit (10-13) ist ein besonders eleganter Zusammenhang zwischen dem Feld  $u$  und den Freiheitsgraden  $U$  gegeben:

$$u(\vec{x}) = \sum_{i,k} U_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in G. \quad (10-16)$$

Diese Entwicklung muss im nächsten Schritt in die Integralgleichung (10-9) eingebracht werden.

### *Diskretisierung der Integralgleichung*

Als Testfunktionen  $v$  verwenden wir der Einfachheit halber die Basisfunktionen  $\varphi_k^{(i)}$  nach (10-13). Diese und die Entwicklung (10-16) sind nun in die Integralgleichung (10-9) einzusetzen. Dies ist etwas unübersichtlich und wird später für ein spezielles Problem, die Trommel, explizit durchgeführt. Strukturell ergibt sich folgendes:

$$\begin{array}{ll}
\text{Mit} & \vec{U} = (U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, \dots, U_k^{(i)}, \dots) \\
\text{folgen aus} & \left\{ \begin{array}{l} 0 = \int_{\Omega} (-v d \partial_t u + (\nabla v) \cdot \Gamma + v F) dA + \int_{\partial\Omega} v (G + \mu \partial_u R) ds \\ 0 = R \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad \forall v = \varphi_k^{(i)}, \\
\text{die Gleichungen} & \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{d(\vec{U}, t)}_{\text{mass matrix}} \partial_t \vec{U} = \underbrace{\bar{L}(\vec{U}, r)}_{\text{residual vector}} - \underbrace{N(\vec{U}, t)^t}_{\text{constraint matrix}} \underbrace{\vec{\Lambda}}_{\sim \mu \cdot \text{Längen-} \\ \text{elemente (s.u.)}}, \\ 0 = \underbrace{\vec{M}(\vec{U}, t)}_{\text{constraint residual}}. \end{array} \right.
\end{array}
\tag{10-17}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{wegen} & -\hat{n} \cdot \vec{\Gamma} = G + \mu \partial_u R \\
\text{ist dabei die 'constraint matrix'} & N = -\partial_u M.
\end{array}
\tag{10-18}$$

Die Integration über den Rand  $\partial G$  des Integrationsgebietes wird als Riemann-Summe ausgeführt, so dass sich der Vektor  $\Lambda$  aus Produkten der Lagrange-Multiplikatoren  $\mu$  und der Länge der Linienelemente zusammensetzt:

$$\Lambda_k^{(i)} = \mu_k^{(n)} \left| \vec{x}_k^{(i)} - \vec{x}_l^{(i)} \right| \quad \forall \vec{x}_k^{(i)}, \vec{x}_l^{(i)} \in \partial G.
\tag{10-19}$$

## Berechnung stationärer Lösungen, Eigenvektoren und Zeitentwicklungen

### *Lineare oder linearisierte stationäre Probleme:*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir unsere Betrachtungen nun für lineare Probleme fort. Nichtlineare Differentialgleichungen können linearisiert und mit Methoden wie dem Newton-Verfahren iterativ behandelt werden.

Durch Linearisierung erhalten wir aus (10-17) das (stationäre) Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \underbrace{K(\vec{U}_0)}_{\text{stiffness matrix}} (\vec{U} - \vec{U}_0) + N(\vec{U}_0)^t \vec{\Lambda} = \underbrace{\vec{L}(\vec{U}_0)}_{\text{load vector}}, \\ \text{mit } K \equiv -\partial_U \vec{L} \text{ (Jacobi-Matrix von } \vec{L}\text{)}, \\ N(\vec{U}_0)(\vec{U} - \vec{U}_0) = \vec{M}(\vec{U}_0), \end{cases} \quad (10-20)$$

und mit  $\vec{V} = \vec{U} - \vec{U}_0$ :

$$\begin{pmatrix} K & N^t \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{L} \\ \vec{M} \end{pmatrix}.$$

Wir erkennen ein lineares Gleichungssystem, das nun mit Standardmethoden (Standardprogrammen) gelöst werden kann. Sehr uninteressant sind die Lagrange-Multiplikatoren  $\mu$  bzw.  $\Lambda$ , die vor Lösen des Systems mit Standardmethoden eliminiert werden.

### Eigenwertprobleme

Im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen ist das Eigenwertproblem in zweierlei Hinsicht interessant. Die Eigenwerte geben Aufschluss über Stabilität oder Frequenzverhalten möglicher Lösungen und in der Eigenvektorbasis können auch Zeitentwicklungen sehr effizient berechnet werden. Alle Eigenvektoren erfüllen die Randbedingungen!

Das Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} K & N^t \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Lambda} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Lambda} \end{pmatrix} \quad (10-21)$$

kann mit Standardroutinen gelöst werden. Für das zeitabhängige Problem

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_t \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Lambda} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K & N^t \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{L} \\ \vec{M} \end{pmatrix} \quad (10-22)$$

ergibt sich die Zeitentwicklung einzelner Lösungen aus

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M \partial_t c^{(m)} \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Lambda} \end{pmatrix}^{(m)} &= - \sum_{m=1}^M c^{(m)} \begin{pmatrix} K & N^t \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Lambda} \end{pmatrix}^{(m)} + \begin{pmatrix} \vec{L} \\ \vec{M} \end{pmatrix} \\
\partial_t c^{(m)} &= -\lambda^{(m)} c^{(m)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{L} \\ \vec{M} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \vec{\Lambda} \end{pmatrix}^{(m)}}_{\equiv a^{(m)}} \\
c^{(m)}(t) &= -c_0 e^{\lambda^{(m)} t} + a^{(m)} / \lambda^{(m)}.
\end{aligned} \tag{10-23}$$

Die Eigenvektoren sind unter der Zeitentwicklung

$$\begin{aligned}
\text{stabil für} & \quad \lambda^{(m)} < 0, \\
\text{stationär für} & \quad \lambda^{(m)} = 0, \\
\text{labil für} & \quad \lambda^{(m)} > 0, \\
\text{oszillatorisch für} & \quad \lambda^{(m)} \in \mathbb{C}.
\end{aligned} \tag{10-24}$$

Durch Superposition der Eigenvektoren können auch komplexere Zeitentwicklungen analysiert und berechnet werden.

