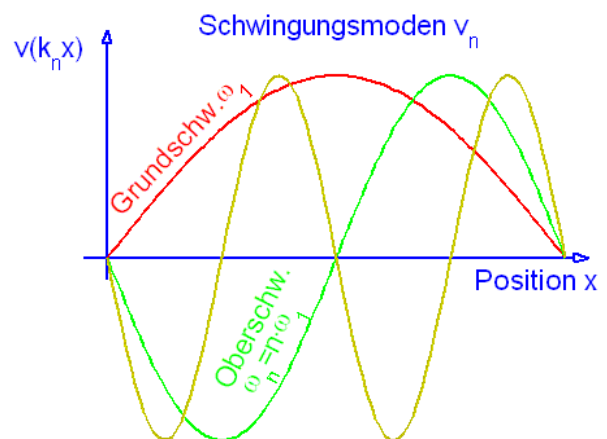
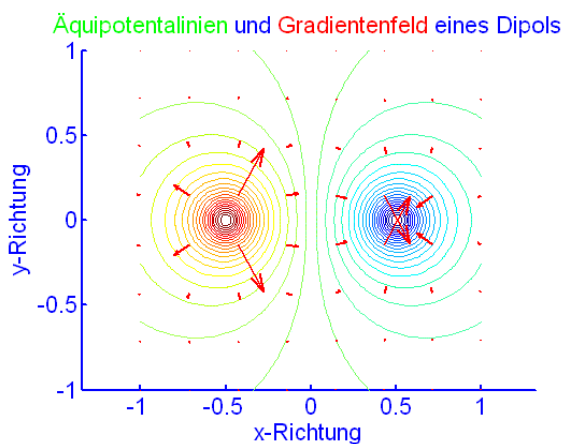
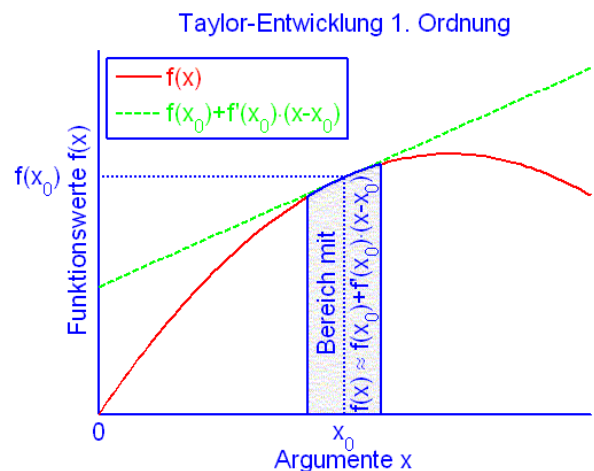
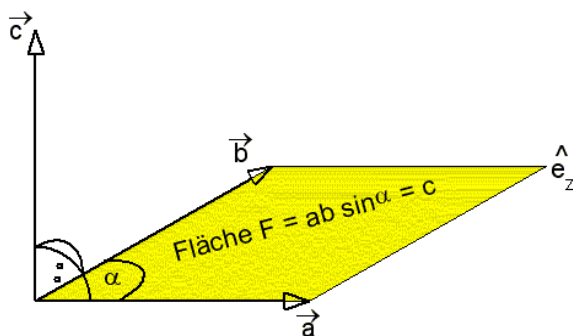


Ergänzungsvorlesung zur Physik II

Universität Tübingen
Sommersemester 2008
(Vorlesungsaufschrieb)



Vorwort

Das vorliegende Manuskript basiert auf der 'Ergänzungsvorlesung zur Physik II' im Sommersemester 2007 und wurde im Sommersemester 2008 korrigiert und erweitert.

Ziel der Vorlesung ist es, Studenten den Einstieg ins Physikstudium auch im Sommersemester zu ermöglichen. Es werden vorwiegend die mathematischen Inhalte der Vorlesung 'Physik I' aus dem Wintersemester behandelt. Den Studienanfänger soll damit ermöglicht werden, der Vorlesung 'Physik II' folgen und auch an den 'Übungen zur Physik II' erfolgreich teilnehmen zu können.

Tübingen, den 30. Juni 2008

Kurt Bräuer

Letzte Korrektur: 8. Juli 2010, 8. Fourier-Transformation

Inhalt

1. Raum und Koordinatensysteme	1
2. Vektorfunktionen.....	9
3. Felder.....	13
4. Krummlinige orthogonale Koordinaten.....	31
5. Komplexe Zahlen.....	43
6. Gewöhnliche Differentialgleichungen	47
7. Partielle Differentialgleichungen (Wellengleichung).....	59
8. Fourier-Transformation.....	63
9. Krummlinige Koordinaten Ergänzung.....	63

1. Raum und Koordinatensysteme

Messgrößen in der Physik

Messen geschieht zunächst durch Vergleich mit einem Maßstab. Messbare Grundgrößen der klassischen Mechanik sind räumliche Abstände, zeitliche Abstände und Kräfte.

Interessant ist, dass auch zeitliche Abstände und Kräfte zunächst über Ortsmessungen durchgeführt werden (Lauf der Gestirne, Sanduhr, Pendeluhr, Quarzuhr, ...; Federwaage,...).

Andere physikalische Größen werden indirekt gemessen (Ladung, Massen, ...).

(Strom oder Spannung misst man beim Spuleninstrument auch über räumliche Lageveränderung des Zeigers).

Raumerfahrung und Objektivierung des Raumes

Raum ist Grundlage unserer bewussten Welterfahrung. Alle Bewusstseinsinhalte sind räumlich angeordnet (massive Objekte, aber auch Gedanken und Gefühle).

1. Stufe der Raumerfahrung (Kleinkind)

Topologie (Nachbarschaft: neben- hinter- übereinander).

2. Stufe der Raumerfahrung (Schulkind)

Objektivierung der Raumerfahrung durch Messung:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Maßstab } e : & (\text{beliebiges Objekt}) \\ \text{Koordinaten } x : & \text{Strecke } L = x \cdot e \end{array} \right\} \quad (1-1)$$

3. Stufe der Raumerfahrung (Erwachsener)

3-dimensionaler, relativer Raum:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Richtungsmaßstäbe (Basis) } \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z : & \\ \text{Koordinaten } x, y, z : & \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{3D-Bezug zwischen zwei Punkten } P_1, P_2: \\ \vec{R}^{(P_1, P_2)} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \end{array} \quad (1-2)$$

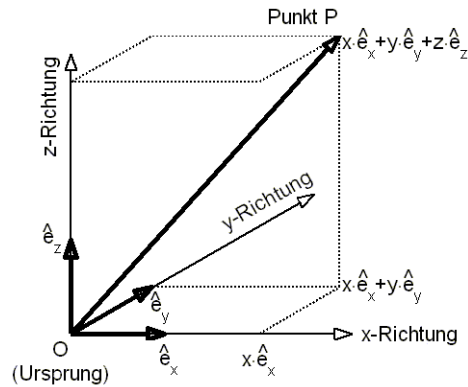
4. Stufe der Raumerfahrung (Erwachsener)

3-dimensionaler, absoluter Raum (Raum als unabhängiger Behälter für Objekte, Raum wird selbst zum Objekt):

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Richtungsmaßstäbe (Basis) } \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z : & \\ \text{Koordinaten } x, y, z : & \\ \text{Bezugspunkt } \vec{O} : & \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Absoluter Punkt im Raum:} \\ \vec{P} \equiv \vec{R}^{(P, O)} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \end{array} \quad (1-3)$$

Objektivierte (quantifizierte) räumliche Bezüge -> Objektiver Raum

Bild des Raumes wird Bewusstseinsinhalt, objektive Welt wird in objektivem Raum erlebt.



Punkt P im absoluten Raum, dargestellt mit Basisvektoren e und Koordinaten x, y, z

Abb. 1-1

Vektoren

Richtungen sollen unabhängig voneinander sein:

$$\text{Neue Schreibweise: } \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z \rightarrow \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \quad (1-4)$$

Inneres Produkt oder Skalarprodukt:

$$\underbrace{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}_{\substack{\text{Inneres Produkt} \\ \text{oder} \\ \text{Skalarprodukt}}} = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Kroneckersches -Deltasymbol}} \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } i = j; \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Durch das innere Produkt \cdot werden die Richtungsmaßstäbe zu Basisvektoren.

Basistransformationen

Die Basisvektoren sind nicht eindeutig, man kann den mathematisch beschriebenen Raum ja verschieben, drehen und stauchen. Die Beziehung zwischen zwei Punkten P_1, P_2 wird davon jedoch nicht beeinflusst.

$$\vec{R}^{(P_1, P_2)} = \underbrace{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}_{\text{ursprünglicher Raum}} = \underbrace{x'\hat{e}_{x'} + y'\hat{e}_{y'} + z'\hat{e}_{z'}}_{\text{transformierter Raum}}. \quad (1-5)$$

Einen Vektor kennzeichnet man durch einen Pfeil.

Lineare Transformation T (Basistransformation):

$$\text{Basistransformation: } \hat{e}'_i = \sum_{k=1}^3 T_{ik} \hat{e}_k \quad (1-6)$$

Bedingung:

$$\delta_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \sum_{k,l=1}^3 T_{ik} \hat{e}_k \cdot T_{jl} \hat{e}_l = \sum_{k,l=1}^3 T_{ik} \underbrace{\hat{e}_k \cdot \hat{e}_l}_{=\delta_{kl}} T_{jl} = \sum_{k=1}^3 T_{ik} T_{jk}$$

also:

$$\sum_{k=1}^3 T_{ik} T_{jk} = \delta_{ij}$$

T beschreibt eine so genannte Basistransformation, genau dann, wenn (1-6) erfüllt ist.

Daraus ergibt sich auch, wie die Koordinaten transformiert werden müssen.

aus:
$$\sum_{i=1}^3 x'_i \hat{e}'_i = \sum_{i,k=1}^3 x'_i T_{ik} \hat{e}_k = \sum_{k=1}^3 x_k \hat{e}_k \quad (1-7)$$

folgt:
$$x_k = \sum_{i=1}^3 x'_i T_{ik}$$

oder umgekehrt:
$$x'_j = \sum_{i=1}^3 x'_i \underbrace{\delta_{ij}}_{\sum_{k=1}^3 T_{ik} T_{jk}} = \sum_{j,k=1}^3 x'_i T_{ik} T_{jk} = \sum_{k=1}^3 T_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^3 x'_i T_{ik}}_{x_k} = \sum_{k=1}^3 T_{jk} x_k$$

Beispiel: Austausch zweier Achsen

Transformationsmatrix:
$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-8)$$

Bedingung für Basis-Tranf.
$$\begin{cases} T_{1j} T_{j1} = 0 + 1 + 0 = 1, \\ T_{2j} T_{j2} = 1 + 0 + 0 = 1, \\ T_{3j} T_{j3} = 0 + 0 + 1, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Transformierte Koordinaten:
$$\begin{cases} x'_1 = 0 \cdot x_1 + T_{12} \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = x_2 \\ x'_2 = T_{21} \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = x_1 \\ x'_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + T_{33} \cdot x_3 = x_3 \end{cases}$$

Schreibweise:

Es ist oft nicht nötig, die Basisvektoren mit aufzuschreiben, man definiert

Koordinatentripels:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z. \quad (1-9)$$

Damit kann man etwa schreiben

$$\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1-10)$$

Die \hat{e}_i bezeichnet man als 'Basis des Kartesischen Koordinatensystems'. Es gibt auch 'Krummlinige Koordinanten'. Wichtig werden vor allem Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten (Kapitel 4).

Rechenregeln:

Alle Regeln folgen unmittelbar aus der Definition der Basisvektoren

Addition

$$\text{für } \vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} \equiv (b_1, b_2, b_3): \quad (1-11)$$

Addition:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 + b_1)\hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\hat{e}_{3z} \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3); \end{aligned}$$

Subtraktion:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3);$$

Kommutativgesetz:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

Assoziativgesetz:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Multiplikation mit Skalar

$$\text{Multiplikation mit Skalar: } \lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3); \quad (1-12)$$

$$\text{Distributivgesetz: } \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b};$$

$$\text{Assoziativgesetz: } (\lambda \mu) \vec{a} = \lambda(\mu \vec{a}).$$

Skalarprodukt zwischen Vektoren:

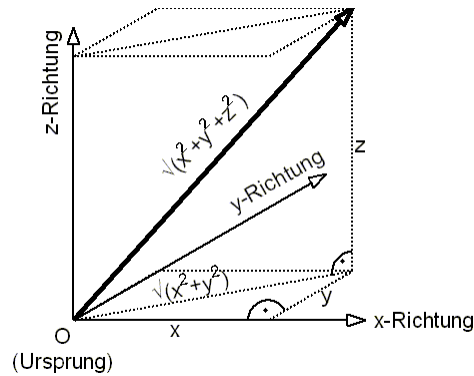
Das Skalarprodukt '·' wurde in (1-4) für Basisvektoren eingeführt. Daraus folgt allgemein

$$\text{Skalarprodukt: } \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3) \cdot (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3) \quad (1-13)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \underbrace{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}_{\delta_{ij}} \\ &= a_1 b_1 \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1}_1 + a_1 b_2 \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}_0 + \dots + a_3 b_2 \underbrace{\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2}_0 + a_3 b_3 \underbrace{\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3}_1 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = \underbrace{a_i b_i}_{\substack{\text{Einsteinsche} \\ \text{Summen-} \\ \text{konvention}}} . \end{aligned}$$

Länge eines Vektors:

$$\text{Länge: } r \equiv |\vec{r}| \equiv \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{(x, y, z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1-14)$$



Geometrische Interpretation der Länge eines Vektors nach (1-14) und dem pythagoreischen Lehrsatzes.

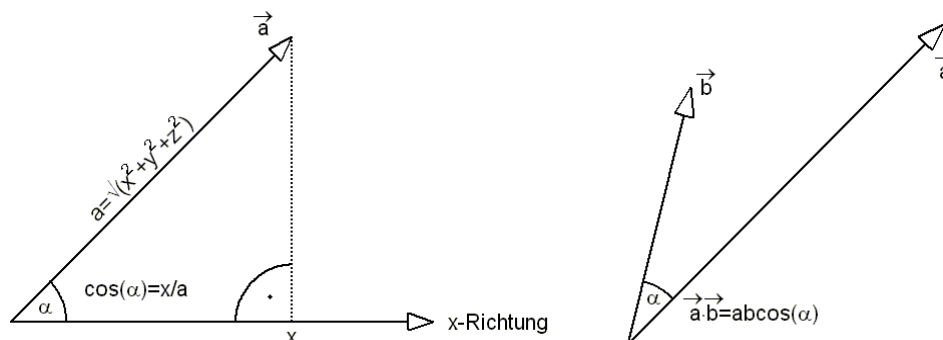
Abb. 1-2

Interpretation des Skalarprodukts zwischen zwei Vektoren:

Projektion auf x-Achse: $\vec{a} \cdot \hat{e}_x = a_x = a \cos \alpha;$ (1-15)

Für Vektor \vec{b} in x-Richtung: $\vec{a} \cdot (\underbrace{b\hat{e}_x}_{\vec{b}}) = ab \cos \alpha;$

Unabhängig vom Koordinatensystem: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha.$



Skalarprodukt als Produkt der Vektorenlängen und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

Abb. 1-3

Kreuzprodukt oder Vektorprodukt:

Hilfsgröße

Antisymmetrischer Fundamental-
tensor oder Levi-Civita-Tensor:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk \text{ zyklisch (123,231,312);} \\ -1 & \text{für } ijk \text{ antizyklisch (321,213,132);} \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases} \quad (1-16)$$

also $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ (antisymmetrisch)

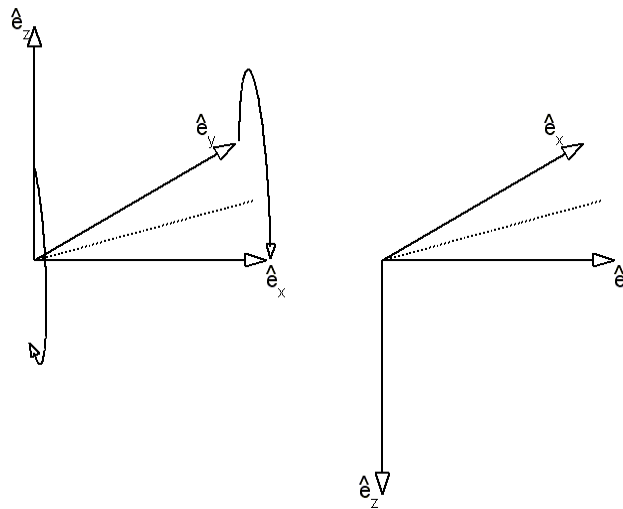
und $\varepsilon_{iik} = -\varepsilon_{iik} = 0.$

Definition: $\hat{e}_i \times \hat{e}_j \equiv \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$ (mit Einsteinscher Summenkonvention. (1-17)
also Summation über k);

z.B.: $\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z$, $\hat{e}_y \times \hat{e}_z = \hat{e}_x$, $\hat{e}_x \times \hat{e}_z = -\hat{e}_y$, $\hat{e}_x \times \hat{e}_x = 0$.

Symmetrie:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = -\hat{e}_j \times \hat{e}_i \quad (\text{antisymmetrisch}). \quad (1-18)$$



Symmetrie des Kreuzproduktes. Austausch der Faktoren führt zu Vorzeichenwechsel des Ergebnisses (antisymmetrisch).

Abb. 1-4

Kreuzprodukt zwischen Vektoren:

$$\text{Kreuzprodukt: } \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i \hat{e}_i \times b_j \hat{e}_j = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \underbrace{\hat{e}_i \times \hat{e}_j}_{\epsilon_{ijk} \hat{e}_k} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}. \quad (1-19)$$

Betrag des Kreuzproduktes:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b})^2 &= \sum_{i,j,k,m,n,o=1}^3 (\varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k) \cdot (\varepsilon_{mno} a_m b_n \hat{e}_o) = \sum a_i a_m b_j b_n \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mno} \underbrace{\hat{e}_k \cdot \hat{e}_o}_{\delta_{ko}} \\
 &= \sum a_i a_m b_j b_n \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk}}_{\substack{\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \\ (\text{zykl.} - \text{zykl.} \quad \text{zykl.} - \text{antiz.} \\ \text{antizykl.} - \text{antiz.}) \quad \text{antiz.} - \text{zykl.})}} = \sum \underbrace{a_i a_i}_{a^2} \underbrace{b_j b_j}_{b^2} - \underbrace{a_i b_i a_j b_j}_{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 (\cos \alpha)^2} \\
 &= a^2 b^2 \underbrace{(1 - (\cos \alpha)^2)}_{(\sin \alpha)^2};
 \end{aligned}
 \tag{1-20}$$

also: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha \quad \text{für } \alpha \in [0, \pi].$

Richtung des Kreuzprodukts:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b} \tag{1-21}$$

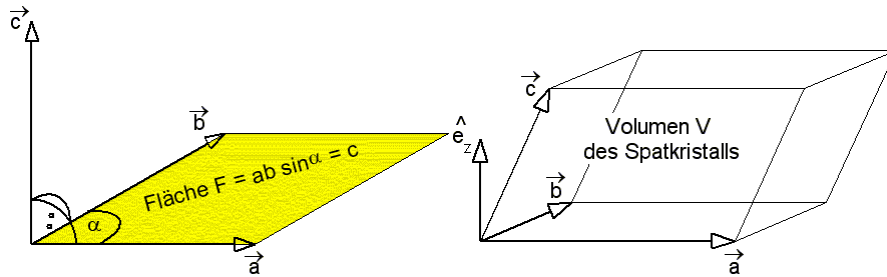
da:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{c} &= \sum a_i \hat{e}_i \cdot \varepsilon_{jkl} a_j b_k \hat{e}_l \\
 &= \sum a_i a_j b_k \varepsilon_{ijk} \stackrel{\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}}{=} - \sum a_i a_j b_k \varepsilon_{jik} \\
 &= - \sum a_j a_i b_k \varepsilon_{jik} \stackrel{\substack{\text{Umbenennung} \\ i \rightarrow j, \quad j \rightarrow i}}{=} - \sum a_i a_j b_k \varepsilon_{ijk};
 \end{aligned}$$

also $\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{c}}_{x=-x \Rightarrow x=0} = -\vec{a} \cdot \vec{c} = 0,$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = ac \cos \alpha = 0, \quad \alpha = \pi / 2 \quad (\text{rechter Winkel});$$

analog: $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$



Der Betrag des Kreuzproduktes zweier Vektoren a, b entspricht der Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms (1-21). Das Spatprodukt dreier Vektoren a, b, c entspricht dem Volumen des aufgespannten Spatkristalls (1-22).

Abb. 1-5

Spatprodukt

$$\text{Volumen des Spatkristalls: } \underbrace{V}_{\text{Volumen}} = \underbrace{F}_{\text{Fläche}} \underbrace{h}_{\text{Höhe}}; \quad (1-22)$$

$$\text{'Orientierte Fläche': } \vec{a} \times \vec{b} = F \hat{e}_z;$$

$$\text{Höhe: } \hat{e}_z \cdot \vec{c} = h;$$

$$\text{Volumen=Spatprodukt: } V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = Fh = F \hat{e}_z \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Hinweis: Das Koordinatensystem wurde geeignet gewählt!