### *Zeitentwicklungen nichtlinearer Probleme*

Bei nichtlinearen Problemen koppeln die einzelnen Moden (Eigenvektoren) miteinander und das vorgestellte Verfahren ist nicht immer praktikabel. Dann integriert man die Gleichung (10-17) direkt mit Verfahren wie dem von Euler oder Runge-Kutta.

## **Kann man die Form einer Trommel hören?**

Diese Frage wurde zum ersten Mal 1966 von M.Kac gestellt [KAC92]. Als konkrete, relativ einfache Anwendung der FE-Methode wollen wir ihr nun nachgehen. Der vorgestellte Formalismus ist durchaus praktikabel und wird von Physikstudenten in unserem Praktikum in wissenschaftlichem Rechnen in wenigen Nachmittagen in eine funktionsfähige Computersoftware umgesetzt.

Das Schwingungsverhalten einer Membran (oder Trommel) wird im einfachsten Fall durch die Schwingungsgleichung

$$\partial_t^2 u(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) \tag{10-25}$$

beschrieben.  $u$  ist dabei die so genannte Verschiebung der Membrane in  $z$ -Richtung [LAND89].

Entsprechend (10-23) steht das Frequenzspektrum dieses Systems in engem Zusammenhang mit den Eigenwerten  $\lambda^{(j)}$  des Laplace-Operators

$$\Delta u^{(i)}(x, y, t) = \lambda^{(i)} u^{(i)}(x, y, t). \quad (10-26)$$

Wegen der zweifachen zeitlichen Ableitung in (10-25) sind die Eigenwerte  $\lambda$  hier mit den Quadraten der Eigenfrequenzen verknüpft:  $\lambda^{(i)} = \left(\omega^{(i)}\right)^2$ . Die Masse  $d$  und der erhaltene Strom  $\Gamma$  der Differentialgleichung (10-3) ergeben sich aus der Schreibweise

$$\frac{1}{d} \lambda u - \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}}_{\Gamma} = \underbrace{0}_F. \quad (10-27)$$

Am Rand kann die Membran entweder

$$\text{frei schwingen:} \quad R = 0, \quad \rightarrow \quad -\hat{n} \cdot \underbrace{\Gamma}_G = \underbrace{0}_G, \quad \text{oder} \quad (10-28)$$

$$\text{festgehalten werden:} \quad R = u \quad \rightarrow \quad -\hat{n} \cdot \underbrace{\Gamma}_G = \underbrace{0}_G + \mu.$$

Für die frei schwingende Membran reduziert sich die Integralgleichung (10-9) (inklusive der Randbedingungen) auf

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-v \lambda u + (\nabla v) \cdot \Gamma) dA &= 0, \quad \forall v, \quad \text{bzw.} \\ \int_{\Omega} (-v \lambda u + (\partial_x v)(\partial_x u) + (\partial_y v)(\partial_y u)) dA &= 0. \end{aligned} \quad (10-29)$$

Entwickelt in die Basis (10-14) ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left\{ -\underbrace{\varphi_k^{(i)}}_v \lambda \underbrace{\sum_l \varphi_l^{(i)} U_l^{(i)}}_u + \underbrace{(\partial_x \varphi_k^{(i)})}_{\partial_x v} \underbrace{\left( \sum_l \partial_x \varphi_l^{(i)} U_l^{(i)} \right)}_{\partial_x u} + \underbrace{(\partial_y \varphi_k^{(i)})}_{\partial_y v} \underbrace{\left( \sum_l \partial_y \varphi_l^{(i)} U_l^{(i)} \right)}_{\partial_y u} \right\} dA \\ &= \sum_l \int_{\Omega} \underbrace{\left\{ -\varphi_k^{(i)} \lambda \varphi_l^{(i)} + \underbrace{(\partial_x \varphi_k^{(i)})}_{=A_{k1}^{(i)}} \underbrace{(\partial_x \varphi_l^{(i)})}_{=A_{l1}^{(i)}} + \underbrace{(\partial_y \varphi_k^{(i)})}_{=A_{k1}^{(i)}} \underbrace{(\partial_y \varphi_l^{(i)})}_{=A_{l2}^{(i)}} \right\}}_{=\lambda D_{kl}^{(i)} - K_{kl}^{(i)}} dA U_l^{(i)}. \end{aligned} \quad (10-30)$$

Wir entwickeln nun die Integranden wieder in die Basis (10-14) und finden für die Massenmatrix  $D$  und die Steifheitsmatrix  $K$  die relativ einfachen Ausdrücke

$$\begin{aligned}
D_{kl}^{(i)} &= - \int_{\Omega^{(i)}} \varphi_k^{(i)} \varphi_l^{(i)} dA = - \sum_{l'} \varphi_k^{(i)} \varphi_l^{(i)} \Big|_{\vec{x}_{l'}^{(i)}} \int_{\Omega^{(i)}} \varphi_{l'}^{(i)} dA \quad (10-31) \\
&= - \sum_{l'} \underbrace{\varphi_k^{(i)}(\vec{x}_{l'}^{(i)})}_{=\delta_{kl'}} \underbrace{\varphi_{l'}^{(i)}(\vec{x}_{l'}^{(i)})}_{=\delta_{ll'}} \underbrace{\int_{\Omega^{(i)}} \varphi_{l'}^{(i)} dA}_{\substack{= \frac{1}{3} \frac{g^{(i)}}{2} \forall l' \\ \text{(siehe Anhang)}}} \\
&= - \frac{1}{3} \frac{g^{(i)}}{2} \delta_{kl}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
K_{kl}^{(i)} &= - \int_{\Omega^{(i)}} \left\{ A_{k1}^{(i)} A_{l1}^{(i)} + A_{k2}^{(i)} A_{l2}^{(i)} \right\} dA = - \left\{ A_{k1}^{(i)} A_{l1}^{(i)} + A_{k2}^{(i)} A_{l2}^{(i)} \right\} \underbrace{\int_{\Omega^{(i)}} dA}_{\substack{= \frac{g^{(i)}}{2} \\ \text{(siehe Anhang)}}} \quad (10-32) \\
&= - \left\{ A_{k1}^{(i)} A_{l1}^{(i)} + A_{k2}^{(i)} A_{l2}^{(i)} \right\} \frac{g^{(i)}}{2}.
\end{aligned}$$

Für die Integrationen wurden die Ergebnisse aus dem Anhang verwendet.

Zu lösen ist nun im Prinzip das lineare Problem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} A_{11}^{(1)} + A_{12}^{(1)} A_{12}^{(1)} & A_{11}^{(1)} A_{21}^{(1)} + A_{12}^{(1)} A_{22}^{(1)} & A_{11}^{(1)} A_{31}^{(1)} + A_{12}^{(1)} A_{32}^{(1)} & 0 & \dots \\ A_{21}^{(1)} A_{11}^{(1)} + A_{22}^{(1)} A_{12}^{(1)} & A_{21}^{(1)} A_{21}^{(1)} + A_{22}^{(1)} A_{22}^{(1)} & A_{21}^{(1)} A_{31}^{(1)} + A_{22}^{(1)} A_{32}^{(1)} & 0 & \dots \\ A_{31}^{(1)} A_{11}^{(1)} + A_{32}^{(1)} A_{12}^{(1)} & A_{31}^{(1)} A_{21}^{(1)} + A_{32}^{(1)} A_{22}^{(1)} & A_{31}^{(1)} A_{31}^{(1)} + A_{32}^{(1)} A_{32}^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_{11}^{(2)} A_{11}^{(2)} + A_{12}^{(2)} A_{12}^{(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_K \begin{pmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_1^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_1^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (10-33)$$

Diese Gleichung muss allerdings noch reduziert werden, da jeder Freiheitsgrad  $U_n$  ja zwei bis dreimal als Eckpunkt  $U_l^{(i)}$  verschiedener Elemente  $G^{(i)}$  in Er-

scheinung tritt. Diese Reduktion geschieht mit einer Transformationsmatrix  $T$ . Wie folgt, erhält man  $T$  direkt aus der Beschreibung der Finiten Elemente.

Die Finiten Elemente werden beschrieben durch die einzelnen

$$\text{Stützpunkte } \vec{x}_n, \quad n \in \{1 \dots N^{(\text{Stütz})}\} \quad (10-34)$$

und der

$$\text{Zuordnungsmatrix } tri : (i, k) \rightarrow tri(i, k) = n, \quad \text{mit} \quad (10-35)$$

$$\text{Elementindex} \quad i \in \{1 \dots N^{(\text{Elemente})}\},$$

$$\text{Eckindex} \quad k \in \{1 \dots 3\},$$

$$\text{Stützpunktindex} \quad n \in \{1 \dots N^{(\text{Stütz})}\}, \quad N^{(\text{Stütz})} = \max(tri).$$

Die gesuchte Transformationsmatrix hat dann die Elemente

$$T_{3(i-1)+k, n} = \delta_{tri(i, k), n} \quad (10-36)$$

und das Eigenwertproblem wird zu

$$\tilde{K}\vec{U} = \tilde{\lambda}\vec{U}, \quad \text{mit } \tilde{K} = T^t K T \quad \text{und } \tilde{\lambda} = \lambda / 3. \quad (10-37)$$

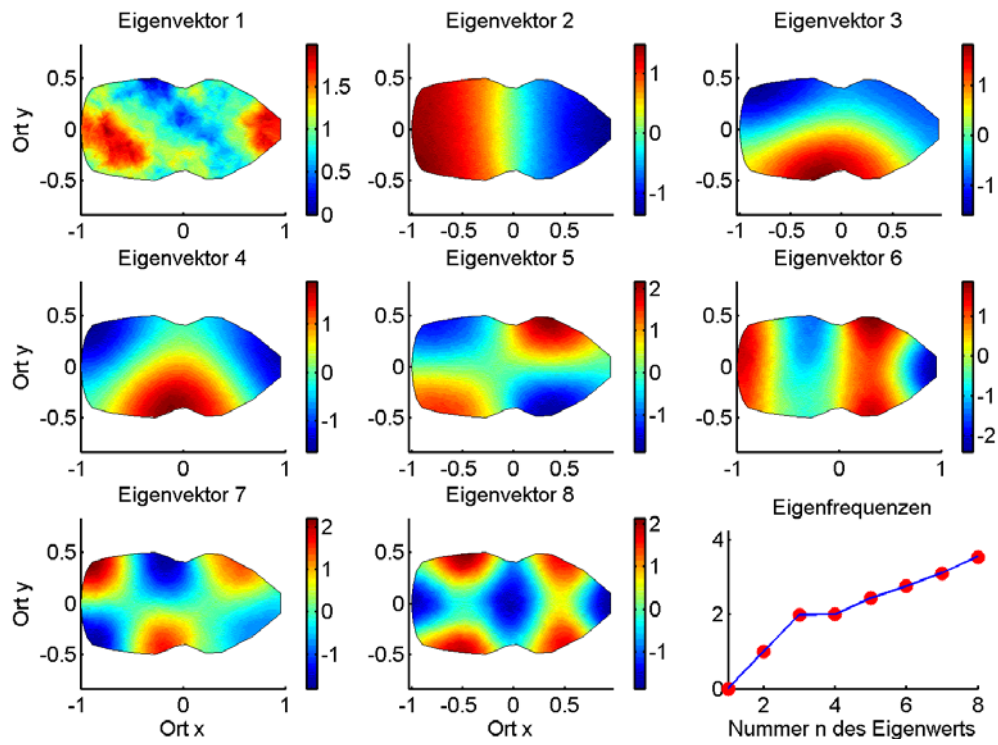


Abbildung 10-2

Eigenvektoren und Eigenwerte der schwingenden Membrane mit (etwas willkürlicher) Violinenform.