Determinantenschreibweise des Spatprodukts

$$\begin{aligned} \text{Spatvolumen: } V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \sum_{i,j,k=1}^3 (-1)^P a_i b_j c_k \\ &\equiv \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1-23)$$

$$\text{mit } (-1)^P \equiv \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen (i,j,k) von (1,2,3);} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen (i,j,k) von (1,2,3);} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Vektorfunktionen

Vektorfunktionen sind Vektoren, wobei jede Komponente eine Funktion von der Zeit, der Bogenlänge oder sonst einem Parameter ist.

Bahnkurven

Bahnkurven sind die Grundlage der klassischen Mechanik (Hamiltonsches Prinzip).

Es sind Idealisierungen, sie sind nicht beobachtbar!

Jedem Objekt (Massepunkt, Punkt in kontinuierlicher Masseverteilung) wird zu jedem Zeitpunkt t ein Ort $\vec{r}(t)$ zugeordnet.

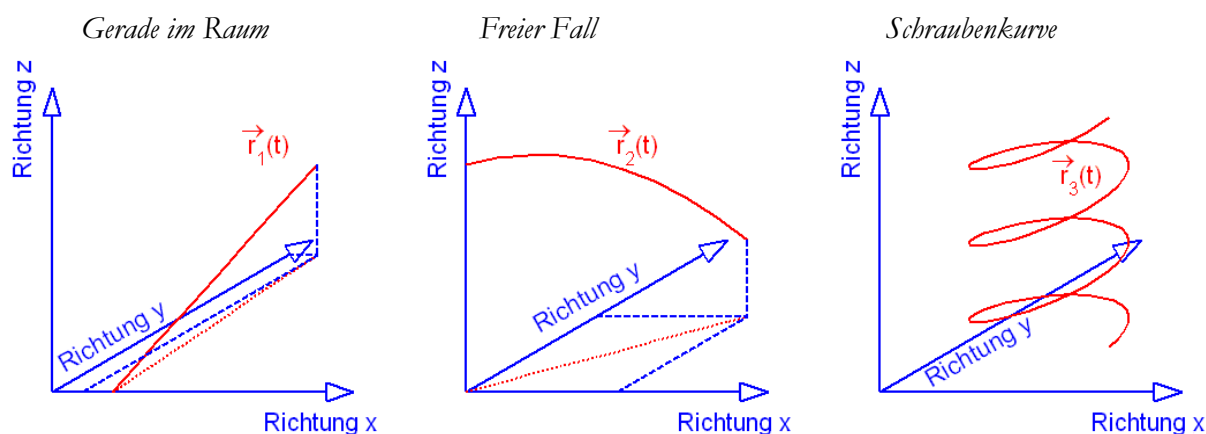
Der Ort $\vec{r}(t)$ kann nicht beliebig genau gemessen werden. Er ist eine Idee, keine physikalische Realität (alle Messverfahren haben eine beschränkte Genauigkeit).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maßstab } e: \quad (\text{beliebiges Objekt}), \\ \text{Koordinaten } x: \quad \text{Strecke } L = \underbrace{x}_{\text{Meßgröße}} \cdot \underbrace{e}_{\text{Konvention}} \end{array} \right\} \quad (2-1)$$

Beispiele für Bahnkurven (s ist Bahnparameter, z.B. Zeit t , Bogenlänge, ...)

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Gerade im Raum:} & \text{Freier Fall:} & \text{Schraubenkurve:} \\ \hline \vec{r}_1(s) = \vec{r}_0 + \vec{v}s & \vec{r}_2(s) = \begin{pmatrix} v_x s \\ v_y s \\ z_0 - \frac{1}{2} g s^2 \end{pmatrix} & \vec{r}_3(s) = \begin{pmatrix} r_0 + r \cos(s) \\ r_0 + r \sin(s) \\ v_z s \end{pmatrix} \end{array} \quad (2-2)$$

Unter Umständen entspricht v der Geschwindigkeit.



Verschiedene Bahnkurven im dreidimensionalen Raum.

Abb. 2-1

Stetigkeit von Bahnkurven

Es gilt für eine beliebige Funktion f :

$$f: \underbrace{\mathbb{D}}_{\text{Definitions-}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Ziel-}} \text{ ist stetig in } x_0, \text{ genau dann, wenn zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ ein } \delta > 0 \quad (2-3)$$

existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{D}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

oder

$$f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2-4)$$

Für Vektorfunktionen:

$$\vec{f}(x) = \sum_{i=1}^3 f_i(x) \hat{e}_i \text{ ist stetig, wenn alle Koordinaten} \quad (2-5)$$

(oder Vektorkomponenten) $f_i(x)$ stetig sind.

Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \vec{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{i=1}^3 f_i(x) \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 f_i(x_0) \hat{e}_i = \vec{f}(x_0). \quad (2-6)$$

Ableitung vektorwertiger Funktionen

Ableitung nach dem Bahnparameter:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}(x)}{dx} &\equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x + \Delta x) - \vec{f}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{(f_i(x + \Delta x) - f_i(x))}{\Delta x} \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{df_i(x)}{dx} \hat{e}_i \\ &= \underbrace{\left(\frac{df_1(x)}{dx}, \frac{df_2(x)}{dx}, \frac{df_3(x)}{dx} \right)}_{\text{Zeilenvektor}}. \end{aligned} \quad (2-7)$$

Der Vektor $\frac{d\vec{f}(x)}{dx}$ liegt in x tangential an der Kurve an. Die Bahnkurve ändert sich ja genau in Richtung der Bahnkurve.

Höhere Ableitungen:

$$\frac{d^n \vec{f}(x)}{dx^n} \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} \vec{f}(x)}{dx^{n-1}} \right) \quad (\text{rekursive Definition}). \quad (2-8)$$

Geschwindigkeitsvektor

Für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ (Ort als Funktion der Zeit) ist (2-9)

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \text{ die Geschwindigkeit des Objekts zur Zeit } t.$$

Messbar sind jedoch immer nur mittlere Geschwindigkeiten $\langle \vec{v} \rangle \equiv \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$.

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \text{Summenregel: } \frac{d}{dx}(\vec{a} + \vec{b}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx}(a_i + b_i) \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx} a_i \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx} b_i \hat{e}_i \\ &= \frac{d}{dx} \vec{a} + \frac{d}{dx} \vec{b}, \end{aligned} \quad (2-10)$$

$$\begin{aligned} \text{Produktregel 1: } \frac{d}{dx}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^3 a_i b_i = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{d}{dx} a_i \right) b_i + \sum_{i=1}^3 a_i \left(\frac{d}{dx} b_i \right) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \vec{a} \right) \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \left(\frac{d}{dx} \vec{b} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Produktregel 2: } \frac{d}{dx}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} \left(\frac{d}{dx} a_i \right) b_j \hat{e}_k + \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i \left(\frac{d}{dx} b_j \right) \hat{e}_k \\ &= \left(\frac{d}{dx} \vec{a} \right) \times \vec{b} + \vec{a} \times \left(\frac{d}{dx} \vec{b} \right), \end{aligned}$$

$$\text{Produktregel 3: } \frac{d}{dx}(a \vec{b}) = \left(\frac{d}{dx} a \right) \vec{b} + a \left(\frac{d}{dx} \vec{b} \right),$$

$$\text{Kettenregel: } \frac{d}{dx} \vec{a}(b(x)) = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx} a_i(b(x)) \hat{e}_i = \frac{d\vec{a}(b)}{db} \frac{db(x)}{dx},$$

$$\text{Quotientenregel: } \frac{d}{dx} \frac{\vec{a}}{b} = \frac{1}{b} \left(\frac{d}{dx} \vec{a} \right) - \frac{1}{b^2} \left(\frac{d}{dx} b \right) \vec{a}.$$

Tangentenvektor, Normalenvektor und Krümmung

Bogenlänge:

$$\text{Für die Bogenlänge } s \text{ gilt: } ds = |d\vec{r}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{dr_i(s)}{ds} \right)^2} ds. \quad (2-11)$$

Dann ist der

$$\text{Einheitstangentenvektor } \hat{t} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}. \quad (2-12)$$

Wie oben begründet liegt jede Ableitung der Bahnkurve nach dem Kurvenparameter im entsprechenden Punkt parallel an der Kurve an. Ferner ist nach (2-11), also nach der Definition der Bogenlänge s

$$|\hat{t}| = \left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right| = 1. \quad (2-13)$$

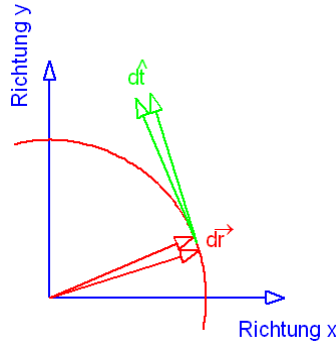
Der Tangentialvektor bleibt bei kleinen Änderungen von s in Tangentialrichtung gleich 1 (Normierung) er ändert sich genau senkrecht zur Tangente, also ist der

$$\text{Einheitsnormalenvektor } \hat{n} = \underbrace{\left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right|^{-1}}_{\text{Normierung}} \frac{d\hat{t}(s)}{ds}. \quad (2-14)$$

Krümmung:

Krümmung: $\kappa \equiv \left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right|$ ist ein Maß für die Krümmung der Raumkurve; (2-15)

Krümmungsradius: $\rho = \frac{1}{\kappa}$.



Die Änderung des Ortsvektors $d\vec{r}$ tangiert in \propto die Kurve und definiert so den Tangentialvektor \hat{t} . Die Änderung des Tangentialvektors $d\hat{t}$ steht in \propto senkrecht auf der Kurve.

Abb. 2-2

Beispiel:

Kreisbahn mit Radius R : $\vec{r}(s) = (R \cos(f(s)), R \sin(f(s)), 0)$, (2-16)

Bestimmung von f : $d\vec{r}(s) = \underbrace{(-\sin(f(s)), \cos(f(s)), 0)}_{\text{Betrag: } \sqrt{(\sin(f(s)))^2 + (\cos(f(s)))^2} = 1} R f'(s) ds$

$$|d\vec{r}(s)| = |R f'(s) ds| = ds \Rightarrow f = \frac{s}{R},$$

also:

$$\vec{r}(s) = R \left(\cos\left(\frac{s}{R}\right), \sin\left(\frac{s}{R}\right), 0 \right);$$

Tangentialvektor:

$$\hat{t} = \vec{r}'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right), 0 \right);$$

Normalenvektor:

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{1}{\kappa} \hat{t}' = -\frac{1}{\kappa R} \left(\cos\left(\frac{s}{R}\right), \sin\left(\frac{s}{R}\right), 0 \right) \\ &= -\left(\cos\left(\frac{s}{R}\right), \sin\left(\frac{s}{R}\right), 0 \right) = -\frac{\vec{r}(s)}{R}; \end{aligned}$$

Krümmung:

$$\kappa = \frac{1}{R};$$

Krümmungsradius:

$$\rho = R.$$

3. Felder

Vektoren und Funktionen

Wir betrachten hier folgende Vektorstrukturen:

Vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$:	3 Koordinaten für Position im Raum;	(3-1)
Vektorwertige Funktion $\vec{r}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$:	Schar von Vektoren, Kurvenparameter ist Zeit, Bogenlänge, ...;	
Skalarfeld: $\varphi(\vec{r}, t): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:	Skalare Funktion von Ort und Zeit (Vektoren):	
Vektorfeld: $\vec{F}(\vec{r}, t): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$:	Vektorwertige Funktion von Ort und Zeit (Vektoren).	

Skalare Felder:

Gravitationspotential, elektrisches Potential, Temperaturfeld, ...

Vektorielle Felder:

Kraftfeld, Geschwindigkeitsfeld, Elektrisches- und Magnetisches Feld, ...

Beispiele:

Zentralpotential:	$\varphi(\vec{r}) \propto -\frac{1}{ \vec{r} } = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$	(Schwerefeld, elektrisches Potential);	(3-2)
Kräfte im Zentralfeld:	$\vec{F}(\vec{r}) \propto \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{ \vec{r} ^3} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$	(Schwerkraft, elektrisches Feld).	

Bemerkung zur Realität der Felder:

Felder sind mathematische Hilfsmittel zur Beschreibung physikalischer Phänomene aufgrund kausaler Zusammenhänge.

Felder sind nicht beobachtbar oder messbar!

Wir beobachten zum Beispiel, wie ein Ball durch die Luft fliegt, oder wie sich Eisenspäne auf einer Glasplatte über einem Magneten orientieren. Schwerefelder oder magnetische Felder treten dabei nicht in Erscheinung, aber die beobachteten Phänomene können mit ihrer Hilfe berechnet werden.

Felder sind real im Sinn von gedanklichen Vorstellungen, nicht im Sinne physikalischer Objekte. Das gleiche gilt auch für Raum und Zeit.

Partielle Ableitung

Felder hängen in der Regel von drei Raumkoordinaten und einer Zeitkoordinate ab. Beim Ableiten werden alle bis auf eine, nach der abgeleitet wird, festgehalten:

Partielle Ableitung: $\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{r} + h\hat{e}_i, t) - \varphi(\vec{r}, t)}{h};$ (3-3)

$\left(\text{etwa } \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, y+h, z) - \varphi(x, y, z)}{h}, x, z, t \text{ konstant} \right)$

$\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{r}, t+h) - \varphi(\vec{r}, t)}{h};$

oder

$\frac{\partial \vec{F}(\vec{r}, t)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r} + h\hat{e}_i, t) - \vec{F}(\vec{r}, t)}{h};$

$\frac{\partial \vec{F}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r}, t+h) - \vec{F}(\vec{r}, t)}{h}.$

Nach einer Variablen x_i oder t wird also abgeleitet und die anderen Variablen werden dabei festgehalten.

Schreibweise:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_{x_i} \equiv \partial_i \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = \varphi_i. \quad (3-4)$$

Beispiele für partielle Ableitungen:

Ableitung des Ortsvektors, z.B.: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \partial_y (x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z) = \hat{e}_y,$ (3-5)

oder allgemein:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 \underbrace{\partial_i x_j}_{\delta_{ij}} \hat{e}_j = \hat{e}_i,$$

Ableitung des Abstandes:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \partial_y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \overbrace{\left(\partial_u \sqrt{u} \right) \left(\partial_y u \right)}^{\text{Kettenregel mit } u=x^2+y^2+z^2} = \frac{y}{r},$$

$\underbrace{\partial_u \sqrt{u}}_{=\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2r}} \underbrace{\left(\partial_y u \right)}_{=2y}$

oder:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \partial_i \sqrt{\sum_{j=1}^3 x_j x_j} = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^3 x_j x_j}} 2x_i = \frac{x_i}{r}.$$

Gradienten:

Ableitungsvektor (Nablaoperator): $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \partial_i;$ (3-6)

Gradient eines Skalarfeldes: $\vec{\nabla} \varphi = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \partial_i \varphi = (\partial_x \varphi, \partial_y \varphi, \partial_z \varphi).$

Beispiel:

Gravitationspotential, $\varphi = -\frac{1}{r} = -\sum_{j=1}^3 (x_j x_j)^{-1/2};$ (3-7)
elektrisches Potential

Gradient:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \varphi &= -\sum_{ij=1}^3 \hat{e}_i \partial_i (x_j x_j)^{-1/2} = \sum_{i=1}^3 \overbrace{-\hat{e}_i \left(\underbrace{\partial_u u^{-1/2}}_{=-\frac{1}{2}u^{-3/2}} \right) \left(\underbrace{\partial_i u}_{=2x_j} \right)}^{\text{Partielle Integration mit } u=\sum_{j=1}^3 x_j x_j} \\ &= \sum_{ij=1}^3 (x_j x_j)^{-3/2} x_i \hat{e}_i = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\hat{r}}{r^2}. \end{aligned}$$

Interpretation

Das Totale Differential $d\varphi$ gibt an, wie sehr sich das Potential φ bei einer Änderung des Ortes $d\vec{r}$ ändert:

Totales Differential: $d\varphi(\vec{r}) \equiv \sum_{i=1}^3 \partial_i \varphi(\vec{r}) dx_i = \sum_{ij=1}^3 \partial_i \varphi(\vec{r}) \overbrace{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}^{\delta_{ij}} dx_j = (\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})) \cdot d\vec{r};$ (3-8)

also bedeutet $\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$: Wie stark ändert sich φ in Richtung $d\vec{r}$.

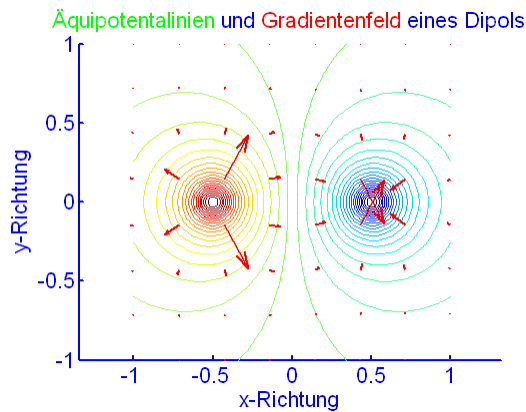
Speziell entlang $0 = d\varphi(\vec{r}) = (\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})) \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \varphi \perp d\vec{r};$

Äquipotentiallinien:

$\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$ steht senkrecht auf Äquipotentiallinien von φ .

Der Gradient zeigt entgegen der Falllinie und der Betrag gibt die Steilheit an.

Beispiel elektrisches Potential eines Dipols:



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{a}|},$$

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y, \quad \vec{a} = a\hat{e}_x.$$

Äquipotentiallinien und Gradientenfeld eines Dipols.

Abb. 3-1

Rechenregeln

Summenregel:
$$\vec{\nabla}(\varphi + \psi) = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \partial_i (\varphi + \psi) = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \partial_i \varphi + \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \partial_i \psi$$

$$= \vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla} \psi;$$

Produktregel:
$$\vec{\nabla}(\varphi \psi) = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \partial_i (\varphi \psi) = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i ((\partial_i \varphi) \psi + \varphi (\partial_i \psi))$$

$$= (\vec{\nabla} \varphi) \psi + \varphi (\vec{\nabla} \psi);$$

Quotientenregel:
$$\vec{\nabla} \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\vec{\nabla} \varphi}{\psi} - \frac{\varphi \vec{\nabla} \psi}{\psi^2}$$

$$= \frac{(\vec{\nabla} \varphi) \psi - \varphi (\vec{\nabla} \psi)}{\psi^2};$$

Kettenregel:
$$\vec{\nabla} f(\varphi) = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \partial_i f(\varphi) = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \frac{df}{d\varphi} \partial_i \varphi$$

$$= \frac{df}{d\varphi} \vec{\nabla} \varphi.$$

Richtungsableitung:

$$\text{Richtung } \hat{u}: \quad \hat{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \hat{e}_i, \quad |\hat{u}| = 1 \quad (3-10)$$

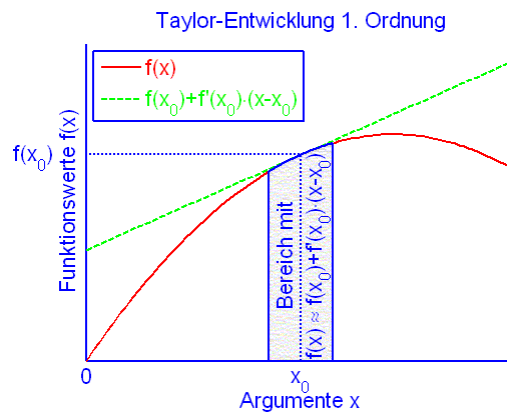
Richtungsableitung:

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{u}} \varphi(\vec{r}) &\equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{r} + h\hat{u}) - \varphi(\vec{r})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{r} + (h + \varepsilon)\hat{u}) - \varphi(\vec{r} + \varepsilon\hat{u})}{h} \bigg|_{\varepsilon=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(\varepsilon + h) - f(\varepsilon)}^{f(\varepsilon) \equiv \varphi(\vec{r} + \varepsilon\hat{u})}}{h} \bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} f(\varepsilon) \bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \varphi(\vec{r} + \varepsilon\hat{u}) \bigg|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial r_i^{(\varepsilon)}} \varphi(\vec{r}^{(\varepsilon)}) \right) \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon} r_i^{(\varepsilon)} \bigg|_{\varepsilon=0}}_{=u_i} \\ &= \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\vec{r}) = \hat{u} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}). \end{aligned}$$

Eindimensionale Taylor-Entwicklung

Wie in Abb. 3-2 kann man jede einmal stetige Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 linear approximieren:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3-11)$$



Die (durchgezogene) Bahnkurve wird in einer Umgebung von x_0 sehr gut durch die (gestrichelte) Gerade angenähert.

Abb. 3-2

Nimmt man mehrere Ableitungen hinzu, wird die Approximation besser.

Allgemein:

Jede n -mal stetig ableitbare Funktion $f(x)$ kann um einen Punkt x_0 in eine so genannte Taylor-Reihe entwickelt werden.

Taylor-Polynom:

$$p_n(x) \equiv \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \bigg|_{x=x_0} (x-x_0)^k \quad (3-12)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Das Taylor-Polynom hat in x_0 dieselben ersten n Ableitungen wie die ursprüngliche Funktion $f(x)$:

$$\frac{d^{(k)} f(x)}{dx^{(k)}} \bigg|_{x=x_0} = \frac{d^{(k)} p_n(x)}{dx^{(k)}} \bigg|_{x=x_0} \quad \forall k \leq n \quad (3-13)$$

und es gilt

$$f(x) = p_n(x) + \underbrace{O((x-x_0)^{n+1})}_{\text{Korrekturterm proportional zu } (x-x_0)^{n+1}} \quad (3-14)$$

In einer Umgebung von x_0 ist der Korrekturterm sehr klein und $f(x)$ kann durch $p_n(x)$ ersetzt werden. Das Polynom $p_n(x)$ ist in der Regel viel einfacher oder überhaupt zu handhaben.

Beispiel cos-Funktion:

Ableitung der cos-Funktion:

$$\frac{d^n \cos(x)}{dx^n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin(x) & \forall \text{ ungeraden } n, \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cos(x) & \forall \text{ geraden } n; \end{cases} \quad (3-15)$$

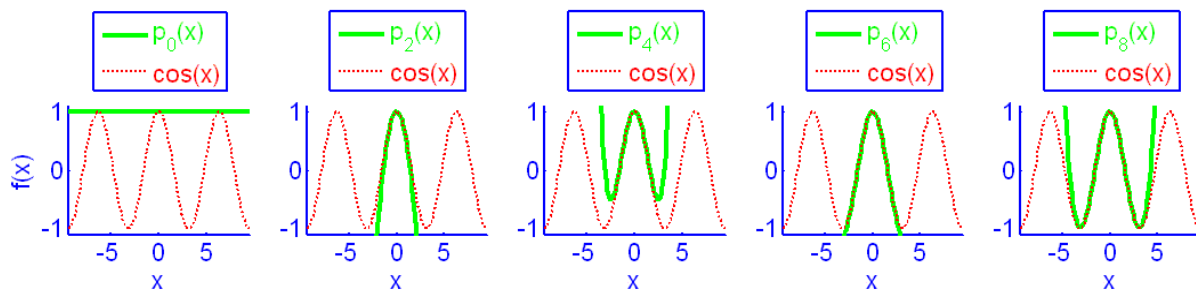
Abl. der cos-Funktion bei $x=0$:

$$\frac{d^n \cos(x)}{dx^n} \bigg|_{x=0} = \cos\left(\frac{n}{2} \pi\right) = 1, 0, -1, 0, 1, \dots;$$

Entw. der cos-Funktion um $x=0$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + O(x^{2n+1}).$$

Die Güte der einzelnen Entwicklungsstufen ist Abb. 3-3 abzulesen.



Taylor-Entwicklungen (durchgezogene Linien) der Cosinus-Funktion (gepunktete Linien) um $x=0$ in verschiedenen Ordnungen.

Abb. 3-3

Beispiel: Entwicklung von $\sqrt{1+x}$ um $x=0$:

mit $u = 1+x$:

(3-16)

$$(\sqrt{1+x})' = (\sqrt{u})' (1+x)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \xrightarrow{x=0} \frac{1}{2},$$

$$(\sqrt{1+x})'' = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}} \right)' (1+x)' = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \xrightarrow{x=0} -\frac{1}{4},$$

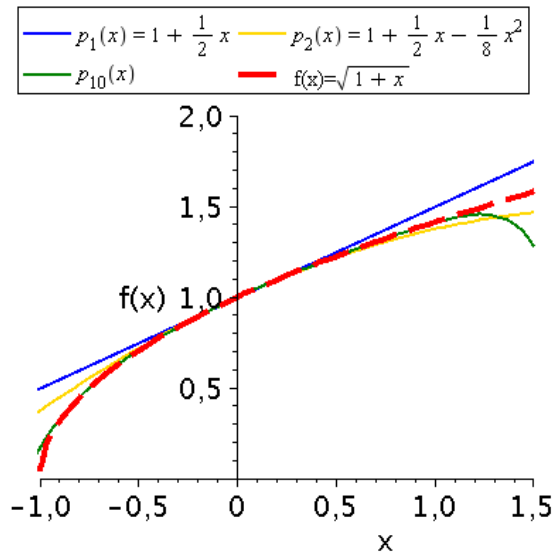
$$(\sqrt{1+x})''' = \left(-\frac{1}{4u^{3/2}} \right)' (1+x)' = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \xrightarrow{x=0} \frac{3}{8},$$

\vdots

$$(\sqrt{1+x})^{(n)} \xrightarrow{x=0} (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots \frac{2n-3}{2} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \prod_{k=3}^n (2k-3)}_{\equiv a_n};$$

also:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{3}{4} \frac{1}{2}x^3 - O(x^4) \quad \underbrace{\forall x \text{ mit } |x| < 1.}_{\text{sogenannter Konvergenzradius}}$$



Taylor-Entwicklung für $f(x) = (1+x)^{1/2}$ um $x=0$ für verschiedene Ordnungen. Die Reihe konvergiert nur im Intervall $x \in [-1, 1]$, wie in der Funktionentheorie bewiesen wird.

Abb. 3-4

Taylor-Entwicklung für Felder

Mit Hilfe der Richtungsableitung nach (3-10) wird die Taylor-Entwicklung ganz zwanglos auf Felder erweitert:

Taylor-Entwicklung von φ um \vec{r}_0 mit $\vec{d} \equiv \vec{r} - \vec{r}_0$, $\hat{d} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$: (3-17)

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \sum_{n=0}^N \frac{(\hat{d} \cdot \vec{\nabla})^n}{n!} \varphi \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} d^n \\ &= \varphi(\vec{r}_0) + \hat{d} \cdot \vec{\nabla} \varphi \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} d + \frac{1}{2} (\hat{d} \cdot \vec{\nabla})^2 \varphi \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} d^2 + \dots + \frac{1}{N!} (\hat{d} \cdot \vec{\nabla})^N \varphi \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} d^N + \text{Restglied} \end{aligned}$$

Wichtig:

Es ist

(3-18)

$$\begin{aligned}
 (\hat{d} \cdot \vec{\nabla})^2 \varphi(\vec{r}) &= \sum_{ijk=1}^3 (d_j^2)^{-1/2} d_i \partial_i (d_k^2)^{-1/2} d_l \partial_l \varphi(\vec{r}) \\
 &= \sum_{ijkl=1}^3 (d_j^2)^{-1/2} d_i \left(\left(\partial_i (d_k^2)^{-1/2} \right) d_l + (d_k^2)^{-1/2} (\partial_i d_l) + (d_k^2)^{-1/2} d_l \partial_i \right) \partial_l \varphi(\vec{r}) \\
 &= \sum_{ijkl=1}^3 (d_j^2)^{-1/2} d_i \left(\left(-d_i (d_k^2)^{-3/2} \right) d_l + (d_k^2)^{-1/2} \delta_{il} + (d_k^2)^{-1/2} d_l \partial_i \right) \partial_l \varphi(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{d} \left(\underbrace{-\frac{d^2}{d^3} \vec{d} \cdot \vec{\nabla}}_{=0} + \frac{1}{d} \vec{d} \cdot \vec{\nabla} + \frac{1}{d} \vec{d} (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{\nabla} \right) \varphi(\vec{r}) \\
 &= \hat{d} \cdot (\hat{d} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r});
 \end{aligned}$$

und $(\hat{d} \cdot \vec{\nabla})^n \varphi(\vec{r}) = \hat{d} \cdot (\hat{d} \cdot (\hat{d} \cdot (\dots) \vec{\nabla}) \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}).$

Beispiel: Entwicklung von $|\vec{r} - \vec{a}|$ um $\vec{r} = 0$

0. Ord.: $|\vec{r} - \vec{a}|_{\vec{r}=0} = a;$ (3-19)

1. Ord.:
$$\hat{r} \cdot \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{a}| = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{r} \partial_i \left(\sum_{j=1}^3 (x_j - a_j)^2 \right)^{1/2} = \frac{x_i}{r} \frac{2(x_i - a_i)}{2 \left(\sum_{j=1}^3 (x_j - a_j)^2 \right)^{1/2}} = \hat{r} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|},$$

also
$$\hat{r} \cdot \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{a}|_{\vec{r}=0} = \hat{r} \cdot \frac{-\vec{a}}{a} = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{a};$$

2. Ord.:
$$\begin{aligned}
 (\hat{r} \cdot \vec{\nabla})^2 |\vec{r} - \vec{a}| &= \hat{r} \cdot (\hat{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{a}| \\
 &= \sum_{ij=1}^3 \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r} \partial_i \partial_j \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - a_k)^2 \right)^{1/2} = \sum_{ij=1}^3 \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r} \partial_i \frac{(x_j - a_j)}{\left(\sum_{k=1}^3 (x_k - a_k)^2 \right)^{1/2}} \\
 &= \sum_{ij=1}^3 \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r} \left(\frac{\delta_{ij}}{(x_k - a_k)^{1/2}} - \frac{(x_j - a_j)(x_i - a_i)}{\left(\sum_{k=1}^3 (x_k - a_k)^2 \right)^{3/2}} \right),
 \end{aligned}$$

also
$$\frac{1}{2} (\hat{r} \cdot \vec{\nabla})^2 |\vec{r} - \vec{a}|_{\vec{r}=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{r}^2}{a} - \frac{(\hat{r} \cdot \vec{a})^2}{a^3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{a} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{a})^2}{a^3} \right).$$

$$\text{Insgesamt: } |\vec{r} - \vec{a}| = a - \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{a} + \frac{r^2}{2a} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{a})^2}{2a^3} + O(r^3). \quad (3-20)$$

Anderer Weg:

Wir wenden einen Trick an, um das Feld eindimensional zu entwickeln:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{a}| &= \sqrt{a^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{a} + r^2} = a \sqrt{1 + \underbrace{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}}_{\substack{\equiv \frac{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{a}}{a^2} \\ \text{siehe oben}}}} = a \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + O(x^3) \right) \\ &= a \left(1 + \frac{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{a}}{2a^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{a}}{a^2} \right)^2 + O(r^3) \right) \\ &= a \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{a^2} + \frac{r^2}{2a^2} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{a})^2}{2a^4} + O(r^3) \right) = a - \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{a} + \frac{r^2}{2a} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{a})^2}{2a^3} + O(r^3). \end{aligned} \quad (3-21)$$

Wegintegrale

Einfache Integration über einen Weg bei konstantem Integranden (hier = 1)

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} (dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} dx\hat{e}_x + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} dy\hat{e}_y + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} dz\hat{e}_z \\ &= (x_1 - x_0)\hat{e}_x + (y_1 - y_0)\hat{e}_y + (z_1 - z_0)\hat{e}_z \\ &= \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \quad (\text{Länge des direkten Weges}). \end{aligned} \quad (3-22)$$

Integral über ein skalares Feld

Das geht nicht so ganz analog, weil die Funktion ja im Allgemeinen von allen Koordinaten abhängt.

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \varphi(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \varphi(x, y, z) (dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z) \\ &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} (\varphi(x, y, z) dx\hat{e}_x + \varphi(x, y, z) dy\hat{e}_y + \varphi(x, y, z) dz\hat{e}_z) \end{aligned} \quad (3-23)$$

Man muss also angeben, welcher Wert von x zu einem bestimmten Wert von y oder z gehört. Man muss den Weg parametrisieren:

$$\text{Parametrisierung: } \vec{r} = \vec{r}(s) \quad (s \text{ ist etwa Bogenlänge,} \quad (3-24)$$

Zeit oder ein anderer Parameter);

$$\text{Differential: } d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} ds = \vec{r}' ds;$$

$$\text{Für Zeit } t: \quad d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt = \dot{\vec{r}} dt = \vec{v} dt \quad (\vec{v} \text{ ist Geschwindigkeit}).$$

Damit ist

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \varphi(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\vec{r}(s)) \vec{r}'(s) ds. \quad (3-25)$$

Beim Einsetzen der Funktionen ergibt sich ein gewöhnliches, bestimmtes Integral.

Beispiel

Beispiel

$$\text{Bahnkurve freier Fall: } \vec{r}(t) = \frac{1}{2} \underset{\text{Konstant}}{\vec{a}} \cdot t^2, \quad d\vec{r}(t) = \vec{v}(t) = \vec{a} t dt \quad (3-26)$$

$$\text{Wegintegral: } \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a} t dt = \frac{1}{2} \vec{a} (t_1^2 - t_0^2)$$

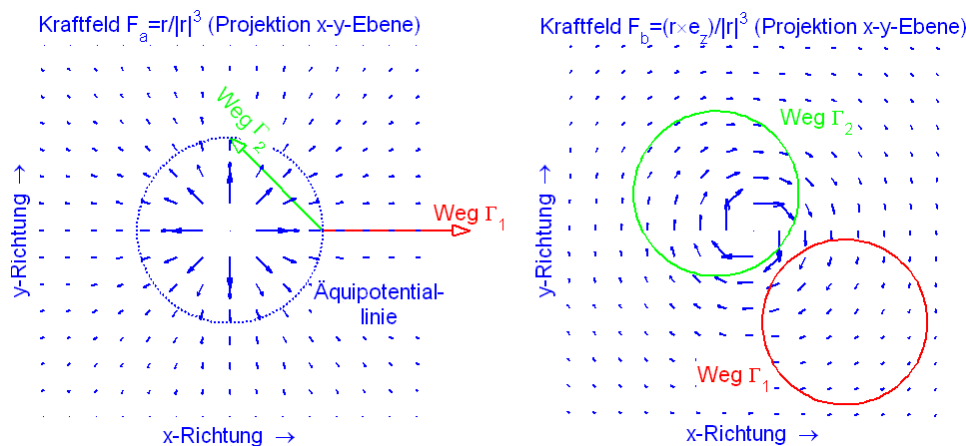
Integral über ein Vektorfeld

Sehr fundamental!

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Weg} \quad dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3-27)$$

$$\text{also: } A = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{r}'(s) ds$$

Beispiele:



Weg in Kraftfeldern. Links führt der Weg Γ_1 entlang der x -Achse ins unendliche und der Weg Γ_2 von einem Punkt auf einer Äquipotentiallinie zu einem anderen. Rechts betrachten wir zwei geschlossene Wege, Γ_1 liegt neben dem Zentrum des Wirbels, Γ_2 umfasst es.

Abb. 3-5

Linkes Bild in Abb. 3-5:

$$\text{Kraftfeld: } \vec{F}_a = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (3-28)$$

Weg 1 ($s \in [0,1]$):

$$\vec{r}_1 = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} R + (x_0 - R)s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1' = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_0 - R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (3-29)$$

Arbeit 1:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r}' ds = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{x(s)^2} (x_0 - R) ds \\ &= \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{(R + (x_0 - R)s)^2}_{\rightarrow (R+x_0s)^2}} \underbrace{(x_0 - R)}_{\rightarrow x_0} ds = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0 \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{(R + x_0s)^2}_{u, \quad ds=du/x_0}} ds \\ &= \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int_R^{R+x_0} \frac{1}{u^2} du = - \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \Big|_R^{x_0} = - \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Wir erhalten das Potential φ .

Weg 2 ($s \in [0,1]$):

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} (1-s) \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (3-30)$$

Arbeit 2:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \frac{\begin{pmatrix} 1-s \\ s \\ 0 \end{pmatrix}}{\left((1-s)^2 + s^2 \right)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Integration mit Substitution } u=2s^2-2s+1} \\ &= \int_0^1 \frac{\overbrace{(s-1)+s}^{-1+2s=\frac{1}{2}u'}}{\underbrace{\left((1-s)^2 + s^2 \right)}_{(1-2s+2s^2)=u}} ds = \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{u^{3/2}} \overbrace{du}^{u' ds} = - \frac{1}{u^{1/2}} \Big|_1^1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hier bewegen wir uns von einem Punkt auf einer Äquipotentiallinie zur anderen.

Rechtes Bild in Abb. 3-5:

Kraftfeld: $\vec{F}_b = \frac{\hat{r} \times \hat{e}_z}{r^2} = \frac{\vec{r} \times \hat{e}_z}{r^3}. \quad (3-31)$

Eine Rechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned} \text{Weg 1: } A_1 &= \int_{\text{Weg 1}} \vec{F}_b \cdot d\vec{r} \neq 0; \\ \text{Weg 2: } A_2 &= \int_{\text{Weg 2}} \vec{F}_b \cdot d\vec{r} = 0. \end{aligned} \quad (3-32)$$

Der Unterschied zwischen den beiden Wegen ist klar:

Auf Weg 1 bewegt man sich um die Singularität herum (etwa mit einer Ladung um einen strom-führenden Leiter). Die Kraft kommt vorwiegend aus der Bewegungsrichtung.

Auf Weg 2 bewegt man sich an der Singularität vorbei. Die Kraft wechselt ihre Richtung und die Komponenten kompensieren sich.

Konservative Kraftfelder.

Die Eigenschaft der Wegunabhängigkeit der Arbeit ist sehr elementar. Wenn man einen Berg besteigt, hängt die Potentielle Energie am Gipfel nicht vom Weg ab. Das Kraftfeld der Gravitation hat ein Potential:

$$\begin{array}{ll} \text{Für das Kraftfeld} & \vec{F} = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \text{existiert ein Potential} & \varphi \text{ mit } \vec{F} = -\vec{\nabla} \varphi. \end{array} \quad (3-33)$$

allgemeiner:

$$\text{Für ein konservatives Kraftfeld } \vec{F} \text{ ist} \quad (3-34)$$

- a) das Wegintegral ist unabhängig vom Weg: $\int_{\Gamma_1(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1)} \vec{F} \cdot d\vec{r};$
- b) das Integral auf jeder geschlossenen Bahn $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv \int_{\Gamma(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0;$
- c) für alle \vec{r} ist die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0;$
- d) es existiert ein Potential φ mit $\vec{\nabla} \varphi = -\vec{F}.$

Die Aussagen a-d sind äquivalent und definieren den Ausdruck 'konservativ'.

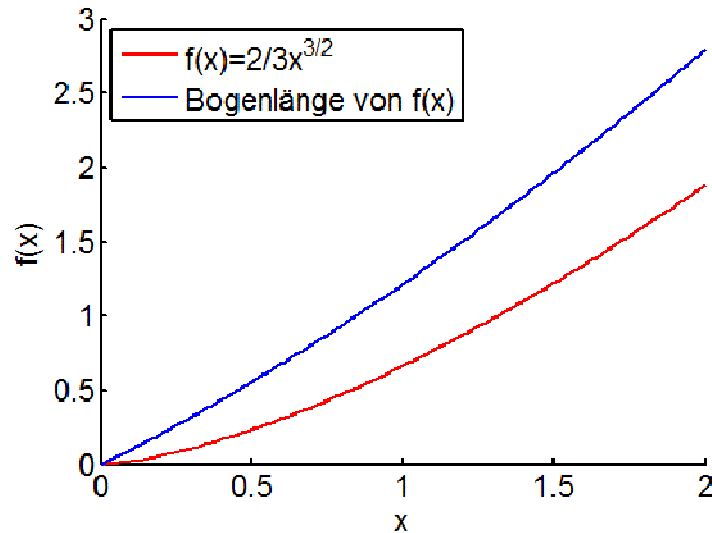
In den obigen Beispielen ist Feld F_a offensichtlich konservativ, Feld F_b nicht.

Beispiel: Bogenlänge auf einer Kurve

Bogenlänge der Kurve $\frac{2}{3}x^{3/2}$: $\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^{3/2} \\ x \end{pmatrix}$, $|d\vec{r}(x)| = \left| \begin{pmatrix} x^{1/2} \\ 1 \end{pmatrix} dx \right| = \sqrt{x+1}dx$ (3-35)

$$\int_{\Gamma(x')=\sin x'} |d\vec{r}| = \int_0^x |d\vec{r}(x')| = \int_0^x \underbrace{\sqrt{1+x}}_{=\left(\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right)'} dx' = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3}$$

(Stammfunktion)



Bogenlänge der Kurve $\frac{2}{3}x^{3/2}$

Flächen- und Volumenintegrale

Definition des Integrals über eine Dimension x:

Stützstellen: $x_i = x_0 + (i-1)\Delta x$, $N = \frac{x_N - x_0}{\Delta x}$; (3-36)

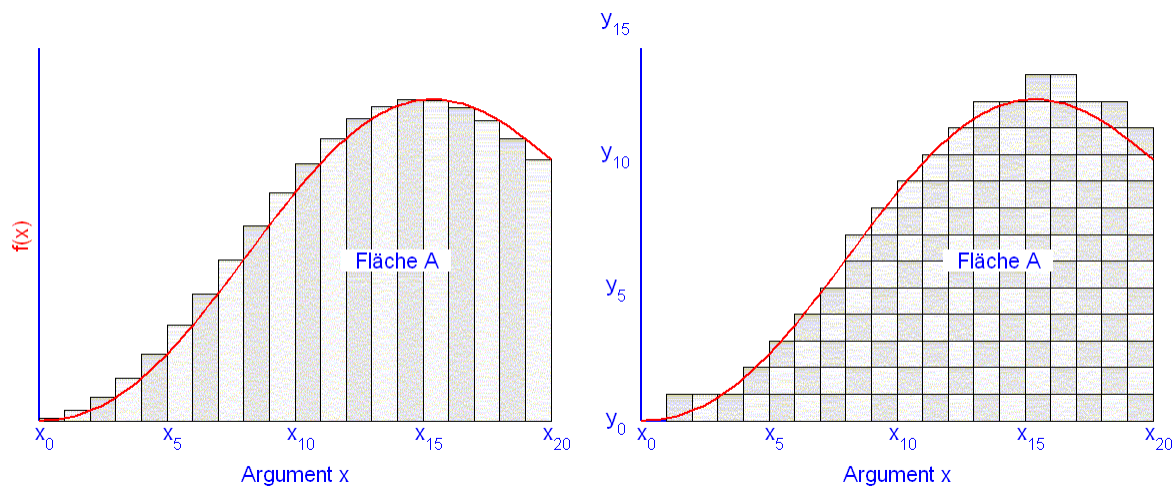
Fläche unter der Kurve: $A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx f(x)$.