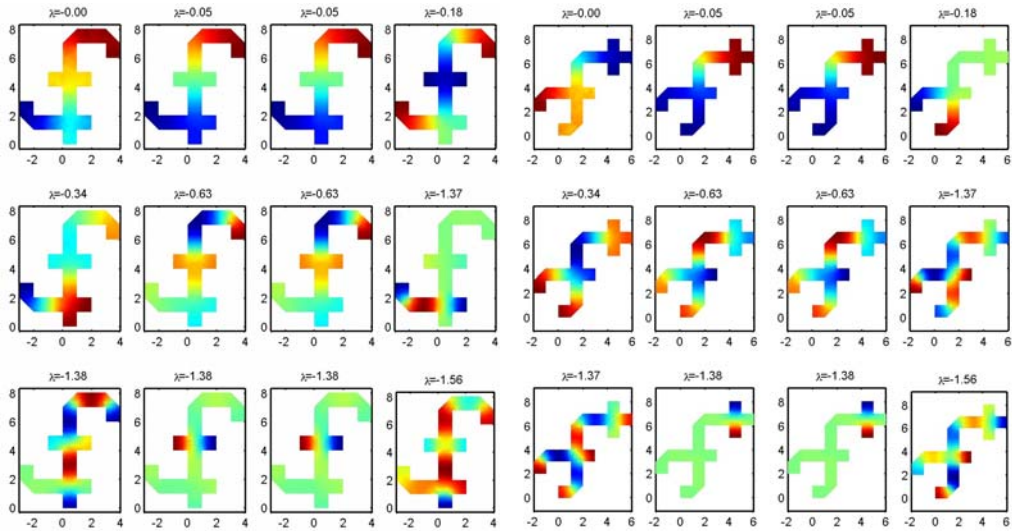


Abbildung 10-3

Schwingungsmoden und Eigenwerte zweier verschiedener Trommeln. Die Eigenwerte  $\lambda$  und damit die Frequenzen beider Trommeln sind identisch. Obwohl sich ihre Form unterscheidet, können sie nicht an ihrem Spektrum oder Klang unterschieden werden. Die Trommeln haben natürlich in gewissem Sinn auch in ihrer Form eine große Ähnlichkeit miteinander.

## Anhang Integrationen

*Definition des Flächenelements:*

$$\begin{aligned} \vec{x} \in G^{(i)} : \quad \vec{x} &= \vec{x}_1^{(i)} + s(\vec{x}_2^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}) + t(\vec{x}_3^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}), \\ \{s, t\} &\in [0, 1], \quad s + t \leq 1. \end{aligned} \quad (10-38)$$

*Invariantes Flächenelement:*

$$\begin{aligned} dA &= dx \wedge dy = (x_s ds + x_t dt) \wedge (y_s ds + y_t dt) = (x_s y_t - x_t y_s) ds \wedge dt \\ &= \underbrace{\left( (x_2^{(i)} - x_1^{(i)})(y_3^{(i)} - y_1^{(i)}) - (x_3^{(i)} - x_1^{(i)})(y_2^{(i)} - y_1^{(i)}) \right)}_{=g^{(i)}} ds \wedge dt. \end{aligned} \quad (10-39)$$

*Fläche eines Netzes:*

$$I_i^{(c)} \equiv \int_{G^{(i)}} dA = \int_0^1 \underbrace{\left( \int_0^{1-t} g^{(i)} ds \right)}_{=1-t} dt = \left( t - \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{g^{(i)}}{2}. \quad (10-40)$$

*Integral über Koordinaten:*

$$\begin{aligned} \int_{G^{(i)}} \vec{x} dA &= g^{(i)} \int_0^1 \left( \int_0^{1-t} \left( \vec{x}_1^{(i)} + s(\vec{x}_2^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}) + t(\vec{x}_3^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}) \right) ds \right) dt \\ &= g^{(i)} \underbrace{\vec{x}_1^{(i)} \int_0^1 \left( \int_0^{1-t} ds \right) dt}_{=1-t} + g^{(i)} (\vec{x}_2^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}) \underbrace{\int_0^1 \left( \int_0^{1-t} s ds \right) dt}_{=\frac{1}{2}(1-t)^2} + g^{(i)} (\vec{x}_3^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}) \underbrace{\int_0^1 t \left( \int_0^{1-t} ds \right) dt}_{=1-t} \\ &= g^{(i)} \underbrace{\vec{x}_1^{(i)} \int_0^1 (1-t) dt}_{\left( t - \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}} + g^{(i)} (\vec{x}_2^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}) \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 dt}_{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} t^3 - t^2 + t \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}} + g^{(i)} (\vec{x}_3^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}) \underbrace{\int_0^1 t(1-t) dt}_{\left( \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}} \\ &= \frac{g^{(i)}}{6} \left( 3\vec{x}_1^{(i)} + (\vec{x}_2^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}) + (\vec{x}_3^{(i)} - \vec{x}_1^{(i)}) \right) = \frac{g^{(i)}}{2} \frac{\vec{x}_1^{(i)} + \vec{x}_2^{(i)} + \vec{x}_3^{(i)}}{3} = \frac{g^{(i)}}{2} \langle \vec{x}^{(i)} \rangle. \end{aligned} \quad (10-41)$$