Man berechnet hier eine Fläche (2D-Volumen) und das kann auch in x und y etwas symmetrischer Schreiben:

Stützstellen: $x_i = x_0 + (i-1)\Delta x$, $N_x = \frac{x_N - x_0}{\Delta x}$; (3-37)

$$y_j = y_0 + (j-1)\Delta y, \quad N_{y,x_i} = \frac{f(x_i)}{\Delta y};$$

Fläche unter der Kurve: $A = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_{y,x_i}} \Delta x \Delta y \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx \equiv \int_{x_0}^{x_1} \int_0^{f(x)} dy dx.$



Integration als Flächenberechnung. Links wird die genannte Obersumme gebildet, indem die x -Koordinate in infinitesimale Abschnitte unterteilt wird. Rechts wird zusätzlich auch die y -Koordinate in infinitesimale Abschnitte unterteilt. Dies führt auf eine Verallgemeinerung zu Volumenintegralen.

Abb. 3-6

Die Äquivalenz von (3-36) und (3-37) sieht man leicht:

$$A = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\int_0^{f(x)} dy}_{y|_0^{f(x)}} dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx. \quad (3-38)$$

Dies wird nun zum Volumenintegral verallgemeinert:

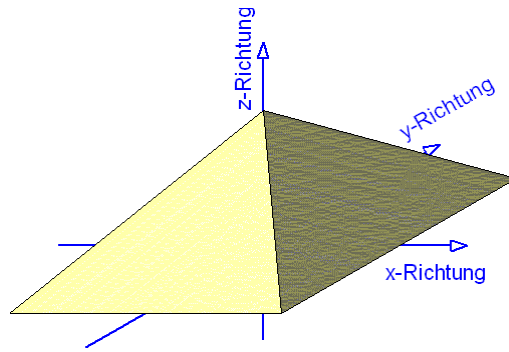
$$V = \int_V dx dy dz = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} dy \int_{z_0(x,y)}^{z_1(x,y)} dz. \quad (3-39)$$

Die Reihenfolge der Integrationen richtet sich nach der Geometrie (siehe folgendes Beispiel).

Bezeichnungen:

$$\int_V dx dy dz = \int_V dV = \underbrace{\int_V d^3\vec{r}}_{\text{z.B. in der Vorlesung}} \quad (3-40)$$

Beispiel Pyramide



Pyramide, deren Volumen in (3-41) berechnet wird.

Abb. 3-7

Integrationsbereiche: $x = -1 + z \dots 1 - z$, $y = -1 + z \dots 1 - z$, $z = 0 \dots 1$; (3-41)

Volumen:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_V dV = \int_0^1 dz \int_{-1+z}^{1-z} dy \int_{-1+z}^{1-z} dx = \int_0^1 dz x \Big|_{-1+z}^{1-z} y \Big|_{-1+z}^{1-z} = \int_0^1 dz ((1-z) - (-1+z))^2 \\
 &= 4 \int_0^1 dz (1-z)^2 = 4 \int_0^1 dz (z^2 - 2z + 1) = 4 \left(\frac{1}{3} z^3 - z^2 + z \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Teilchendichte

Anzahl von Teilchen im Volumen ΔV_k : n_k , $k \in \{1 \dots K\}$; (3-42)

Teilchendichte: $\rho(\vec{r}_k) = \frac{n_k}{\Delta V_k}$;

Anzahl N von Teilchen im Gesamtvolumen: $N = \sum_{k=1}^K n_k = \sum_{k=1}^K \Delta V_k \frac{n_k}{\Delta V_k} \rightarrow \int_V dV \rho(\vec{r})$.

Massendichte:

Masse im Volumen ΔV_k : $m \cdot n_k$, $k \in \{1 \dots K\}$; (3-43)

Massendichte: $\tilde{\rho}(\vec{r}_k) = \frac{m \cdot n_k}{\Delta V_k}$;

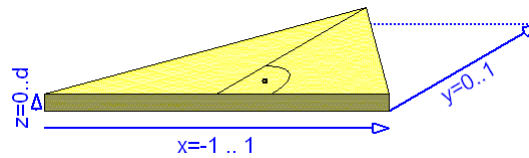
Masse im Gesamtvolumen: $M = \sum_{k=1}^K m \cdot n_k = \sum_{k=1}^K \Delta V_k \frac{m \cdot n_k}{\Delta V_k} \rightarrow \int_V dV \tilde{\rho}(\vec{r}_k)$.

Ladungsdicht geht analog.

Schwerpunkt (Integration über Vektorfeld)

Schwerpunkt: $\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{k=1}^K \vec{r}_k m \cdot n_k = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^K \vec{r}_k \frac{m \cdot n_k}{\Delta V_k} \Delta V_k \rightarrow \frac{1}{M} \int_V dV \vec{r}_k \tilde{\rho}(\vec{r}_k)$. (3-44)

Beispiel Geodreieck (konstante Massendichte)



Geodreieck, dessen Schwerpunkt in (3-45) berechnet wird.

Abb. 3-8

Dichte: $\tilde{\rho}(\vec{r}_k) = \frac{M}{V} = \frac{M}{d};$ (3-45)

Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{M} \int_V dV \vec{r}_k \tilde{\rho}(\vec{r}_k) = \frac{1}{d} \int_0^d dz \int_0^1 dy \int_{-1+y}^{1-y} dx (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \\ &= \frac{1}{d} \int_0^d dz \int_0^1 dy \left(\underbrace{\frac{1}{2}((1-y)^2 - (-1+y)^2)}_{=0} \vec{e}_x + 2(1-y)y\vec{e}_y + 2(1-y)z\vec{e}_z \right) \\ &= \frac{1}{d} \int_0^d dz \left(\underbrace{2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{\frac{1}{3}} \vec{e}_y + \underbrace{2\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_1 z\vec{e}_z \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{3} d\vec{e}_y + \frac{1}{2} d^2 \vec{e}_z \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Krummlinige orthogonale Koordinaten

Rückblick

Zur quantitativen Erfassung räumlicher (und zeitlicher) Bezüge dienen Koordinatensysteme. Bisher haben wir Kartesische Koordinaten betrachtet:

$$\text{Basis: } \hat{e}_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}; \quad (4-1)$$

$$\text{Koordinaten: } x_i, \quad \{x_1, x_2, x_3\} \hat{=} \{x, y, z\};$$

$$\text{Vektoren: } \vec{r} = x_i \hat{e}_i = \underbrace{(x, y, z)}_{\substack{\text{Zahlentripel} \\ \text{Zeilenvektor}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Zahlentripel} \\ \text{Spaltenvektor}}}.$$

Produkte:

$$\text{Skalarprodukt } \cdot \quad \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i \quad (4-2)$$

$$(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}): \quad = \underbrace{a}_{\substack{\text{Betrag} \\ \text{von } \vec{a}}} \underbrace{b}_{\substack{\text{Betrag} \\ \text{von } \vec{b}}} \underbrace{\cos \varphi}_{\substack{\text{cos des} \\ \text{eingeschl.} \\ \text{Winkels}}};$$

$$\text{Vektorprodukt } \times \quad \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k$$

$$(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3): \quad = \underbrace{a}_{\substack{\text{Betrag} \\ \text{von } \vec{a}}} \underbrace{b}_{\substack{\text{Betrag} \\ \text{von } \vec{b}}} \underbrace{\sin \varphi}_{\substack{\text{sin des} \\ \text{eingeschl.} \\ \text{Winkels}}};$$

$$\text{Spatprodukt: } V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \quad (\text{Volumen des Spatkristalls}).$$

Ableitungen und Integrale:

$$\text{Gradient: } \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = \hat{e}_i \partial_i \varphi(\vec{r}); \quad (4-3)$$

$$\text{Wegintegral: } \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r}(s) \varphi(\vec{r}(s)) = \int_{s(\vec{r}_0)}^{s(\vec{r}_1)} ds \varphi(s) \vec{r}'(s) \quad (s \text{ ist Wegparameter});$$

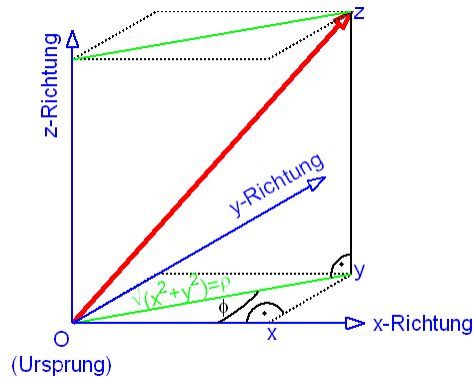
$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r}(s) \cdot \vec{F}(\vec{r}(s)) = \int_{s(\vec{r}_0)}^{s(\vec{r}_1)} ds \vec{r}'(s) \cdot \vec{F}(\vec{r}(s));$$

$$\text{Volumenintegrale: } \int_V dV f(\vec{r}) = \int_{x_{i0}}^{x_{i1}} dx_i \left(\int_{v_0(x_i)}^{v_1(x_i)} dx_j \left(\int_{u_0(x_i, x_j)}^{u_1(x_i, x_j)} dx_k f(\vec{r}) \right) \right).$$

In der Physik liegen oft Symmetrien vor (Translationssymmetrie, Rotationssymmetrie, Kugelsymmetrie). Dann kann der Rechenaufwand für Ableitungen und Integrationen wesentlich verringert werden, wenn man geeignete Koordinaten einführt.

Zur Bestimmung der Rechenregeln geht man jedoch immer auf die Kartesischen Koordinaten zurück. Sie legen fest, wie wir räumliche Bezüge objektiviert haben.

Zylinderkoordinaten



Zylinderkoordinaten legen einen Raumpunkt fest durch seinen Abstand ρ zur z -Achse, den Winkel ϕ zwischen Projektion auf x - y -Ebene und x -Achse und durch seine z -Koordinate.

Abb. 4-1

$$\text{Zylinderkoord.:} \quad \begin{cases} \rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \phi = \arctan \frac{y}{x} \in [0, 2\pi], \\ z = z; \end{cases} \quad (4-4)$$

$$\begin{aligned} \text{Umkehrung:} \quad & \begin{cases} x = \rho \cos \phi, \\ y = \rho \sin \phi, \\ z = z, \end{cases} & \text{also } x^2 + y^2 = \rho^2 \underbrace{((\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2)}_{=1} \\ & & \text{und } \frac{y}{x} = \frac{\cancel{\rho} \sin \phi}{\cancel{\rho} \cos \phi} = \arctan \phi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vektor:} \quad & \vec{r} = \rho \cos \phi \hat{e}_x + \rho \sin \phi \hat{e}_y + z \hat{e}_z \\ & = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Optimale Basisvektoren für Zylinderkoordinaten:

Die Richtung der Basisvektoren wird festgelegt durch den Tangentialvektor an die Kurve, die sich durch Variation der entsprechenden Koordinate ergibt.

Definition: $\hat{e}_{q_i} \equiv \frac{\partial_{q_i} \vec{r}}{|\partial_{q_i} \vec{r}|} \left(\text{Normierung: } \hat{e}_{q_i} \cdot \hat{e}_{q_i} = \frac{\partial_{q_i} \vec{r}}{|\partial_{q_i} \vec{r}|} \cdot \frac{\partial_{q_i} \vec{r}}{|\partial_{q_i} \vec{r}|} = \frac{(\partial_{q_i} \vec{r})^2}{(\partial_{q_i} \vec{r})^2} = 1 \right);$ (4-5)

Orthogonale Basis: $\hat{e}_{q_i} \cdot \hat{e}_{q_j} = \delta_{ij}$.

Für die in (4-4) definierten Zylinderkoordinaten ergibt sich so

ρ -Koordinaten: $\partial_\rho \vec{r} = \hat{e}_x \partial_\rho (\rho \cos \phi) + \hat{e}_y \partial_\rho (\rho \sin \phi) + \hat{e}_z \partial_\rho z$ (4-6)

$$= \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y,$$

$$|\partial_\rho \vec{r}| = \sqrt{(\cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y)^2} = \sqrt{(\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2} = 1,$$

$$\hat{e}_\rho = \hat{e}_x \cos \phi + \hat{e}_y \sin \phi = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix};$$

ϕ -Koordinaten: $\partial_\phi \vec{r} = \hat{e}_x \partial_\phi (\rho \cos \phi) + \hat{e}_y \partial_\phi (\rho \sin \phi) + \hat{e}_z \partial_\phi z$ (4-7)

$$= -\rho \sin \phi \hat{e}_x + \rho \cos \phi \hat{e}_y,$$

$$|\partial_\phi \vec{r}| = \sqrt{(\rho \cos \phi \hat{e}_x + \rho \sin \phi \hat{e}_y)^2} = \rho,$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix};$$

z-Koordinaten: $\hat{e}_z = \hat{e}_x \partial_z (\rho \cos \phi) + \hat{e}_y \partial_z (\rho \sin \phi) + \hat{e}_z \partial_z z$ (4-8)

$$= \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Ableitungen der Basisvektoren gilt:

$$\partial_\phi \hat{e}_\rho = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y = \hat{e}_\phi; \quad (4-9)$$

$$\partial_\rho \hat{e}_\phi = -\cos \phi \hat{e}_x - \sin \phi \hat{e}_y = -\hat{e}_\rho.$$

Skalarprodukte:

$$\hat{e}_\rho^2 = (\cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y)^2 = (\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2 = 1; \quad (4-10)$$

$$\hat{e}_\phi^2 = (-\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y)^2 = (\sin \phi)^2 + (\cos \phi)^2 = 1;$$

$$\hat{e}_z^2 = 1;$$

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi = (\cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y) \cdot (-\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y) = 0;$$

$$\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\rho = 0.$$

Vektorprodukte:

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\rho = (\cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y) \times (\cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y) = (\cos \phi \sin \phi - \sin \phi \cos \phi) \hat{e}_x \times \hat{e}_y = 0;$$

$$\hat{e}_\phi \times \hat{e}_\phi = (-\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y) \times (-\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y) = (-\sin \phi \cos \phi + \cos \phi \sin \phi) \hat{e}_x \times \hat{e}_y = 0;$$

$$\hat{e}_z \times \hat{e}_z = \dots = 0;$$

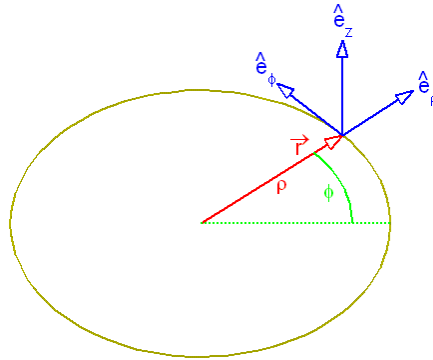
$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi = (\cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y) \times (-\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y) = ((\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2) \hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z;$$

$$\hat{e}_\phi \times \hat{e}_z = (-\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y) \times \hat{e}_z = \sin \phi \hat{e}_y + \cos \phi \hat{e}_x = \hat{e}_\rho;$$

$$\hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_z \times (\cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y) = \cos \phi \hat{e}_y - \sin \phi \hat{e}_x = \hat{e}_\phi.$$

(4-11)

Begleitendes Dreiein:



Die Basisvektoren der Zylinderkoordinaten (und aller anderen orthogonalen, krummliniger Koordinaten) bilden an jedem Raumpunkt ein orthogonales Koordinatensystem. Wenn sich der Punkt r (etwa auf einer Bahnkurve) bewegt, wird er von diesem 'Dreiein' begleitet.

Abb. 4-2

Beispiel: Zeitableitung des Ortsvektors

Ortsvektor: (4-12)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \rho \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\hat{e}_\rho} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\hat{e}_z}$$

$$= \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z;$$

Geschwindigkeit: $\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \underbrace{\dot{\hat{e}}_\rho}_{\dot{\phi} \hat{e}_\phi} + \dot{z} \hat{e}_z + z \underbrace{\dot{\hat{e}}_z}_0$

$$= \underbrace{\dot{\rho} \hat{e}_\rho}_{\text{Radialgeschwind.}} + \underbrace{\rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi}_{\text{Azimuthalgeschwind.}} + \dot{z} \hat{e}_z;$$

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \underbrace{\ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\hat{e}}_\rho}_{\text{Radialbeschleunigung}} + \underbrace{\dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \dot{\phi} \underbrace{\dot{\hat{e}}_\phi}_{-\dot{\phi} \hat{e}_\rho}}_{\text{Azimuthalbeschleunigung}} + \ddot{z} \hat{e}_z \\ &= \underbrace{\left(\ddot{\rho} - \underbrace{\rho \dot{\phi}^2}_{\text{Zentrifugalbeschleunigung}} \right) \hat{e}_\rho + \underbrace{(2 \dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{e}_\phi}_{\text{Azimuthalbeschleunigung}}}_{\text{Radialbeschleunigung}} + \ddot{z} \hat{e}_z. \end{aligned}$$

Totale Differentiale

Differential des Ortsvektors für krummlinige Koordinaten:

$$d\vec{r} = \partial_{q_i} \vec{r} dq_i = \left| \partial_{q_i} \vec{r} \right| \hat{e}_{q_i} dq_i \quad \left(\text{wegen } \hat{e}_{q_i} \equiv \frac{\partial_{q_i} \vec{r}}{\left| \partial_{q_i} \vec{r} \right|} \right). \quad (4-13)$$

Differential eines Skalarfeldes

$$d\varphi = \partial_{q_i} \varphi dq_i. \quad (4-14)$$

Gradient:

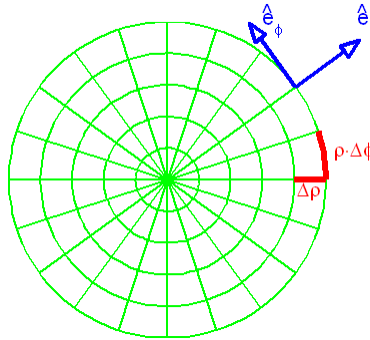
Gradient allgemein: $\vec{\nabla} \varphi = O_{q_i} \hat{e}_{q_i}; \quad (4-15)$

$$\begin{aligned} \text{Totales Differential: } d\varphi &= \underbrace{(\vec{\nabla} \varphi) \cdot d\vec{r}}_{\substack{\text{(Invariant, in allen} \\ \text{Koordinatensyst. gleich)}}} = \underbrace{O_{q_i} \hat{e}_{q_i}}_{\text{Gradient}} \cdot \underbrace{\left| \partial_{q_j} \vec{r} \right| \hat{e}_{q_j} dq_j}_{d\vec{r}} = \underbrace{O_{q_i} \left| \partial_{q_i} \vec{r} \right|}_{\substack{= \partial_{q_i} \varphi \\ \text{(siehe oben)}}} dq_i; \end{aligned}$$

$$\text{Koeffizientenvergl.: } O_{q_i} = \frac{\partial_{q_i} \varphi}{\left| \partial_{q_i} \vec{r} \right|}.$$

Gradient für Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \text{Gradient: } \vec{\nabla} \phi &= \underbrace{|\partial_\rho \vec{r}|^{-1}}_{=1} (\partial_\rho \phi) \hat{e}_\rho + \underbrace{|\partial_\phi \vec{r}|^{-1}}_{\rho^{-1}} (\partial_\phi \phi) \hat{e}_\phi + \underbrace{|\partial_z \vec{r}|^{-1}}_1 (\partial_z \phi) \hat{e}_z \\
 &= (\partial_\rho \phi) \hat{e}_\rho + \underbrace{\frac{1}{\rho} (\partial_\phi \phi)}_{=\frac{\partial \phi}{\partial(\rho \phi)}} \hat{e}_\phi + (\partial_z \phi) \hat{e}_z.
 \end{aligned} \tag{4-16}$$



Beim Gradient werden die Größenänderungen der Linienelemente berücksichtigt. Während das Linienelement in ρ -Richtung immer gleich groß ist, hängt das Linienelement in ϕ -Richtung vom Abstand ρ zur z -Achse ab.

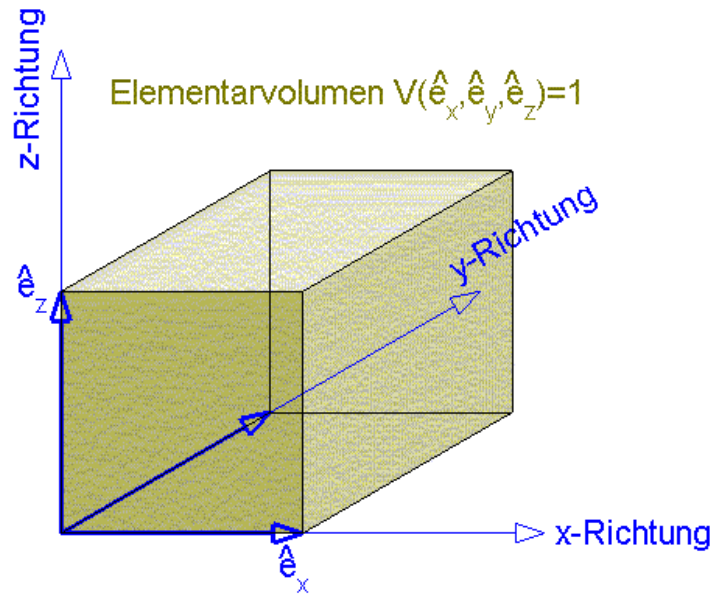
Abb. 4-3

Abb. 4-3 zeigt, dass genau die Normierungsfaktoren der Basisvektoren $|\partial_q \vec{r}| = \partial_q \vec{r} \cdot \hat{e}_q$ die Größenänderung der Linienelemente beschreiben. Diese müssen beim Ableiten durch Teilen und beim Integrieren durch multiplizieren mit den Normierungsfaktoren berücksichtigt werden:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\rho, \phi + h) - \phi(\rho, \phi)}{h} \equiv \frac{\partial \phi(\rho, \phi)}{\rho \partial \phi}. \tag{4-17}$$

Volumenintegrale

Das elementare Volumen, über das bei Verwendung von Kartesischen Koordinaten aufsummiert wird, wird von den drei Basisvektoren $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ aufgespannt:



Die drei Basisvektoren spannen ein Volumen (Quader oder allgemeiner Spatkrystal) auf, das die elementare Volumeneinheit definiert. Der Wert von Volumen, die von drei anderen Vektoren aufgespannt werden, bezieht sich auf diese Volumeneinheit.

Abb. 4-4

Zur Verallgemeinerung dreidimensionaler Volumenelemente dient das Spatprodukt

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad (4-18)$$

(siehe erstes Kapitel).

Das elementare Volumen kann entsprechend in eine invariante Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} \text{Spatvolumen:} \quad dV(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z) &\equiv V(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z) dx dy dz = (\hat{e}_x \times \hat{e}_y) \cdot \hat{e}_z dx dy dz \\ &= \det(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z) dx dy dz \\ &= \det(\partial_x \vec{r}, \partial_y \vec{r}, \partial_z \vec{r}) dx dy dz; \end{aligned} \quad (4-19)$$

Mit der Jacobi-Matrix:

$$(\partial_x \vec{r}, \partial_y \vec{r}, \partial_z \vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x x & \partial_y x & \partial_z x \\ \partial_x y & \partial_y y & \partial_z y \\ \partial_x z & \partial_y z & \partial_z z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und der Jacobi-Det.: $\det(\partial_x \vec{r}, \partial_y \vec{r}, \partial_z \vec{r}) = 1;$

also:

$$\begin{aligned} dV(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z) &= dV(\partial_x \vec{r}, \partial_y \vec{r}, \partial_z \vec{r}) = V(\partial_x \vec{r}, \partial_y \vec{r}, \partial_z \vec{r}) dx dy dz \\ &= \det(\partial_x \vec{r}, \partial_y \vec{r}, \partial_z \vec{r}) dx dy dz. \end{aligned}$$

Das invariante (vom Koordinatensystem unabhängige) Volumenelement ist also

$$dV(\partial_{q_1} \vec{r}, \partial_{q_2} \vec{r}, \partial_{q_3} \vec{r}) = \det(\partial_{q_1} \vec{r}, \partial_{q_2} \vec{r}, \partial_{q_3} \vec{r}) dq_1 dq_2 dq_3 \quad (4-20)$$

oder

$$\text{wegen } \hat{e}_{q_i} \equiv \frac{\partial_{q_i} \vec{r}}{\left| \partial_{q_i} \vec{r} \right|}: \quad (4-21)$$

$$\begin{aligned} dV(\partial_{q_1} \vec{r}, \partial_{q_2} \vec{r}, \partial_{q_3} \vec{r}) &= \det \left(\left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| \hat{e}_{q_1}, \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \hat{e}_{q_2}, \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| \hat{e}_{q_3} \right) dq_1 dq_2 dq_3 \\ &= \underbrace{\det(\hat{e}_{q_1}, \hat{e}_{q_2}, \hat{e}_{q_3})}_{=1 \text{ für orthogonale Basen}} \left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned}$$

Für Koordinatensysteme mit orthogonalen Basen ist also

$$dV(\partial_{q_1} \vec{r}, \partial_{q_2} \vec{r}, \partial_{q_3} \vec{r}) = \left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| dq_1 dq_2 dq_3. \quad (4-22)$$

Abb. 4-3 veranschaulicht das Auftauchen der Normierungsfaktoren $\left| \partial_q \vec{r} \right| = \partial_q \vec{r} \cdot \hat{e}_q$.

Volumenelement für Zylinderkoordinaten

$$dV(\partial_\rho \vec{r}, \partial_\phi \vec{r}, \partial_z \vec{r}) = \underbrace{\left| \partial_\rho \vec{r} \right|}_{=1} \underbrace{\left| \partial_\phi \vec{r} \right|}_{=\rho} \underbrace{\left| \partial_z \vec{r} \right|}_{=1} d\rho d\phi dz = \rho d\rho d\phi dz. \quad (4-23)$$

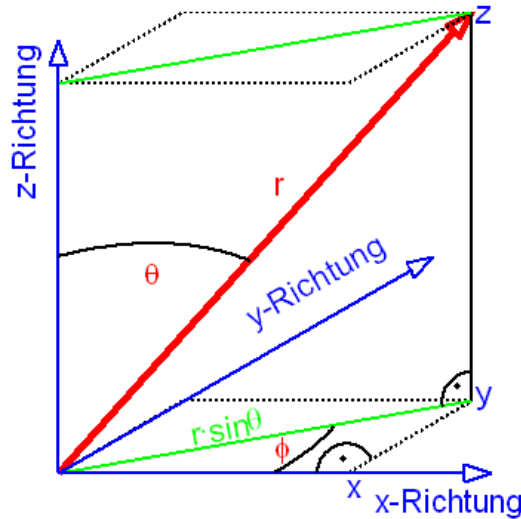
Beispiel: Volumen eines Zylinders mit Radius R und Höhe h

$$\int_{\text{Zyl}(R,h)} dV = \int_0^R \underbrace{\rho d\rho}_{\frac{1}{2}R^2} \int_0^{2\pi} \underbrace{d\phi}_{2\pi} \int_0^h \underbrace{dz}_h = \pi R^2 h. \quad (4-24)$$

Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \sin \vartheta \\ r \sin \phi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi]. \quad (4-25)$$



In Kugelkoordinaten wird ein Raumpunkt beschrieben durch seinen Abstand r zum Ursprung, durch den Polwinkel θ (Winkel zwischen z -Achse (Pol) und Vektor) und den Azimutwinkel ϕ (Winkel zwischen x -Achse und Projektion des Vektors auf die x - y -Ebene).

Abb. 4-5

Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \partial_r \vec{r} &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, & |\partial_r \vec{r}| &= \sqrt{((\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2)(\sin \vartheta)^2 + (\cos \vartheta)^2} = 1; \\ \partial_\vartheta \vec{r} &= r \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \phi \\ \cos \vartheta \sin \phi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, & |\partial_\vartheta \vec{r}| &= \sqrt{r^2 ((\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2)(\cos \vartheta)^2 + (\sin \vartheta)^2} = r; \\ \partial_\phi \vec{r} &= r \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, & |\partial_\phi \vec{r}| &= \sqrt{r^2 ((\sin \phi)^2 + (\cos \phi)^2)(\sin \vartheta)^2} = r \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (4-26)$$

Also

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \vartheta \\ \sin \phi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \vartheta \\ \sin \phi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4-27)$$

Spatprodukt

$$\begin{aligned}
V(\hat{e}_r, \hat{e}_\vartheta, \hat{e}_\phi) &= \det \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \vartheta & \cos \phi \cos \vartheta & -\sin \phi \\ \sin \phi \sin \vartheta & \sin \phi \cos \vartheta & \cos \phi \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \quad (4-28) \\
&= 0 + (\cos \phi)^2 (\cos \vartheta)^2 + (\sin \phi)^2 (\sin \vartheta)^2 \\
&\quad - \left(-(\cos \phi)^2 (\sin \vartheta)^2 \right) - 0 - \left(-(\sin \phi)^2 (\cos \vartheta)^2 \right) \\
&= \underbrace{(\cos \phi)^2 (\cos \vartheta)^2 + (\cos \phi)^2 (\sin \vartheta)^2}_{(\cos \phi)^2} + \underbrace{(\sin \phi)^2 (\sin \vartheta)^2 + (\sin \phi)^2 (\cos \vartheta)^2}_{(\sin \phi)^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Gradient

$$\begin{aligned}
\text{Gradient: } \vec{\nabla} \phi &= \underbrace{[\partial_r \vec{r}]^{-1}}_{=1} (\partial_r \phi) \hat{e}_r + \underbrace{[\partial_\vartheta \vec{r}]^{-1}}_{r^{-1}} (\partial_\vartheta \phi) \hat{e}_\vartheta + \underbrace{[\partial_\phi \vec{r}]^{-1}}_{(r \sin \vartheta)^{-1}} (\partial_\phi \phi) \hat{e}_\phi \quad (4-29) \\
&= (\partial_r \phi) \hat{e}_r + \frac{1}{r} (\partial_\vartheta \phi) \hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\phi \phi) \hat{e}_\phi.
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = \left(\partial_r \frac{1}{r} \right) \hat{e}_r = -\frac{\hat{e}_r}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (4-30)$$

Invariantes Volumenelement:

$$dV(\partial_r \vec{r}, \partial_\vartheta \vec{r}, \partial_\phi \vec{r}) = \underbrace{[\partial_r \vec{r}]}_{=1} \underbrace{[\partial_\vartheta \vec{r}]}_{=r} \underbrace{[\partial_\phi \vec{r}]}_{=r \sin \vartheta} d\rho d\phi dz = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\phi. \quad (4-31)$$

Beispiel Volumen einer Kugel mit Radius R:

$$V_{K(R)} = \int_{K(R)} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\phi = \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\frac{1}{3} R^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta}_{\substack{u = -\cos \vartheta, \\ du = -\sin \vartheta d\vartheta}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (4-32)$$

$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = \int_{-1}^1 du = 2$

Beispiel Potential einer Ladung in homogener Verteilung

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \int_{K(R)} dV' \frac{\overbrace{\rho(\vec{r}')}^{\rho}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3} \int_{K(R)} dV' \frac{1}{\sqrt{\vec{r}'^2 - 2\vec{r}' \cdot \vec{r} + \vec{r}^2}} \\
&= \frac{3Q}{4\pi R^3} \int_0^R r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2r'r \underbrace{\cos \vartheta}_{-u} + r^2}} \\
&= \frac{3Q}{2R^3} \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 du \frac{1}{\sqrt{r'^2 + 2r'ru + r^2}} = \frac{3Q}{2R^3} \int_0^R r'^2 dr' \frac{2\sqrt{r'^2 + 2r'ru + r^2}}{2r'r} \bigg|_{u=-1}^{u=1} \\
&= \frac{3Q}{2R^3} \int_0^R r'^2 dr' \frac{|r' + r| - |r' - r|}{r'r}.
\end{aligned} \tag{4-33}$$

Fall a:

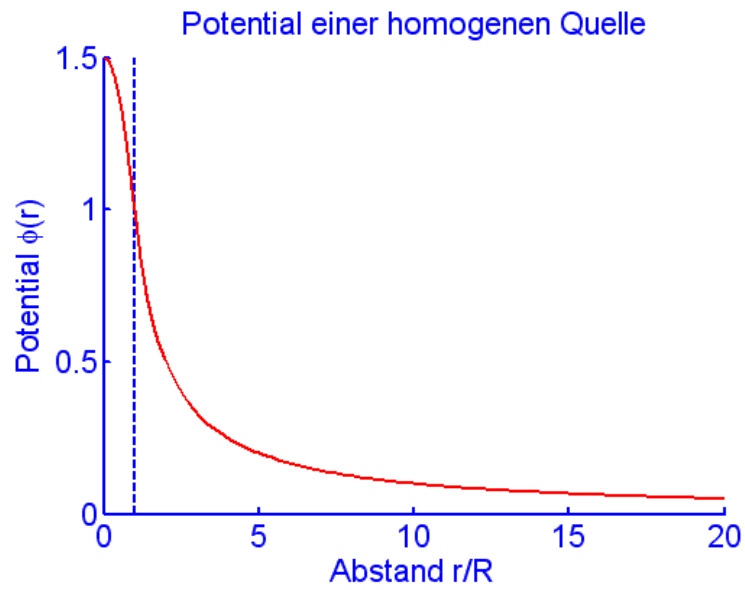
$$r > R \text{ (} r \text{ außerhalb):} \tag{4-34}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \frac{3Q}{2R^3} \int_0^R r'^2 dr' \frac{(r' + r) + (r' - r)}{r'r} = \frac{3Q}{2R^3} \int_0^R r'^2 dr' \frac{2r'}{r'r} = \frac{3Q}{2R^3} \underbrace{\frac{2}{r} \int_0^R r'^2 dr'}_{\frac{1}{3}R^3} \\
&= \frac{Q}{r}.
\end{aligned}$$

Fall b:

$$r < R \text{ (} r \text{ innerhalb):} \tag{4-35}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \frac{3Q}{2R^3} \left(\underbrace{\int_0^r r'^2 dr' \frac{(r' + r) - (r - r')}{r'r}}_{=\frac{2}{3}r^2 \text{ (siehe oben)}} + \int_r^R r'^2 dr' \frac{(r' + r) - (r' - r)}{r'r} \right) \\
&= \frac{3Q}{2R^3} \left(\frac{2}{3}r^2 + \int_r^R r'^2 dr' \frac{2r}{r'r} \right) = \frac{3Q}{2R^3} \left(\frac{2}{3}r^2 + 2 \underbrace{\int_r^R r' dr'}_{\frac{1}{2}(R^2 - r^2)} \right) \\
&= \frac{3Q}{2R^3} \left(\frac{2}{3}r^2 + (R^2 - r^2) \right) = \frac{3Q}{2R^3} \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right) \\
&= \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \left(= \frac{Q}{R} \text{ wie Fall a) } \right).
\end{aligned}$$



Potential einer homogenen Ladungsverteilung nach (4-35). Die Ladung ist homogen links der gestrichelten Linie verteilt.

Abb. 4-6

5. Komplexe Zahlen

Die imaginäre Einheit 'i'

Beim Lösen von quadratischen Gleichungen treten negative Wurzeln auf:

$$\begin{aligned} \text{Quadratische Gleichung: } & x^2 + 1 = 0; \\ \text{'Lösung': } & x = \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_?. \end{aligned} \quad (5-1)$$

Man führt die imaginäre Einheit ein:

$$\begin{aligned} \text{Imaginäre Einheit: } & i^2 = -1 \\ \text{also: } & x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i. \end{aligned} \quad (5-2)$$

Damit lassen sich alle Wurzeln ziehen (Fundamentalsatz der Algebra: Jedes reelle Polynom vom Grad N hat genau N komplexe Nullstellen).

Vorsicht:

$$\begin{aligned} \text{Falsch: } & \sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2; \\ \text{sondern: } & \sqrt{-1}\sqrt{-4} = i \cdot \sqrt{4}i = -2. \end{aligned} \quad (5-3)$$

Komplexe Zahlen

$$\text{Komplexe Zahl: } z \equiv \underbrace{a}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{b}_{\text{Imaginärteil}}. \quad (5-4)$$

Rechenregeln:

Die Regeln folgen aus der Definition der komplexen Zahl z :

$$\text{Gleichheit: } z = a + ib = a' + ib', \quad \text{g.d.w. } a = a' \text{ und } b = b'; \quad (5-5)$$

$$\text{Addition: } z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = \underbrace{a_1 + a_2}_a + i \underbrace{(b_1 + b_2)}_b = z;$$

$$\text{Multiplikation: } z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_a + i \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_b = z;$$

$$\text{wichtig: } z = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \text{ oder } z_2 = 0;$$

$$\text{Division: } z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a}{\underbrace{a^2 + b^2}_{a'^2 + b'^2}} + i \frac{-b}{\underbrace{a^2 + b^2}_{a'^2 + b'^2}} = z';$$

$$\text{Konjugation: } i^* \equiv -i, \Rightarrow z^* = a - ib.$$

$$\text{Betrag: } |z| \equiv \sqrt{z^* z} = \sqrt{(a - ib)(a + ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Gaußsche Zahlenebene

Wir führen ein neues Vektorprodukt zwischen Basisvektoren ein:

$$\hat{e}_x \circ \hat{e}_x = \hat{e}_x, \quad \hat{e}_x \circ \hat{e}_y = \hat{e}_y \circ \hat{e}_x = \hat{e}_y, \quad \hat{e}_y \circ \hat{e}_y = -\hat{e}_x. \quad (5-6)$$

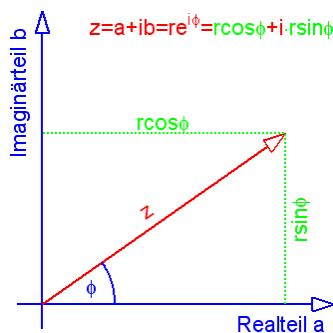
Damit kann man komplex Zahlen als Zahlendublets darstellen:

$$\text{Komplexe Zahl: } z = a\hat{e}_x + b\hat{e}_y = (a, b); \quad (5-7)$$

$$\begin{aligned} \text{Multiplikation: } z_1 \cdot z_2 &\equiv (a_1\hat{e}_x + b_1\hat{e}_y) \circ (a_2\hat{e}_x + b_2\hat{e}_y) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2)\hat{e}_x + (a_1b_2 + a_2b_1)\hat{e}_y \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1). \end{aligned}$$

Auch alle anderen Regeln aus (5-5) ergeben sich so aus (5-6). Vor allem kann man mit dem Vektorprodukt \circ auch durch Vektoren teilen. Eine Weiterverfolgung dieser Linie führt auf Quaternionen.

Graphische Veranschaulichung:



Komplexe Zahl z in der Gaußschen Zahlenebene (Dublets) und in Kreiskoordinaten (r, ϕ) .

Abb. 5-1

$$\text{Kreiskoordinaten: } z = a + ib = re^{i\phi}, \quad \text{mit } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \phi = \arctan \frac{b}{a}. \quad (5-8)$$

Für 2-D Graphiken lassen sich in dieser Darstellung sehr elegante Algorithmen entwickeln.

Beispiel:

$$\text{Drehung um Winkel } \alpha: \quad e^{i\alpha} z = re^{i(\phi+\alpha)}; \quad (5-9)$$

Spiegelung an

$$\text{der Ursprungsgeraden } g = \{t(\cos \alpha + i \sin \alpha), t \in \mathbb{R}\}: \quad e^{2i\alpha} z^* = e^{2i\alpha} r e^{-i\phi} = r e^{i(2\alpha-\phi)}.$$

Komplexe Funktionen:

Komplexe Funktionen sind für die Physik sehr wichtige Anwendung der komplexen Zahlen. Mit dieser neuen Multiplikation \circ kann man sehr elegant rechnen. Eine Weiterverfolgung dieser Linie führt auf die Funktionentheorie.

Beispiel Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist die Funktion, die beim Ableiten sich selber reproduziert:

Definition:
$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \\ f(0) = 1, \end{cases} \Rightarrow f(x) = e^x. \quad (5-10)$$

Taylor-Entwicklung um $x=0$:
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^x)^{(n)} \Big|_{x=0} \quad x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n;$$

Für imaginäres Argument:
$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n x^n \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \overbrace{i^{2n}}^{(-1)^n} x^{2n}}_{\cos x} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \overbrace{i^{2n}}^{(-1)^n} x^{2n+1}}_{\sin x} \\ &= \cos x + i \sin x = (\cos x, \sin x). \end{aligned}$$

Beispiel:

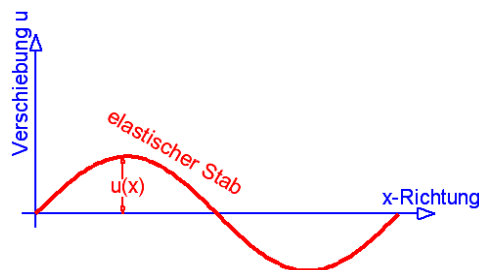
Moivresche Formel:
$$\underbrace{e^{i(\alpha+\beta)}}_{\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)} = \underbrace{e^{i\alpha}}_{(\cos \alpha + i \sin \alpha)} \underbrace{e^{i\beta}}_{(\cos \beta + i \sin \beta)}; \quad (5-11)$$

also: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ (Realteil),

und $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ (Imaginärteil).