*Integral über Basisfunktion*

$$\begin{aligned}
\int_G \varphi_k^{(i)}(x) dA &= \int_{G^{(i)}} \left( A_{k1}^{(i)} x^{(i)} + A_{k2}^{(i)} y^{(i)} + A_{k3}^{(i)} \right) dA \\
&= \int_{G^{(i)}} \left( A_{k1}^{(i)} x^{(i)} + A_{k2}^{(i)} y^{(i)} + A_{k3}^{(i)} \right) dA = \frac{g^{(i)}}{2} \left( A_{k1}^{(i)} \langle x^{(i)} \rangle + A_{k2}^{(i)} \langle y^{(i)} \rangle + A_{k3}^{(i)} \right) \\
&= \frac{g^{(i)}}{2} \frac{1}{3} \left( A_{k1}^{(i)} (x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + x_3^{(i)}) + A_{k2}^{(i)} (y_1^{(i)} + y_2^{(i)} + y_3^{(i)}) + A_{k3}^{(i)} (1+1+1) \right) \\
&= \frac{g^{(i)}}{2} \frac{1}{3} \underbrace{\left( A_{k1}^{(i)} \quad A_{k2}^{(i)} \quad A_{k3}^{(i)} \right) \left\{ \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ y_1^{(i)} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ y_2^{(i)} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3^{(i)} \\ y_3^{(i)} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\delta_{k1} + \delta_{k2} + \delta_{k3} = 1} \\
&= \frac{1}{3} \frac{g^{(i)}}{2} \forall k.
\end{aligned}$$

(10-42)



# 11. Referenzen

- ATMA95 Atmanspacher H, Primas H, Wertenschlag-Birkhäuser E.(Hrsg.) 'Der Pauli-Jung-Dialog und seine Bedeutung für die moderne Wissenschaft', Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork 1995
- BENE80 Benequ JP, Ibler B, Keraimis A, Labadie G 'A finite element method for the Navier-Stokes eq.' In Norries ed. 1110-1120, Pentech Press 1980
- BRÄU00 Bräuer K 'Die fundamentalen Phänomene der Quantenmechanik und ihre Bedeutung für unser Weltbild', Logos Verlag Berlin 2000
- BRÄU02 Bräuer K 'Chaos, Attraktoren und Fraktale - Grundlagen nichtlinearer Phänomene in Physik, Biologie und Medizin', Logos-Verlag Berlin 2002
- BRÄU04 Bräuer K 'Gewahrsein, Bewusstsein und Physik', Logos-Verlag Berlin 2004
- FISC02 Fischer MC, Gutiérrez-Medina B, Raizen MG 'Observation of the Quantum Zeno and Anti-Zeno effects in an Unstable System', Physical Review Letters 87, 040402 (2001)
- FRAN90 Franz M-L 'Zahl und Zeit – Psychologische Überlegungen zu einer Annäherung von Tiefenpsychologie und Physik', Klett Cotta Stuttgart 1990
- JACO87 Jacobi J 'Die Psychologie von C.G. Jung', Fischer-Taschenbuch-Verl. Frankfurt am Main 1987
- JAYN97 Jaynes J 'The Origin of Consciousness in the Breakdown of the Bicameral Mind', Houghton Mifflin Company, Boston 1976
- Jaynes J 'Der Ursprung des Bewusstseins', Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg 1997
- JUNG52 Jung CG, Pauli W 'Naturerklärung und Psyche', Rascher Verlag Zürich 1952
- KAC66 Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 27, No. 1, July 1992
- LAND89 Landau-Lifschitz VII: 'Elastizitätstheorie', Akademie-Verlag Berlin 1989
- LIBE91 Libet B 'Conscious vs. Neural time', Nature 352, S 27, 1991
- MAIN94 Mainzer K 'Thinking in Complexity - The Complex Dynamics of Matter, Mind, and Mankind', Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork, 3. Auflage 1997
- NORR97 Norretranders T 'Spüre die Welt – Die Wissenschaft des Bewusstseins', Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg 1997
- PIRO89 Pironneau O, 'Finite Element Methods for Fluids', John Wiley & Sons, 1989
- RIEK02 Rieckers A, Bräuer K, 'Einladung zur Mathematik', Eine mathematische Einführung und Begleitung zum Studium der Physik und Informatik'
- SCHW95 Schwenk T 'Das sensible Chaos – strömendes Formenschaffen in Wasser und Luft', Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1995
- SHEL81 Sheldrake R 'Das schöpferische Universum - Die Theorie des morphogenetischen Feldes', aus dem englischen von W. Landmann und K. Wessel, Ullstein, Frankfurt/M, Berlin 1993
- SHEL88 Sheldrake R 'Das Gedächtnis der Natur - Das Geheimnis der Entstehung der Formen in der Natur', aus dem englischen von Jochen Eggert, Scherz-Verlag, Bern, München, Wien 1. Auflage 1990
- SHEL92 Sheldrake R, McKenna T, Abraham R 'Denken am Rande des Udenkbaren – Über Ordnung und Chaos, Physik und Metaphysik, Ego und Weltseele', aus dem Englischen von H.U. Möhring, Scherz Verlag, Bern, München, Wien, 2. Auflage 1993

- SHEL94      Sheldrake R 'Sieben Experimente, die die Welt verändern könnten – Anstiftung zur Revolutionierung des wissenschaftlichen Denkens', aus dem englischen von Jochen Eggert, Scherz-Verlag, Bern, München, Wien 3. Auflage 1994
- VERH94      Verhulst J 'Der Glanz von Kopenhagen: geistige Perspektiven der modernen Physik', Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1994