Lösen von partiellen Differentialgleichungen mit komplexen Funktionen

Beispiel Wellengleichung für die Verschiebung u eines elastischen Stabes



Verschiebung $u(x,t)$ beschreibt den Zustand eines schwingenden elastischen Stabes.

Abb. 5-2

Schwingender Stab

(5-12)

Verschiebung: $u(x, t)$ Bewegungsgleichung: $\underbrace{\mu}_{\text{Massen-
dichte}} \ddot{u}(x, t) = \underbrace{\lambda}_{\text{Steifheit}} \underbrace{\Delta}_{=\partial_x^2 \text{ (Laplace
Operat.)}} u(x, t)$ Ansatz: $u(x, t) = \underbrace{A e^{i(kx - \omega t)}}_{\text{ebene Wellen}}$ Ableitungen: $\ddot{u} = -\omega^2 u, \quad \partial_x^2 u = -k^2 u$ eingesetzt: $-\mu \omega^2 u = -\lambda k^2$ Dispersionsrelation: $k(\omega) = \pm \underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}}_{c^{-1}} \omega$
(Ausbreitungsgeschwindigkeit)

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

DGL:	Bestimmungsgleichung für eine Funktion, in der die gesuchten Funktion und ihre Ableitungen vorkommt;	(6-1)
Gewöhnliche DGL:	Funktion einer Variablen;	
Partielle DGL:	Funktion mehrerer Variabel.	
Anfangs- oder Randbedingungen:	Spezielle Lösungen können nur im Zusammenhang mit Anfangs- oder Randbedingungen angegeben werden.	

Methode 1: Direkte Integration

Beispiel:

Newtonsche Bewegungsgleichung: $m\ddot{x}(t) = F(t);$ (6-2)

Integration über t:

$$\underbrace{\int_0^t dt' m\ddot{x}(t')}_{m\dot{x}(t)-c_1} = \underbrace{\int_0^t dt' F(t')}_{G(t)};$$

Zweite Integration:

$$mx(t) = \int_0^t dt' G(t') + c_1 t + c_2.$$

Einfachster Fall:

$F = 0$ (kraftfrei) $m\ddot{x}(t) = 0;$ (6-3)

Lösung: $mx(t) = c_1 t + c_2;$

Bestimmung von c_2 : $\underbrace{mx(0)}_{\equiv x_0} = c_2;$

Bestimmung von c_1 : $\left. \frac{d}{dt} mx(t) \right|_{t=0} = m \underbrace{\dot{x}(0)}_{v_0} = c_1;$

also: $x(t) = x_0 + v_0 t$ (Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit).

Freier Fall:

$$F = mg \text{ (konstant)} \quad m\ddot{x}(t) = mg; \quad (6-4)$$

Lösung:

$$mx(t) = \underbrace{\int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' g}_{\frac{1}{2}gt^2} + c_1 t + c_2 = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2;$$

also:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

(Bewegung mit konstanter Beschleunigung).

Methode 2: Ansatz

Harmonische Kraft

Integration über die unbekannte Kraft ist nicht möglich!

$$F = kx \text{ (linear)} \quad m\ddot{x}(t) = -kx(t); \quad (6-5)$$

Ansatz: $x(t) = Ae^{\lambda t}$, $A, \lambda \in \mathbb{C}$ (allgemein), oder speziell für diese Kraft

$$x(t) = \underbrace{a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)}_{\text{Harmonische Oszillation}} \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x;$$

Einsetzen: $-m\omega^2 = -k,$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}},$

Periodendauer: $\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k}};$

Konstanten: $\begin{cases} x|_{t=0} = b = x_0, \\ \dot{x}|_{t=0} = a\omega = v_0; \end{cases}$

Lösung:
$$x(t) = v_0 \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}_{\substack{\text{Vorzeichen von } \omega \\ \text{in } v_0}} + x_0 \underbrace{\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}_{\substack{\text{Vorzeichen von } \omega \\ \text{irrelevant}}};$$

Komplex: $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$ mit $A, B \in \mathbb{C}.$

Klassifizierung:

Lineare DGL:	Funktion x und Ableitung \dot{x}, \ddot{x} treten in der Potenz 1 auf (x^κ , und $\kappa=1$);	(6-6)
DGL n -ter Ordnung:	DGL enthält Ableitung bis zur Ordnung n in t ;	
Homogen:	Alle Terme der Gleichung enthalten die gesuchte Funktion oder eine ihrer Ableitungen.	

Allgemeine Regeln:

- Es gibt so viele linear unabhängige Lösungen, wie die DGL Ordnungen hat.
- Bei linearen DGL können diese Lösungen überlagert (superponiert) werden.
- Es gibt so viele Konstanten (Integrationskonstanten), wie die Gleichung Ordnungen hat oder wie viele linear unabhängige Lösungen sie hat.
- Die Konstanten werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

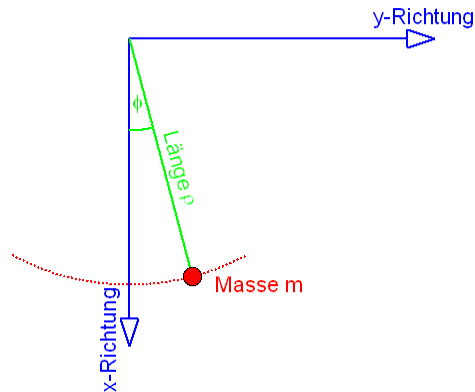
Lineare inhomogen DGLs

Lineare inhomogen DGLs n -ter Ordnung kann man lösen durch Überlagerung von n linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung plus einer beliebigen Lösung der inhomogenen Gleichung

Beispiel:	$\underbrace{x + \tau \dot{x}}_{\text{Homogener Anteil}} = \underbrace{a}_{\text{Inhomogenität}};$	(6-7)
Lösung der homogenen DGL:	$x = ce^{-t/\tau};$	
Lösung der inhomogenen DGL:	$x = a;$	
Allgemeine Lösung:	$x = ce^{-t/\tau} + a;$	
Anfangswert:	$x _{t=0} = c + a = x_0;$	
also:	$x = (x_0 - a)e^{-t/\tau} + a = x_0 e^{-t/\tau} + a(1 - e^{-t/\tau});$	
Asymptote:	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a.$	

Ein komplexeres Beispiel kommt weiter unten.

Mathematisches Pendel:



Ein Mathematisches Pendel besteht aus einem 'masselosen' Faden, hier der Länge ρ und einer Punktmasse m . Der Winkel zwischen x -Richtung und Faden definiert ϕ .

Abb. 6-1

Bewegungsgl.:
$$m\ddot{\vec{r}} = m \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}}_{\text{Schwerkraft}} = \underbrace{m \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Schwerkraft}} + \underbrace{m Z \hat{e}_\rho}_{\text{Zwangskraft für Kreisbewegung}} ; \quad (6-8)$$

Kreiskoordinaten:
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \end{pmatrix} = \rho \hat{e}_\rho,$$

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} \end{pmatrix} \hat{e}_\rho + \begin{pmatrix} -\rho\dot{\phi}^2 \\ \rho\ddot{\phi} \end{pmatrix} \hat{e}_\phi,$$

$$Z\hat{e}_\rho + g\hat{e}_x = Z\hat{e}_\rho + g \underbrace{\hat{e}_x \cdot \hat{e}_\rho}_{\cos \phi} \hat{e}_\rho + g \underbrace{\hat{e}_x \cdot \hat{e}_\phi}_{-\sin \phi} \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\rho\dot{\phi}^2 \\ \rho\ddot{\phi} \end{pmatrix} \hat{e}_\rho + \begin{pmatrix} \rho\ddot{\phi} \\ -\rho\dot{\phi}^2 \end{pmatrix} \hat{e}_\phi = \ddot{\vec{r}} ;$$

also:
$$\begin{cases} -g \sin \phi = \rho \ddot{\phi}, & (\text{Bewegungsgleichung}), \\ Z + g \cos \phi = -\rho \dot{\phi}^2, & (\text{Bestimmungsgleichung für Zwangskraft}). \end{cases}$$

Kleine Ausschläge:

Taylor-Entwicklung:
$$\begin{cases} -g \sin \phi = \rho \ddot{\phi}, \\ Z + g \cos \phi = -\rho \dot{\phi}^2, \end{cases} \xrightarrow{\phi \ll \pi} \begin{cases} -g \left(\phi - \frac{1}{6} \phi^3 + \dots \right) = \rho \ddot{\phi}, \\ Z + g \left(1 - \frac{1}{2} \phi^2 + \dots \right) = -\rho \dot{\phi}^2; \end{cases} \quad (6-9)$$

Linearisierung:
$$\begin{cases} \ddot{\phi} = -\frac{g}{\rho} \phi, \\ Z = -g + \left(\frac{1}{2} \phi^2 g - \rho \dot{\phi}^2 + \dots \right); \end{cases}$$

Lösung:
$$\begin{cases} \phi = A \sin(\omega t + \delta), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\rho}} \\ Z = -g + \left(\frac{1}{2} \phi^2 g - \rho \dot{\phi}^2 + \dots \right) \end{cases}$$

Gedämpfter Harmonischer Oszillator

Bewegungsgleichung:
$$m\ddot{x} = -Cx - \underbrace{\alpha \dot{x}}_{\text{Dämpfung}}; \quad (6-10)$$

Ansatz:
$$x = Ae^{\lambda t}, \quad A, \lambda \in \mathbb{C};$$

Einsetzen:
$$m\lambda^2 = -C - \alpha\lambda \quad (\text{Quadratische Gleichung});$$

Lösung:
$$\begin{aligned} \lambda^2 + \frac{\alpha}{m} \lambda + \frac{C}{m} &= 0, \\ \lambda^2 + 2\lambda \underbrace{\frac{\alpha}{2m}}_{\mu} + \left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 &= \left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 - \underbrace{\frac{C}{m}}_{\omega_0^2}, \\ (\lambda + \mu)^2 &= \mu^2 - \omega_0^2, \\ \lambda_{\pm} &= -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Schwache Dämpfung:
$$\mu^2 - \omega_0^2 < 0 \text{ oder } \alpha < 2\sqrt{mC}, \quad (6-11)$$

$$\lambda_{\pm} = -\mu \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}}_{\omega \in \mathbb{R}};$$

Lösung:
$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{(-\mu+i\omega)t} + Be^{(-\mu-i\omega)t} = e^{-\mu t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \\ &= a \cos \left(\omega t + \underbrace{\varphi}_{\text{Phase}} \right) e^{-\mu t}, \\ &\quad (\text{Gedämpfte Oszillation}). \end{aligned}$$

Starke Dämpfung: $\mu^2 - \frac{C}{m} > 0$ oder $\alpha > 2\sqrt{mC}$, (6-12)

$$\lambda_{\pm} = -\mu \pm \underbrace{\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}}_{\phi < \mu};$$

Lösung: $x(t) = Ae^{(-\mu-\phi)t} + Be^{(-\mu+\phi)t}$,
(Gedämpfte Bewegung ohne Oszillation).

Angetriebener harmonischer Oszillator mit Dämpfung

Bewegungsgleichung: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\Omega t)$, (1) (6-13)

Ergänzung: $\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \sin(\Omega t)$, (2)

(1) + i(2) $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = A_0 e^{i\Omega t}$, $(z = x + iy)$

Lösung: $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$.

Homogen: $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$; (6-14)

Ansatz: $z = e^{\lambda t}$,

also: $\lambda^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0$,

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2};$$

Homogene Lösung: $z = e^{-\gamma t} \left(c_+ e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + c_- e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Diese Anteile verschwinden nach einiger Zeit!

Inhomogen: $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = A_0 e^{i\Omega t}$; (6-15)

Ansatz: $z = z_0 e^{i\Omega t} = |z_0| e^{i(\Omega - \phi)t}$;

also: $z_0 (-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) = A_0$,

$$z_0 = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} = |z_0| e^{i\phi},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_0| = \sqrt{z_0 z_0^*} = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}, \quad (\text{Resonanzkurve, Maximum dicht bei } \omega_0); \\ \cos \phi = \frac{1}{2} \left(\overbrace{\frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} + \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega}}^{\operatorname{Re} z_0} \right) \overbrace{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}^{|z_0|^{-1}} \\ = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Zusammenhang } x \sim z: \quad x &= \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}\left(|z_0| e^{i(\Omega t + \phi)}\right) \\ &= |z_0| \cos((\Omega + \phi)t). \end{aligned} \quad (6-16)$$

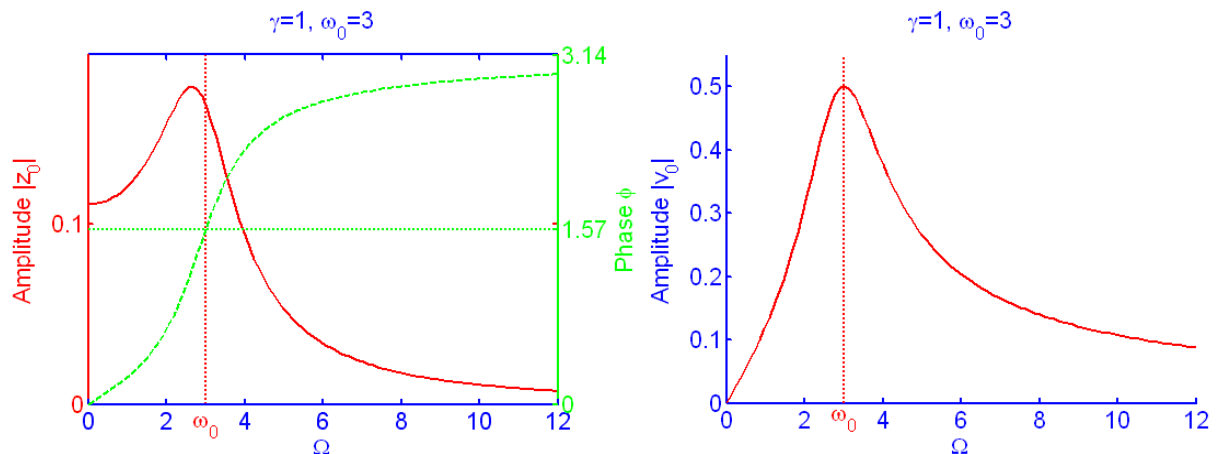
$$\text{Geschwindigkeit: } |\dot{z}_0| = |i\Omega z_0| = \Omega \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}{\Omega^2} + 4\gamma^2}} \quad (6-17)$$

Maxima der Resonanzkurven

$$\text{Amplitude um } \omega_0: \quad |z_0| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \xrightarrow{\omega_0 = \Omega} \frac{A_0}{2\gamma\Omega} \quad \begin{array}{l} \text{(maximal links} \\ \text{von } \omega_0) \end{array} \quad (6-18)$$

$$\text{Geschwindigkeit um } \omega_0: \quad |\dot{z}_0| = \frac{A_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}{\Omega^2} + 4\gamma^2}} \xrightarrow{\omega_0 = \Omega} \frac{A_0}{2\gamma} \quad \text{(maximal in } \omega_0)$$

Beim elektrischen Schwingkreis misst man sinnvollerweise nicht die Spannung, sondern den Strom, der proportional zur Bewegung der Ladungsträger ist. So erhält man exakte Werte für die Resonanzfrequenz.



Resonanzkurven eines angetriebenen, gedämpften harmonischen Oszillators. Links der Amplitude und Phase des Ausschlages und rechts der Betrag der Geschwindigkeit des Oszillators.

Abb. 6-2

Numerische Lösung gewöhnlicher DGLs- Euler-Verfahren

$$\text{Allgemeine Form einer Bewegungsgleichung: } \dot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)). \quad (6-19)$$

$$\begin{aligned} \text{Taylor-Entw. von } \vec{r}(t+h) \text{ um } t: \quad \vec{r}(t+h) &= \vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}\Big|_t h + O(h^2) \\ &\simeq \vec{r}(t) + \vec{F}(\vec{r}(t))h. \end{aligned} \quad (6-20)$$

Beispiel Harmonischer Oszillator:

$$\text{Harm. Oszill.: } \ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad (6-21)$$

$$\text{Neue Variable: } y \equiv \dot{x}, \text{ also } \dot{y} = \ddot{x};$$

$$\text{Einsetzen: } \underbrace{\dot{y}}_{\ddot{x}} + \omega^2 x = 0;$$

$$\text{Insgesamt: } \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} = \vec{F}(\vec{x});$$

$$\text{also} \quad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix}.$$

(6-20) kann man sehr gut mit dem Computer iterieren und die Schrittweite h so klein wählen, wie nötig (Konvergenz). In großen Schritte kann man (6-20) auch analytisch integrieren:

$$\text{Iterationsgleichung: } \begin{cases} x(t+h) = x(t) + hy(t), \\ y(t+h) = y(t) - h\omega^2 x(t); \end{cases} \quad (6-22)$$

$$h = 1s: \begin{cases} x(1s) = 1m + 1s \cdot 0 = 1m, \\ y(1s) = 0 - 1s \frac{\pi^2}{4s^2} \cdot 1m = -2.467m/s; \end{cases}$$

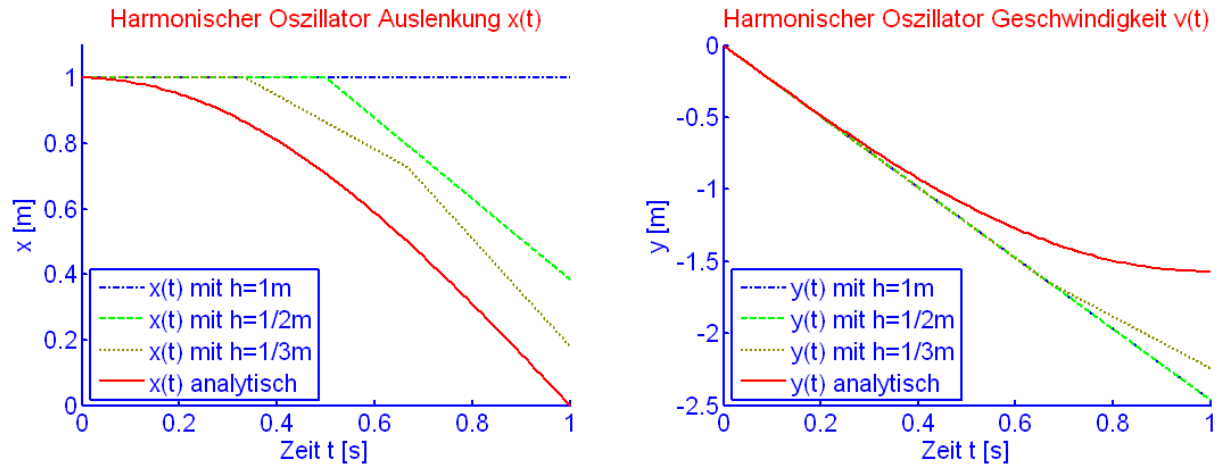
$$h = 1/2s: \begin{cases} x(\frac{1}{2}s) = 1m + \frac{1}{2}s \cdot 0 = 1m, \\ y(\frac{1}{2}s) = 0 - \frac{1}{2}s \frac{\pi^2}{4s^2} \cdot 1m = -1.234m/s, \\ x(1s) = 1m + \frac{1}{2}s \cdot (-1.234m/s) = 0.383m, \\ y(1s) = -1.234m/s - \frac{1}{2}s \frac{\pi^2}{4s^2} \cdot 1m = -2.467m/s; \end{cases}$$

$$h = 1/3s: \begin{cases} x(\frac{1}{3}s) = 1m + \frac{1}{3}s \cdot 0 = 1m, \\ y(\frac{1}{3}s) = 0 - \frac{1}{3}s \frac{\pi^2}{4s^2} \cdot 1m = -0.822m/s, \\ x(\frac{2}{3}s) = 1m + \frac{1}{3}s \cdot (-0.822m/s) = 0.726m, \\ y(\frac{2}{3}s) = -0.822m/s - \frac{1}{3}s \frac{\pi^2}{4s^2} \cdot 1m = -1.644m/s, \\ x(1s) = 0.726m + \frac{1}{3}s \cdot (-1.644m/s) = 0.178m, \\ y(1s) = -1.644m/s - \frac{1}{3}s \frac{\pi^2}{4s^2} \cdot 0.726m = -2.241m/s. \end{cases}$$

$$\text{exakte Werte: } \begin{cases} x(t) = 1m \cdot \cos(\omega t), \\ y(t) = -1m \cdot \omega \sin(\omega t); \end{cases} \quad (6-23)$$

$$\begin{cases} x(1s) = 1m \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0m, \\ y(1s) = -1m \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi}{2s}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = -1.570m/s; \end{cases}$$

Tabelle:	$h[s]$	$x(1s)[m]$	$y(1s)[m/s]$
	1	1	-2.467
	$\frac{1}{2}$	0.383	-2.467
	$\frac{1}{3}$	0.178	-2.241
	0	0	-1.570
Konvergenz:		↑ gut,	↑ schlecht.



Analytische und numerische Lösungen des Harmonischen Oszillators, links die Amplitude x und rechts die Geschwindigkeit v , beides mal über der Zeit t aufgetragen. Je kleiner die Schrittweite h ist, je mehr Schritte also gemacht werden, um so besser stimmt die numerische Näherung mit der analytischen Lösung überein. Die Amplitude links konvergiert dabei wesentlich besser als rechts die Geschwindigkeit v .

Abb. 6-3

Verbessertes Euler-Verfahren:

Taylor-Entw. von $\vec{r}(t+h)$ um t : (6-24)

mit

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{F}}(\vec{r}(t)) = \frac{1}{h} \left(\vec{F}(\vec{r}(t+h)) - \vec{F}(\vec{r}(t)) \right) + O(h^2)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\vec{F}(\vec{r}(t) + \vec{F}(\vec{r}(t))h) - \vec{F}(\vec{r}(t)) \right) + O(h^2);$$

ist

$$\vec{r}(t+h) = \vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)h + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)h^2 + O(h^3)$$

$$= \vec{r}(t) + \frac{1}{2} \left(\vec{F}(\vec{r}(t) + \vec{F}(\vec{r}(t))h) + \vec{F}(\vec{r}(t)) \right) h + O(h^3).$$

Zum Programmieren ist dieses Verfahren nicht wirklich aufwendiger als das gewöhnliche Euler-Verfahren, jedoch eine ganze Ordnung besser. Die Schrittweite kann wesentlich größer gewählt werden.

Man programmiert:

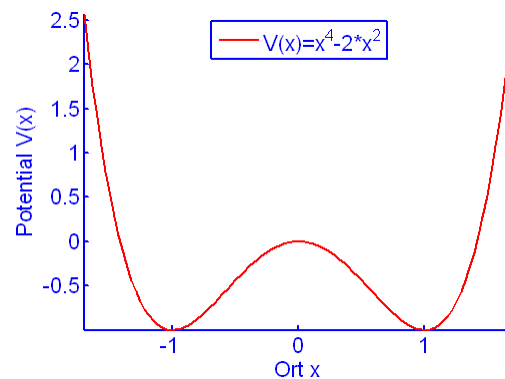
$$\vec{K}_1 = \vec{F}(\vec{r}(t)),$$

$$\vec{K}_2 = \vec{F}(\vec{r}(t) + \vec{K}_1 h),$$

$$\vec{r}(t+h) \approx \vec{r}(t) + \frac{h}{2} (\vec{K}_1 + \vec{K}_2).$$
(6-25)

Geht man noch zwei Ordnungen höher ($O(h^5)$), kommt man zu einem so berühmten Runge-Kutta-Verfahren.

Beispiel Potential mit 2 Minimas:



Potential mit zwei symmetrisch um den Ursprung liegenden Mulden (Minima):

Abb. 6-4

$$\text{Bewegungsgleichung: } \ddot{x} = -\underbrace{\partial_x (x^4 - 2x^2)}_{\text{Potential}} = \underbrace{-4x^3 + 4x}_{\text{Kraft}}; \quad (6-26)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -4x^3 + 4x \end{pmatrix} = \vec{F};$$

Numerische Lösung mit der Programiersprache 'Maple'

```
> restart;
[HELVETICA, 16]:
plots[setoptions](font=%, axesfont=%, labelfont=%, legendstyle=[font=%]):
```

Gleichung

```
> V:=x->x^4-x^2;
> DGL:='diff(x(t),t$2)=-diff(V(x),x)';
DGL:=lhs(%)=subs(x=x(t),rhs(%));
```

$$V := x \mapsto x^4 - x^2$$

$$DGL := \ddot{x}(t) = -V'(x)$$

$$DGL := \ddot{x}(t) = -4x(t)^3 + 2x(t)$$

Numerische Lösung mit Euler 2

```
> Euler_2_Step:=proc(q)
  local K1,K2;
  K1:=F(q);
  K2:=F(q+h*K1);
  evalf[4](q+h*(K1+K2)/2)
end:
> F:=q-><q[2],subs(x(t)=q[1],rhs(DGL))>;
'F(q)':'%':=%;
```

$$F(q) = \begin{bmatrix} q_2 \\ -4q_1^3 + 2q_1 \end{bmatrix}$$

```
> TMax:=5:N:=100:h:=TMax/N:
> Sol_Eul2[1]:=<1,0>;
for n from 2 to N do
  Sol_Eul2[n]:=Euler_2_Step(Sol_Eul2[n-1])
end do;
```

Numerische Lösung mit Maple-'dsolve'

```
> TMax:=40:N:=100;;
Sol_dsolve:=dsolve({DGL,x(0)=1,D(x)(0)=0},numeric,method=taylorseries,
  abserr=1e-23,output=Array(Vector(N,n->TMax*(n-1)/(N-1))));
```

Plots

Potential

```
> P1:=plot(V(x),x=-1.2..1.2,title="Potential",labels=["Position x","V(x)"]):
```

Bahnkurve aus Euler 2

```
> Eul2_X:=Vector(N,n->[(n-1)*h,Sol_Eul2[n][1]]):
```

```
Eul2_V:=Vector(N,n->[(n-1)*h,Sol_Eul2[n][2]]):
```

```
> P2:=plots[display](
```

```
  plot(Eul2_X,color="Blue",legend=["x(t)"]),
```

```
  plot(Eul2_V,color="Green",legend=["v(t)"]),
```

```
  labels=["Zeit
```

```
t","x(t),v(t)",labeldirections=[horizontal,vertical],title="Anharmonischer Oszillator (Euler 2)"]):
```

Bahnkurve aus 'dsolve'

```
> Map_X:=Vector[row](N,n->[Sol_dsolve[2,1][n,1],Sol_dsolve[2,1][n,2]]):
```

```
Map_V:=Vector[row](N,n->[Sol_dsolve[2,1][n,1],Sol_dsolve[2,1][n,3]]):
```

```
> P3:=plots[display](
```

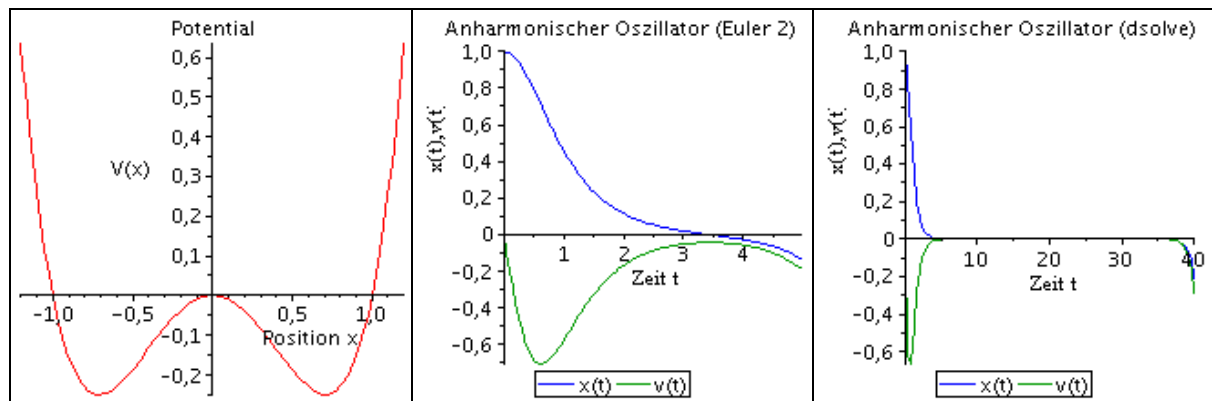
```
  plot(Map_X,color="Blue",legend=["x(t)"]),
```

```
  plot(Map_V,color="Green",legend=["v(t)"]),
```

```
  labels=["Zeit
```

```
t","x(t),v(t)",labeldirections=[horizontal,vertical],title="Anharmonischer Oszillator (dsolve)"]):
```

```
> plots[display](<P1|P2|P3);
```



Zweimuldenpotential links und numerische mit Euler2 (mitte) und mit Maple-'dsolve' (rechts) berechnete Bahnkurven.

Abb. 6-5

Aufgrund der Energieerhaltung sollte die Bahnkurve in Abb. 6-5 theoretisch auf dem Maxima des Potentials bei $x=0$ enden. Dieser Punkt ist aber labil, so dass die Bahnkurve früher (Euler 2) oder später (dsolve) diesen Punkt wieder verlässt. Ob der weitere Verlauf der Bahnkurve nach links ($x<0$) oder rechts ($x>0$) geht, hängt vom Verfahren, von der Computersoftware und der Hardware ab.

Auch im Experiment ist das langfristige Verhalten einer Kugel in der vorgegebenen Geometrie nicht vorhersagbar. Im labilen Punkt reagiert die Kugel sensibel auf aller kleinste Kräfte, die experimentell nicht erfasst werden können. Der Begriff 'Bahnkurve' wird bedeutungslos. Das führt über die Grenzen der klassischen Mechanik hinaus. In der Chaostheorie werden die Bahnkurven durch Attraktoren ersetzt und in der Quantenmechanik durch Wahrscheinlichkeitsströme.

7. Partielle Differentialgleichungen (Wellengleichung)

Partielle Differentialgleichungen sind Gleichungen für Felder mit Ableitungen nach den Ortskoordinaten und nach der Zeit. In der Physik ist besonders die Wellengleichung relevant.

Wellengleichung für einen gebogenen Stab:

Verschiebungsfeld: $u(x, t), \quad (u' \equiv \frac{\partial}{\partial x} u, \quad \dot{u} \equiv \frac{\partial}{\partial t} u); \quad (7-1)$

Spannungskraftfeld: $F(x, t) = \underbrace{\lambda}_{\text{Spannungsmodul}} \underbrace{u''(x, t)}_{\text{Spannung im Stab}};$

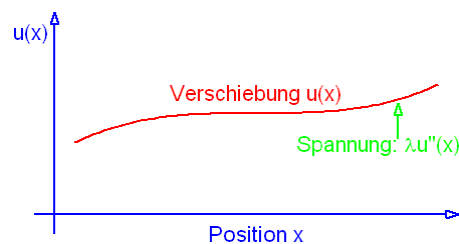
Beispiele: $u(x, t) = a + bx \Rightarrow u''(x, t) = 0, \quad (\text{keine Spannungskraft}),$
 $u(x, t) = \frac{1}{2} ax^2 \Rightarrow u''(x, t) = a, \quad (\text{homogene Spannungsk.});$

Wellengleichung: $m \ddot{u}(x, t) = \lambda u''(x, t).$

Jede Stelle des Stabes gehorcht hier dem Gesetz *Kraft = Masse · Beschleunigung*. Benachbarte Stellen des Stabes sind durch die Ortsableitung

Ortsableitung: $u''(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t)}{h^2} \quad (7-2)$

miteinander verknüpft. Je mehr die Auslenkung des Stabes vom Mittelwert der Nachbarstellen abweicht, umso größer ist die Spannungskraft.



Die Lage und Verbiegung eines Stabes wird durch das Verschiebungsfeld $u(x)$ beschrieben. Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Spannung im Stab proportional zur zweiten Ableitung der Verschiebung.

Abb. 7-1

Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Phase: $\phi \equiv x \pm vt;$ (7-3)

Allgemeine Lösung: $u(x, t) = f(\phi)$, beliebige Funktion der Phase;

Beweis:

$$\begin{cases} \dot{f}(\phi) = \frac{\partial f}{\partial \phi} \dot{\phi}, \\ \ddot{f}(\phi) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \underbrace{(\dot{\phi})^2}_{v^2} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \ddot{\phi}_0; \\ f'(\phi) = \frac{\partial f}{\partial \phi} \phi', \\ f''(\phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \phi' \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \underbrace{\phi'^2}_1 + \frac{\partial f}{\partial \phi} \underbrace{\phi''}_0; \end{cases}$$

also: $\ddot{f} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = v^2 f''$

und $u(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt),$

mit $v = \sqrt{\frac{\lambda}{m}};$

Typisches Beispiel,
ebene Wellen: $u(x, t) = Ae^{ik(x+vt)} + Be^{ik(x-vt)} = Ae^{i(kx+\omega t)} + Be^{i(kx-\omega t)}, \quad \begin{pmatrix} k \in \mathbb{R} \\ \omega \equiv kv \end{pmatrix}.$

Phasengeschwindigkeit

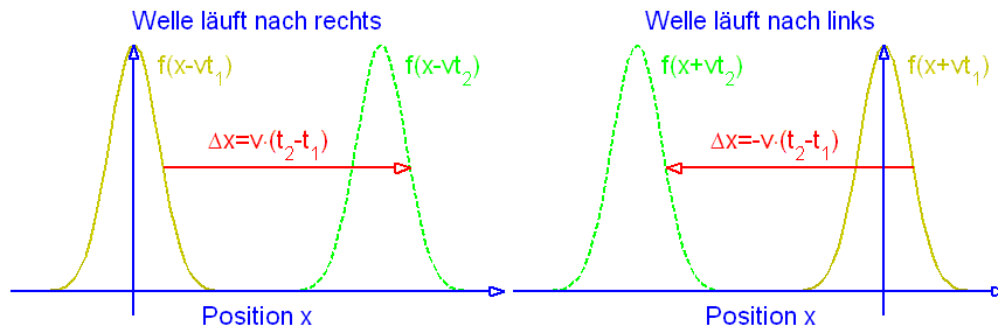
Wie schnell bewegt sich ein Punkt mit fester Amplitude des Wellenfeldes f ? Wir gehen vom Phasenfeld über zur Bahnkurve eines Punktes konstanter Phase:

Phase: $f(\phi(x, t)) = \text{constant} \rightarrow f(\phi(x(t), t))$ (7-4)

also auch $\phi(x(t), t) = x(t) \pm vt = \text{const},$

bzw. $x(t) = \text{const} \mp vt,$

Phasengeschwindigkeit $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(\text{const} \mp vt) = \mp v.$



Phasengeschwindigkeit v bei rechtslaufenden und linkslaufenden Wellen. Betrachtet wird die Bewegung eines Punktes konstanter Amplitude des Wellenfeldes.

Abb. 7-2

Weitere Methode: Trennung der Variablen (hier für einen eingespannten Stab)

Wir haben also zwei einfach zu lösende gewöhnliche DGL's erhalten. Die Konstanten müssen nun durch Anfangs- und Randbedingungen festgelegt werden. Wir betrachten die

$$\text{System: } \begin{cases} m\ddot{u}(x,t) = \lambda u''(x,t), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad (\text{Randbedingungen}); \end{cases} \quad (7-5)$$

$$\text{Trennung: } u(x,t) = v(x)w(t),$$

$$\text{Bewegungsgl: } \frac{m}{\lambda} \frac{\ddot{u}(x,t)}{u(x,t)} = \frac{u''(x,t)}{u(x,t)},$$

$$\underbrace{\frac{m}{\lambda} \frac{v(x)\ddot{w}(t)}{v(x)w(t)}}_{\text{Funktion nur von } t} = \underbrace{\frac{v''(x)w(t)}{v(x)w(t)}}_{\text{Funktion nur von } x} = \underbrace{-k^2}_{\text{Konstante}},$$

$$\text{also: } v''(x) = -k^2 v(x) \Rightarrow v(x) = a_x \sin(kx) + b_x \cos(kx),$$

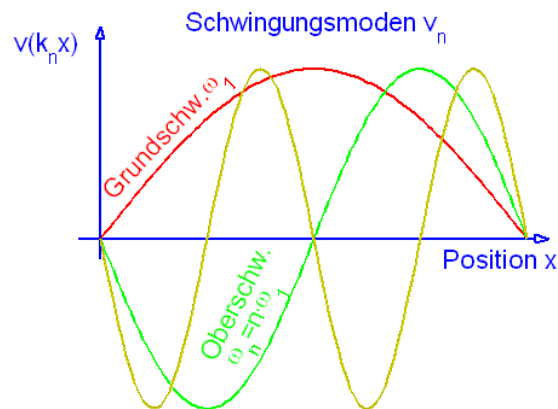
$$\ddot{w}(t) = -\underbrace{\frac{\lambda k^2}{m}}_{\equiv \omega^2} w(t) \Rightarrow w(t) = a_t \sin(\omega t) + b_t \cos(\omega t);$$

Wir haben also zwei einfach zu lösende gewöhnliche DGL's erhalten. Die Konstanten müssen nun durch Anfangs- und Randbedingungen festgelegt werden. Wir betrachten die

$$\text{Randbedingungen: } v(0) = v(L) = 0 \Rightarrow v(x) = a_x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}; \quad (7-6)$$

$$\text{also: } u(x,t) = v(x)w(t),$$

$$\text{Bewegungsgl: } u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin(k_n x) (a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t))}_{\text{Schwingungsmoden}}.$$



Schwingungsmoden eines links und rechts eingespannten Stabes. Jede Mode n hat $n-1$ Knoten und schwingt mit einer Frequenz $f_n = \omega_n / 2\pi$

Abb. 7-3

Weitere Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen

Um die Ortsableitungen durchführen zu können, braucht man eine Darstellung der Ortsfunktion, etwa durch Entwicklung nach einem vollständigen Orthonormalsystem oder durch ein Gitter.

Entwicklung nach vollständigem Orthonormalsystem: (7-7)

Beispiel:

$$u(x, t) = \sum c_n(t) \underbrace{\sin(n\pi x)}_{\text{Vollst. Orthonorm. System}},$$

Ortsableitung:

$$u''(x, t) = -\sum n^2 \pi^2 c_n(t) \sin(n\pi x);$$

Finite Differenzen:

$$\text{Entwicklung: } u(x, t) \rightarrow u(x_n, t) = u_n(t), \quad \begin{cases} x_n = x_0 + \underbrace{\frac{x_N - x_0}{N-1}}_h (n-1), & n = 1..N, \\ u_n(t) \equiv u(nh, t); \end{cases}$$

$$\text{Ableitung: } u''(x, t) \rightarrow \frac{u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) - 2u_n(t)}{h^2}.$$

Die Ortsableitungen können durchgeführt werden und man erhält für die Entwicklungskoeffizienten $c_n(t)$ oder die Gitterpunkte $u_n(t)$ ein gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

8. Fourier-Transformation

Wir betrachten zunächst eine

$$\text{periodische Funktion: } f(t+T) = f(t). \quad (8-1)$$

Die Idee ist, das sie sich durch eine Überlagerung periodischer, harmonischer Schwingungen darstellen lässt.

$$\begin{aligned} f(t) &\approx A_0 + A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_N \cos(N\omega t + \varphi_N) \\ &= \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\omega t + \varphi_n). \end{aligned} \quad (8-2)$$

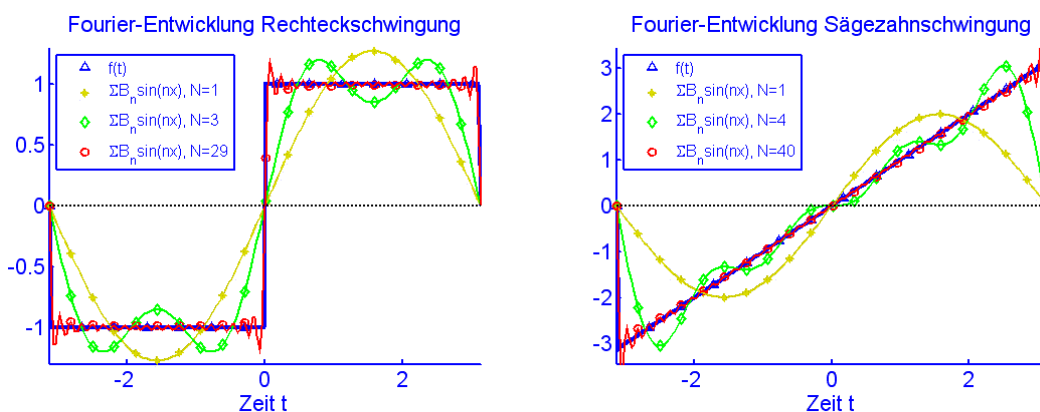
Analogie:

$$\text{Entwicklung eines Vektors nach Basisvektoren: } \vec{r} = \sum_{n=1}^3 x_n \hat{e}_n; \quad (8-3)$$

Entwicklung einer Funktion nach Polynomen
(Taylor-Entwicklung):

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dt^n} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^n.$$

Beispiel Rechteckschwingung und Sägezahnsschwingung



Approximation einer so genannten Rechteckschwingung (links) und einer Sägezahnsschwingung (rechts) durch Überlagerung von Sinus-Funktionen in verschiedener Ordnung.