# 12. Index

- Ampere-Gesetz 110, 111
- Anima ix
- Äquipotentiallinien 113, 114
- Arbeit 6, 13
- Archetypen ix, 14, 15, 107, 138
- Aristoteles xiv, 9, 30, 68, 70, 138
- Aristotels 5
- Atmanspacher 161
- atomaren Strukturen xiv, 39
- Ausbreitungsgeschwindigkeit vi, 8, 17, 18, 19, 20, 24, 53, 58, 87, 94, 95, 96, 97, 98, 107
- Bahnkurve 5, 6, 19, 20, 35, 36, 37, 86
- Beharrungsvermögen 127, 138
- beleuchtetes Objekt 93
- Beobachtungsraum 97
- Bewegungsenergie vi
- Bewegungsgleichung 17, 18, 30, 41, 45, 57, 58
- Bewegungslosigkeit xiv, 6, 30, 70
- Bewusstsein viii, x, xi, xii, xiii, xiv, xv, 15, 16, 35, 49, 68, 93, 99, 107, 138, 139, 140
- Bewusstseinsinhalte vi, x, xi, xiii, 29, 30, 79, 107, 108
- Bewusstseinsphänomene 14
- Bewusstseinsraum vii, x, 97, 99
- Bezugspunkt x, 1, 2, 8, 18, 30, 94, 95, 96
- Bezugssystemen 8, 18, 19, 20
- biologischen Morphogenese 126
- Computersimulation xvii
- Computersoftware 11
- COMSOL xvii
- Coulomb-Gesetz 110, 111
- Coulomb-Potential 109
- Denken 161
- Detektor 22, 71, 84, 85, 86, 94
- Diagramm xiii
- Dichtefeldes 55, 115
- Differential 38, 143, 145
- Differentialgleichungen 22, 30, 117, 143, 144, 145, 150, 151
- Diffusion 55, 77, 81, 82, 115
- dingliche Welt 31
- Dipolfeld 112, 114
- Dirichletsche 145, 146
- Dirichletsche Randbedingungen 146
- Diskretisierung der Integralgleichung 149
- Doppelspaltexperiment 54, 86, 139
- Druckfeld 66
- Dualismus 9, 55
- Ego 161
- Eichbosonen 109
- Eichfeld 30, 31
- Eichfreiheitsgrade 32, 35, 39, 50, 88, 91, 94, 108, 110, 122
- Eichinvarianz 108, 109
- Eigenmoden 45
- Eigenwertproblem 45, 89, 151, 155
- Eigenzeit 100, 101
- Einfluss trüber Flüssigkeiten 133
- Einstein-Relation 101
- Eisenfeilspäne 93
- elastische Festkörper 32, 35, 67
- elastischen Platte 45, 47, 48
- elastisches Medium 40
- Elastizitätstheorie 39, 107
- Elektrodynamik v, xvi, 20, 35, 50, 94, 108, 109, 110, 112, 143
- elektromagnetischen Feldern v, 93
- Elektron 22, 84
- Elektronenröhre 22
- Elementarteilchen 93
- Emission xvii, 114, 118, 121
- Energie 1, 6, 7
- Energiefeld 17
- Energiefunktion 18, 20, 23, 32, 96, 102, 103, 107, 109, 129
- Energie-Impuls-Beziehung 101, 102
- Energieniveaus 115
- Erbsünde xvi
- erkennen ix, x, xii, xv, xviii
- Erscheinung vii, x, xvi, 16, 21, 22, 63, 71, 83, 107, 108, 114, 121, 155
- Euklid xiv, 2, 68
- Euler-Methode 37
- Existentielle Fragen xiv

- Experiment 162
- Extremalprinzip 38
- Exzerpte viii
- Federwaage 3, 4
- Feld xiii
- Feldfreiheitsgrade 144
- Feldlinien xiii, 93, 113, 114
- FEMLAB xvii
- Finite Elemente 9, 10, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 155
- Flächenelement 158
- Flugbahn 35
- Form 128
- Form einer Trommel 152
- Form- und Gestaltbildung 138
- Formen xvi, 125, 126, 127, 133, 137, 138, 139, 140
- Formenwelt 129
- freier Fall 36
- Freiheitsgrade vi, 31, 94, 116, 117, 118, 121, 148, 149
- Galilei-Invarianz 18
- Galilei-Transformation 98
- Ganzheitliches 5
- Gedächtnis viii, 94, 138, 139, 140
- Gedächtnisinhalte xi, xiii
- Gehirn vii, viii, xii, 49, 127
- Gene 125, 126
- Genesis xvi
- Geometrie xvii, 9, 115, 118, 145
- Gesetzmäßigkeit v, vi
- Gewahrsein xiii, 107
- Glanz von Kopenhagen 139
- Glaube xiv
- Gleichgewicht vi
- Gott xv, xvi
- Gotteserfahrung xv
- Göttlich xv
- GPS 99
- Grundgesetze der Physik 16, 49
- Grundgrößen der Physik 13
- Hamilton-Jakobi-Gleichung 22, 23, 143
- Hamiltonsche Prinzip 37, 38, 41
- Höhenlinien 19, 24, 38, 114
- Homogenität xvi, 102
- Hookeschen Gesetz 3, 4
- Hydrodynamik xvi
- idealen Punkt 122
- Illusionismus 79
- Impuls 1, 6, 7
- Impulsfeld 17, 25, 42, 59, 71, 83
- Individualität ix, xv
- Induktionsgesetz 111
- Infinitesimalrechnung 9, 30, 70
- Inkompressibilität 52
- Inkompressible Flüssigkeiten 59
- Integral über Basisfunktion 158
- Interferenzmuster 21, 84, 85, 86
- invariante Masse 101
- Invariante Zeit 100
- Invarianz 8
- Jaynes xii
- Jung ix, xii, 14, 15, 107, 138, 139, 140, 161
- Karmansche Wirbelstraße 132, 133
- Kausalität xii, xvii, 14, 16, 18, 49, 50, 126
- Kettenregel 129
- klassische Mechanik xiv
- Klassische Mechanik 35, 107, 143
- klassischen Physik 9, 27, 86, 126
- Klein-Gordon-Gleichung 103, 104, 105, 143
- Kompression 40
- kontextabhängig vii, 68, 93
- Kontextunabhängigkeit 7, 19, 22, 49, 72, 107, 121, 127, 129, 138
- Kontinuität xvi, xvii, 30, 31, 49, 50, 57, 67, 86, 87, 94, 102, 104, 109, 110, 112, 127, 129, 134
- Kontinuitätsgleichung xvii, 31, 50, 51, 52, 53, 57, 59, 73, 80, 103, 105, 109, 110, 122, 135
- Koordinaten 1
- Koordinatensystem x, 1, 3, 18, 30, 94, 96
- körperlich xv
- Kraft v, vii, xii, xiii, xvii
- Kraftfeld xiii, 4, 5, 10, 37
- Kultur x, 9
- Ladungsstrom 52
- Lagrange-Parameter 146
- laminar 59, 60, 61
- Lebensdauer 99
- Libet vii, 49
- Licht vii, 35, 71, 93, 94
- Lichtgeschwindigkeit 8, 94, 118
- Lichtkegel vi, 97, 98, 100
- Lichtphänomene 93, 108
- Lichtquanten xvii, 93

- Lichtsignal vi, 8, 30, 93, 94, 95, 96, 98, 107  
 Lichtstrahlen 93  
 Lichtteilchen 93, 123  
 Lichtwellen 93  
 Lorentz-Bedingung 110  
 Lorentz-Eichung 111  
 Lorentz-Invarianz 18  
 Lorentz-Transformation 8, 96, 97, 98, 99  
 Magnet xii  
 Magnetismus 35  
 Mainzer 126  
 makroskopisch vi  
 Manifestation 139, 140  
 Masse v, x, 1, 4, 7, 18, 20, 23, 51, 99, 107, 153  
 Massenmatrix 153  
 Massepunkt ix, 1  
 Maßstab x, xii, 1, 2, 8, 18, 67, 70, 94  
 Materialspannungen 39  
 Materie v, vi, x, xii, xvi, xvii, 19, 20, 29, 32, 33, 39, 49, 51, 53, 57, 67, 107, 126, 127, 129, 130, 138, 139, 140  
 materielle Existenz vii  
 Materiestrom 52  
 Maxwell xvi, 8, 50, 94, 109, 110, 111, 143  
 Maxwell-Gleichungen xvi, 8, 50, 94, 109, 110, 111, 143  
 Mechanische Grundgleichungen 39  
 Menschenbild xiv  
 Menschheitsgeschichte ix  
 Messen v, 3, 14  
 Methode der Finiten Elemente xvii, 11, 22, 143, 144  
 mittleren Radius 116, 117, 121  
 moderne Physik vi, xvi, 7  
 Morphogenese xvii, 59, 66, 125, 126, 139  
 Moses xv  
 Myonen 99  
 Naiver Realismus vi  
 Natur v, ix, x, xvi, 2, 5, 7, 27, 29, 30, 42, 59, 93, 94, 99, 107, 122, 125, 126, 127, 128, 137, 138, 140, 148, 161  
 Naturkonstanten xiv, 6, 15, 31, 67, 122  
 Navier-Stokes-Gleichung 59, 129, 135, 143  
 Navigationssystem 99  
 Nervenimpulse viii  
 Newton xv, 5, 150  
 nichtlineare Phänomene 42  
 Nichtlinearität xvi, 42, 58, 127, 129, 138, 139, 140  
 Nichtlokalität 9  
 no slip 61  
 Nüsslein-Volhard 125  
 Objekte vii, viii, ix, x, xv, 1  
 Objektivität viii, x, xiv, xvi, xvii, xviii  
 Objektivitätsforderung 31  
 Ordnung 161  
 Ordnungsstrukturen xii, 14, 15, 107, 138, 140  
 Organformen 127  
 Organismen 125, 128  
 Ortsdarstellung 115  
 Paradies xv, 140  
 Pauli 139, 161  
 Phänomen v, vi, vii, xvii, 8, 26, 29, 32, 33, 35, 54, 55, 67, 70, 83, 84, 86, 87, 94, 96, 99, 107, 112, 123, 127  
 Photonen 93, 114  
 Photons 118, 121  
 Physik 161, 162  
 physikalischem Illusionismus 93  
 Plancksche Wirkungsquantum 6  
 Planckschen Wirkungsquantums xiv  
 Plancksches Wirkungsquantum xiv, 6, 15, 22, 67, 71, 72, 122  
 Potential 21, 27, 28, 30, 31, 32, 39, 41, 57, 58, 72, 112, 114, 122  
 Primas 161  
 Psyche 161  
 Punkt x, xiii, xiv, 2, 5, 6, 10, 19, 25, 29, 30, 42, 69, 71, 107, 122  
 Punktladung vii  
 Punktmechanik 38  
 Pythagoras xiv, 68  
 Qualle xvi, 42, 127, 128, 136, 137, 138  
 Quanteninterferometer 139  
 Quantenmechanik vii, viii, xiv, xvi  
 Quantenobjekt vii  
 Quantensprung 55, 85, 86, 139  
 Quantenwellenfunktion xiv, 115, 116, 122  
 Quanten-Zenon-Effekt xiv, 70  
 Quanten-Zeon-Effekt 5  
 Quelle 21, 22, 23, 27, 28, 30, 85, 87, 90, 91, 94, 105, 107, 116, 118, 119, 122, 123, 126

- Randbedingung xvii, 43, 88, 110, 122, 133, 144, 145, 146, 147, 151, 153  
 Randfunktionen 23  
 Raum v, vi, vii, ix, x, xi, xii, xiii, xiv, xv  
 Raumkasten xv, xvi  
 Raumkoordinaten xi  
 Raummessung xi, 2, 5  
 Raummessungen 2, 5  
 Raumpunkt vi, 2  
 Raumpunkte 2  
 Reelle Zahlen 9  
 Regenbogen vii  
 Regenbogenfarben vii  
 Reibungsfeld 57  
 Reibungskräfte 27, 146  
 Relativbewegung 18, 19  
 relativistischer Energiesatz 100  
 Relativität 32, 91  
 Relativitätstheorie viii, xiv, xvi  
 Reynolds-Zahl 60, 61, 63  
 Rohrströmung 59, 60, 61, 137  
 Rotationsfeldern 111  
 Ruhemasse 101  
 Ruhesystemen 96  
 Saint-Venants Flachwassergleichungen 133  
 Satellitengestützte Navigationssystem 8, 99  
 satellitengestützten Navigationssystemen 8  
 Schatten ix  
 Scheerung 40  
 Schwenk 127, 133, 138, 161  
 Schwingungsverhalten xvii, 45, 152  
 Selbstorganisation xvi, 33, 59, 66, 125, 126, 127, 128, 137, 138  
 Selbstorganisation der Materie 59, 126, 128  
 Sheldrake 125, 161, 162  
 Signalverarbeitung 49  
 Sinneseindrücke vii, viii, 49  
 Sonnenuhren 2  
 Spannungs- und Reibungskräften xvi  
 Spannungsenergie 13  
 Spannungspotential 39, 40, 41, 57  
 Sprunghaftigkeit 49  
 Steifheitsmatrix 153  
 Stoß xii, 13, 16  
 Strömung hinter einer Stufe 61, 63  
 Strömungen 128  
 strukturbildender Mechanismen 128  
 Strukturmechanik xvi, 27, 58, 143  
 strukturmechanischen 11, 58  
 Teilchenphysik 35  
 Teilchenwellendualismus 55  
 Temperatur vi  
 Testfunktionen 144, 145, 146, 149  
 Tiefenpsychologe 107, 139  
 Tiefenpsychologie ix, 14, 15  
 Tod xv  
 Torsion 40  
 träge Masse x, 19, 20, 101  
 Tragfläche 64, 66  
 Trägheit v, xiii, 7, 20, 63, 107, 138  
 Trajektorie 37  
 Transformationsformel 8  
 Turmbauer zu Babel xiv  
 Universum 161  
 Unschärfe xiv, xvi, 8, 9, 21, 22, 27, 30, 32, 35, 39, 54, 55, 68, 71, 72, 74, 78, 79, 87, 88, 107, 122, 138, 139, 140  
 Unschärfepotential 31, 72, 75, 87, 103  
 Unus mundus 15, 138, 140  
 Urknall xvi  
 Ursache xii, xiii, 14, 16, 18, 21, 28, 30, 49, 50, 53, 59, 71, 72, 73, 74, 94, 121, 122  
 Ursprung 1, 58, 107, 108  
 Variationsproblem 38  
 Verhulst 139, 162  
 Verschiebungsfeld 39, 48, 58  
 Verzerrungen 39, 40, 98, 99  
 Verzerrungsfeld 39, 40, 57  
 Verzerrungstensorfeld 39  
 Vierergeschwindigkeit 100  
 Viererimpuls 101  
 Vierervektoren 97, 100  
 Volumenelement 35, 42, 59  
 von Neumannsche 145, 146, 147  
 von Neumannschen Randbedingung 146, 147  
 Wahrscheinlichkeitsdichte 21, 50  
 Wahrscheinlichkeitsfeld 30, 31, 72, 74, 76, 79, 83, 84, 85, 86, 87, 90, 91, 122  
 Wahrscheinlichkeitsstrom 52, 104, 105  
 Wechselwirkung 27, 31, 32, 39, 68, 88, 108, 122  
 Weg-Zeit-Koordinatensystemen 3  
 Wellen- und Teilchen 55  
 Wellen-Teilchen-Dualismus 9

- Welt 162  
 Weltbild vi, viii, x, 70, 126  
 Welterfahrung viii, ix, xiii, xv, 29, 30, 49, 69, 127  
 Weltseele 161  
 Wertenschlag-Birkhäuser 161  
 Windkanal 64  
 Winkelgeschwindigkeiten 46  
 Wirbel 42, 61, 63, 127, 128, 131, 132, 133  
 Wirbelbildung 60, 61, 63  
 Wirkung v, xii, xiii, xiv, xvi, xvii, 1, 6, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 37, 38, 39, 41, 49, 50, 53, 57, 58, 63, 67, 68, 71, 72, 78, 84, 85, 86, 87, 88, 91, 94, 95, 96, 100, 105, 107, 108, 109, 114, 115, 116, 118, 119, 121, 122, 123, 129, 140  
 Wirkungsfeld xiii, 17, 23, 26, 28, 30, 31, 35, 37, 50, 76, 78, 79, 85, 86, 101, 107, 108, 112, 115  
 Wirkungsfelder xiii  
 Wirkungsgeschwindigkeit 107  
 Wirkungsquantum 15, 22, 31, 67, 71, 74, 79, 81, 82, 83, 87, 121  
 Wirkungsquellen 53, 88  
 Wirkungsstrom 52, 53, 116, 122  
 Wissen viii, xiv  
 Wurmlöcher xiv  
 Yang-Mills Eichfeldern 109  
 Zahlen 1  
 Zeit vii, ix, x, xi, xii, xiii, xv  
 Zeitentwicklung 23, 28, 46, 48, 117, 151, 152  
 Zeitkoordinaten xi, 7, 8, 21, 96  
 Zeitmessung xi, 2, 5, 9  
 Zeitmessungen 2  
 Zeitreisen xiv  
 Zenon xiv, 5, 9, 30, 68, 69, 138  
 Zwillingsparadoxons 98