Abb. 8-1

Umschreibungen:

$$\text{mit } \cos(n\omega t + \varphi_n) = \cos(\varphi_n) \cos(n\omega t) - \sin(\varphi_n) \sin(n\omega t) \quad (8-4)$$

$$\text{und } a_n = \cos(\varphi_n) A_n, \quad b_n = -\sin(\varphi_n) A_n$$

ist

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum_{n=0}^N \left(a_n \underbrace{\cos(n\omega t)}_{\frac{1}{2}(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t})} + b_n \underbrace{\sin(n\omega t)}_{\frac{1}{2i}(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N ((a_n - ib_n) e^{in\omega t} + (a_n + ib_n) e^{-in\omega t}); \end{aligned}$$

oder mit ganzzahligen Indizes

$$f(t) \approx \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t}. \quad (8-5)$$

Fourier-Reihen

Berechnung der Koeffizienten c_n :

$$\text{Periodendauer: } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8-6)$$

$$\text{Nebenrechnung: } \int_0^T dt e^{i(n-m)\omega t} = \begin{cases} T & \text{für } n = m, \\ \frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega} \Big|_0^T = \frac{e^{i(n-m)\omega T} - 1}{i(n-m)\omega} = 0 & \text{sonst;} \end{cases} = T \delta_{mn}$$

$$\text{Multiplikation, Integration: } \int_0^T dt e^{-im\omega t} f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n \underbrace{\int_0^T dt e^{i(n-m)\omega t}}_{=T\delta_{mn}} = c_m T \quad (8-7)$$

also:

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-in\omega t} f(t) \quad \text{und} \\ f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t}. \end{cases}$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit der Oberwellen: } \omega_n = n\omega = 2\pi \frac{n}{T}.$$

Reelle Funktionen

$$f \text{ reell: } f = f^* \Rightarrow \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-N}^N c_n^* e^{-in\omega t} = \sum_{n=-N}^N c_{-n}^* e^{in\omega t} \Rightarrow c_n^* = c_{-n}; \quad (8-8)$$

$$\begin{aligned} \text{also: } f &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n e^{in\omega t} + c_n^* e^{-in\omega t}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N \left(\underbrace{c_n}_{a_n + ib_n} \underbrace{e^{in\omega t}}_{\frac{1}{2}(\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t))} + \underbrace{c_n^*}_{a_n - ib_n} \underbrace{e^{-in\omega t}}_{\frac{1}{2}(\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t))} \right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega t) - b_n \sin(n\omega t)). \end{aligned}$$

Beispiele:

Rechteckschwingung

$$\begin{aligned} \text{Funktion: } f(t) &= \begin{cases} -1 & \text{für } t \in [-\pi, 0], \\ 0 & \text{für } t \in \{-\pi, 0, \pi\}, \\ 1 & \text{für } t \in [0, \pi]. \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{Periodendauer} & T = 2\pi, \\ \text{Winkelgeschw.} & \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \end{array} \quad (8-9) \end{aligned}$$

$$\text{Koeffizienten: } c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) = 0;$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\underbrace{2\pi}_{=T}} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) e^{-int} = \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{\int_0^{\pi} dt e^{-int}}_{-\frac{1}{in} e^{-int} \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{in}((-1)^n - 1)} - \underbrace{\int_{-\pi}^0 dt e^{-int}}_{-\frac{1}{in} e^{-int} \Big|_{-\pi}^0 = -\frac{1}{in}(1 - (-1)^n)} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{in} \underbrace{((-1)^n - 1)}_{-2, 0, -2, 0, \dots} = \frac{2}{i\pi} \left(\underbrace{\dots - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{1}}_{n < 0} + \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots}_{n > 0} \right). \end{aligned}$$

Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{i\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots} e^{i(2n-1)t} - \underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots} e^{-i(2n-1)t} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)t) \quad \left(\text{wegen } \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = \sin x \right). \end{aligned}$$

Sägezahnsschwingung

Funktion:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{für } t \in \{-\pi, \pi\}, \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{Periodendauer} & T = 2\pi, \\ \text{Winkelgeschw.} & \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \end{array} \quad (8-10)$$

Koeffizienten:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\underbrace{2\pi}_T} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 0, \\ 2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) e^{-int} = \int_{-\pi}^{\pi} dt t e^{-int} = \underbrace{\left(\frac{int+1}{n^2} e^{-int} - \frac{-in\pi+1}{n^2} e^{in\pi} \right)}_{\substack{\frac{int+1}{n^2} e^{-int} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ \frac{2\pi i}{n} (-1)^n}} = \underbrace{\left(\frac{in\pi+1}{n^2} e^{-in\pi} - \frac{-in\pi+1}{n^2} e^{in\pi} \right)}_{\frac{2\pi i}{n} (-1)^n} \\ &= 2\pi i \frac{(-1)^n}{n}; \end{aligned}$$

Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} f(t) &= i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} e^{int} - \frac{(-1)^n}{n} e^{-int} \right) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt). \end{aligned}$$

Aperiodische Vorgänge

Wir kommen zu aperiodischen Vorgängen, wenn wir die Periodendauer immer länger machen:

Oberwellen:

$$\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}; \quad (8-11)$$

Differenz benach-
barter Oberwellen:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T};$$

also:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta\omega = d\omega$$

und

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t} & \rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega c(\omega) e^{i\omega t}; \\ c_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-in\omega t} f(t) & \rightarrow c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}. \end{cases}$$

Normierung:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \underbrace{c(\omega)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt' f(t') e^{-i\omega t'}} e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dt' d\omega f(t') e^{i\omega(t-t')} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}}_{2\pi \delta(t-t')} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

siehe Anhang 1 am Schluß
des Kapitels!

Beispiel

$$\text{Fourier-Transformierte der Gaußfunktion } f(x) = e^{-(x/x_0)^2}. \quad (8-12)$$

Fourier-Transformation

Transformierte:

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-ikx} dx \quad (8-13)$$

Partielle Integration:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-ikx} dx}_{= e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0} = - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x_0^2} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-ikx} dx}_{\frac{1}{i} \frac{2}{x_0^2} \frac{\partial}{\partial k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{i} \frac{2}{x_0^2} \frac{\partial}{\partial k} c(k) \sqrt{2\pi}} - \underbrace{ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-ikx} dx}_{c(k) \sqrt{2\pi}}$$

DGL:

$$c'(k) = \frac{ix_0^2}{2} (ik) c(k) = -\frac{x_0^2 k}{2} c(k)$$

Lösung:

$$c(k) = c_0 e^{-\left(\frac{x_0 k}{2}\right)^2}$$

Normierung:

$$1 = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x_0 k}{2}\right)^2} dk}_{\substack{= 2\sqrt{\pi} \\ x_0}} \quad (\text{siehe Anhang 2 am Schluß})$$

also:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0 \sqrt{\pi} \frac{2}{x_0} = c_0 \frac{\sqrt{2}}{x_0}$$

und:

$$c(k) = \frac{x_0}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{x_0 k}{2}\right)^2}$$

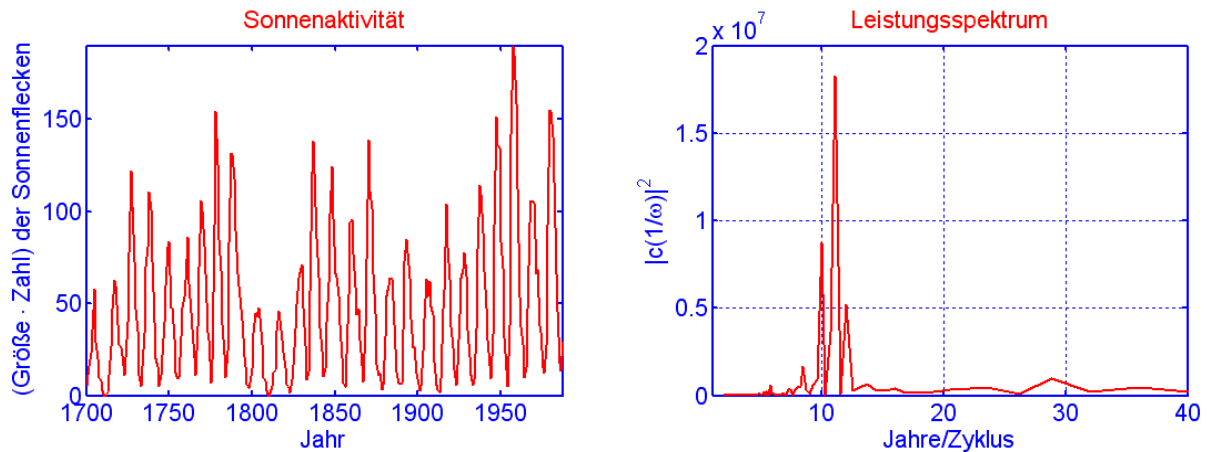
Vektorrauminterpretation

Analogie zu räumlichen Vektoren:

	Ortsraum	Funktionenraum
Basis:	\hat{e}_k ,	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$;
Inneres Produkt (Orthogonalität):	$\hat{e}_k \cdot \hat{e}_j = \delta_{kj}$,	$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ilx} \right) = \delta(k-l)$;
Darstellung von Vektoren:	$\vec{r} = a_k \hat{e}_k$,	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx c(k) e^{ikx}$.

Spektralanalyse:

Sehr wichtig für die Untersuchung vor allem linearer Systeme (Astronomie, Atom-, Kernphysik, Elektronik, Medizin, ...). Das Leistungsspektrum $|c(\omega)|^2$ zeigt, wie stark einzelne Frequenzen in einem Signal vorhanden sind.



Sonnenaktivität als Funktion der Jahreszahl (links) und das Leistungsspektrum dieser Funktion (rechts) als Funktion der Jahre/Zyklus (siehe unten).

Abb. 8-2

Im Leistungsspektrum von Abb. 8-2 ist nicht $|c(\omega)|^2$, sondern $\left|c\left(\frac{1}{\omega}\right)\right|^2$ aufgetragen, so dass das Argument nicht Zyklen/Jahr sondern Jahre/Zyklus direkt abgelesen werden kann.

Lösung linearer Differentialgleichungen

Die Basisfunktionen der Fourier-Analyse sind Eigenfunktion der Differentiation:

$$\partial_x^2 \sin(kx) = -k^2 \sin(kx), \quad \partial_x^2 \cos(kx) = -k^2 \cos(kx), \quad \partial_x e^{ikx} = ike^{ikx}. \quad (8-15)$$

Daher kann man vor allem linear Differentialgleichungen aller Art (auch partielle) mit Hilfe der Fourier-Analyse in rein algebraische Gleichungen umwandeln.

Beispiel Wellengleichung für das elektrische Potential:

$$\text{Wellengleichung: } \partial_t^2 \varphi - \frac{1}{\epsilon\mu} \partial_x^2 \varphi = 0 \quad (8-16)$$

$$\text{Ansatz: } \varphi(x, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int dk c(k) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\text{Einsetzen: } \underbrace{\int dk \left((-i\omega)^2 - \frac{(ik)^2}{\epsilon\mu} \right) c(k) e^{i(kx - \omega t)}}_{=0} = 0$$

$$\text{also } (-i\omega)^2 - \frac{(ik)^2}{\epsilon\mu} = 0, \quad \omega = \pm \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}}_{=c} k$$

$$\text{Feld: } \varphi(x, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int dk c(k) e^{ik(x - ckt)}$$

Anhang1: Beweis von $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} = 2\pi\delta(k)$

Hilfsmittel:
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \varepsilon x^2} \quad (8-17)$$

mit
$$\begin{aligned} ikx - \varepsilon x^2 &= -\varepsilon \left(x^2 - 2x \frac{ik}{2\varepsilon} \right) = -\varepsilon \left(x^2 - 2x \frac{ik}{2\varepsilon} + \left(\frac{ik}{2\varepsilon} \right)^2 \right) + \varepsilon \left(\frac{ik}{2\varepsilon} \right)^2 \\ &= -\varepsilon \left(x - \frac{ik}{2\varepsilon} \right)^2 - \frac{k^2}{4\varepsilon} \end{aligned}$$

also:
$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{k^2}{4\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\varepsilon \left(x - \frac{ik}{2\varepsilon} \right)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{k^2}{4\varepsilon}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\varepsilon u^2}}_J \quad \left(u = x - \frac{ik}{2\varepsilon} \right)$$

Zwischen-
rechnung:
$$\begin{aligned} J^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\varepsilon u^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\varepsilon v^2} = \int_{-\infty}^{\infty} du dv e^{-\varepsilon(u^2+v^2)} = \int_0^{\infty} \overbrace{r dr}^{\text{Polarkoordinaten}} e^{-\varepsilon r^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{\varepsilon} \underbrace{\int_0^{\infty} d\rho e^{-\rho}}_{-\varepsilon^{-\rho} \Big|_0^{\infty} = 1} = \frac{\pi}{\varepsilon} \end{aligned}$$

also:
$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}}_J e^{-\frac{k^2}{4\varepsilon}}$$

Das ist eine Darstellung der δ -Distribution:

es ist:
$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-\frac{k^2}{4\varepsilon}} \quad \begin{cases} = 0 & \text{für } k \neq 0; \\ \rightarrow \infty & \text{für } k = 0; \end{cases} \quad (8-18)$$

und
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{k^2}{4\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \underbrace{\int_0^{\infty} r dr e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}}_{\substack{\rho = \frac{r^2}{4\varepsilon}, \quad d\rho = \frac{r}{2\varepsilon} dr \\ \text{Trick wie oben}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \underbrace{\int_0^{\infty} d\rho e^{-\rho}}_{-\varepsilon^{-\rho} \Big|_0^{\infty} = 1} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi = 2\pi \end{aligned}$$

also:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} = I = 2\pi\delta(k)$$

Anhang 2

Integral: (8-19)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x_0 k}{2}\right)^2} dk &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 (k^2 + l^2)} dk dl} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 \rho^2} \rho d\rho d\varphi} \\
 &= \sqrt{-2\pi \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x_0}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\rho} e^{-\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 \rho^2} d\rho} = \sqrt{-\pi \left(\frac{2}{x_0}\right)^2 e^{-\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 \rho^2} \Big|_0^{\infty}} \\
 &= \sqrt{\pi \left(\frac{2}{x_0}\right)^2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{x_0}
 \end{aligned}$$

9. Krummlinige Koordinaten Ergänzung

Orthogonale Basis für Krummlinige Koordinaten:

Definition: $\hat{e}_{q_i} \equiv \frac{\partial_{q_i} \vec{r}}{|\partial_{q_i} \vec{r}|}$, $\left(\text{Normierung: } \hat{e}_{q_i} \cdot \hat{e}_{q_i} = \frac{\partial_{q_i} \vec{r}}{|\partial_{q_i} \vec{r}|} \cdot \frac{\partial_{q_i} \vec{r}}{|\partial_{q_i} \vec{r}|} = \frac{(\partial_{q_i} \vec{r})^2}{(\partial_{q_i} \vec{r})^2} = 1 \right);$ (9-1)

Orthogonale Basis: $\hat{e}_{q_i} \cdot \hat{e}_{q_j} = \delta_{ij}$.

Invariantes Volumen

$$\begin{aligned} V(\partial_{q_1} \vec{r}, \partial_{q_2} \vec{r}, \partial_{q_3} \vec{r}) &= \underbrace{(\partial_{q_1} \vec{r} \times \partial_{q_2} \vec{r}) \cdot \partial_{q_3} \vec{r}}_{\text{Spatprodukt}} = \varepsilon_{ijk} \partial_{q_1} x_i \partial_{q_2} x_j \partial_{q_3} x_k = \det(\partial_{q_1} \vec{r}, \partial_{q_2} \vec{r}, \partial_{q_3} \vec{r}) \\ &= |\partial_{q_1} \vec{r}| |\partial_{q_2} \vec{r}| |\partial_{q_3} \vec{r}| \underbrace{\det(\hat{e}_{q_1}, \hat{e}_{q_2}, \hat{e}_{q_3})}_{=1} \\ &\quad \text{(für rechthändiges System)} \end{aligned} \quad (9-2)$$

Invariantes Volumenelement

$$dV(\partial_{q_1} \vec{r}, \partial_{q_2} \vec{r}, \partial_{q_3} \vec{r}) = V(\partial_{q_1} \vec{r}, \partial_{q_2} \vec{r}, \partial_{q_3} \vec{r}) dq_1 dq_2 dq_3 = |\partial_{q_1} \vec{r}| |\partial_{q_2} \vec{r}| |\partial_{q_3} \vec{r}| dq_1 dq_2 dq_3. \quad (9-3)$$

Gradient

Differential $d\varphi = \partial_{q_i} \varphi dq_i$ (9-4)

und $d\varphi = (\vec{\nabla} \varphi) \cdot d\vec{r} = (O_{q_i} \hat{e}_{q_i}) \cdot \underbrace{\partial_{q_i} \vec{r}}_{|\partial_{q_i} \vec{r}| \hat{e}_{q_i}} dq_i = \underbrace{O_{q_i} |\partial_{q_i} \vec{r}|}_{\partial_{q_i} \varphi} dq_i,$

also: $O_{q_i} = \frac{\partial_{q_i} \varphi}{|\partial_{q_i} \vec{r}|},$

und $\vec{\nabla} \varphi = \hat{e}_{q_i} \frac{\partial_{q_i} \varphi}{|\partial_{q_i} \vec{r}|}.$

$$\vec{\nabla} \varphi = \hat{e}_{q_i} \frac{\partial_{q_i} \varphi}{\left| \frac{\partial}{\partial_{q_i}} \vec{r} \right|} : \quad (9-5)$$

Kartesische Koordinaten: $\vec{\nabla} \varphi = \hat{e}_{x_i} \partial_{x_i} \varphi;$

Zylinderkoordinaten: $\vec{\nabla} \varphi = \hat{e}_\rho \partial_\rho \varphi + \hat{e}_\rho \frac{1}{\rho} \partial_\phi \varphi + \hat{e}_z \partial_z \varphi;$

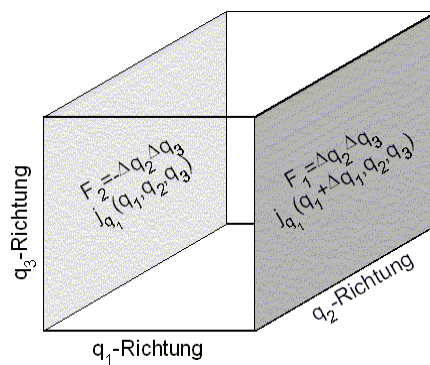
Kugelkoordinaten: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \hat{e}_r \partial_r \varphi + \hat{e}_\vartheta \frac{1}{r} \partial_\vartheta \varphi + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\phi \varphi.$

Divergenz oder Quellstärke

Kontinuitätsgleichung

Grundlage der Erhaltung von Ladung, Materie, Wahrscheinlichkeit, ...

Erhaltung von Q : $\frac{dQ}{dt} = \int dV \dot{\rho} = - \oint d\vec{f} \cdot \vec{j} \quad (\vec{j} : \text{Strom durch Oberfläche}). \quad (9-6)$



Zur Ableitung der Divergenz werden hier speziell die zwei Flächen F_1 und F_2 betrachtet, die beide eine q_1 - q_2 -Ebene aufspannen. Die Flächennormalenvektoren stehen in q_1 -Richtung, der auf F_1 zeigt in positiver Richtung, der auf F_2 zeigt in negative Richtung.

Abb. 9-1

Definition der Divergenz (Quellstärke) und Umformulierung zum gewohnten Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &\equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(V)} d\vec{f} \cdot \vec{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^6 \int_{F_i} d\vec{f} \cdot \vec{j} \\
 &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left(\underbrace{V \left(\left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| \right)}_{\left| \partial_{q_2} \vec{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) \right|} \Delta q_2 \Delta q_3 j_{q_1}(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{V \left(\left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \right)}_{\left| \partial_{q_2} \vec{r}(q_1, q_2, q_3) \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r}(q_1, q_2, q_3) \right|} \Delta q_3 \Delta q_2 j_{q_1}(q_1, q_2, q_3) + \dots \right) \\
 &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left(\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \partial_{q_1} \left(\left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| j_{q_1}(q_1, q_2, q_3) \right) + \int_{F_3} \dots \right) \\
 &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3} \left(\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \partial_{q_1} \left(\left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| j_{q_1} \right) + \dots \right) \\
 &= \frac{\partial_{q_1} \left(\left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| j_{q_1} \right) + \partial_{q_2} \left(\left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| j_{q_2} \right) + \partial_{q_3} \left(\left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| j_{q_3} \right)}{\left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right|},
 \end{aligned}
 \tag{9-7}$$

Dabei wurde benutzt, dass

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \left(j_{q_1}(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - j_{q_1}(q_1, q_2, q_3) \right) &= \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \Delta q_1 \left(\frac{j_{q_1}(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - j_{q_1}(q_1, q_2, q_3)}{\Delta q_1} \right) \\
 &= \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \Delta q_1 \left(\partial_{q_1} j_{q_1}(q_1, q_2, q_3) \right)
 \end{aligned}
 \tag{9-8}$$

ist und dass die oben nicht explizit aufgeführten Ausdrücke (...) durch zyklisches Vertauschen der Indizes gewonnen werden können.

Also ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial_{q_1} \left(\left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| j_{q_1} \right) + \partial_{q_2} \left(\left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| j_{q_2} \right) + \partial_{q_3} \left(\left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| j_{q_3} \right)}{\left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right|}.
 \tag{9-9}$$

Kartesische Koordinaten: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \partial_{x_i} j_i = \begin{pmatrix} \partial_x j_x \\ \partial_y j_y \\ \partial_z j_z \end{pmatrix};$

Zylinderkoordinaten: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho j_\rho + \frac{1}{\rho} \partial_\phi j_\phi + \partial_z j_z;$

Kugelkoordinaten: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 j_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta \sin \vartheta j_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\phi j_\phi.$

Beispiel Coulomb-Kraft

Divergenz (Quellstärke): $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \underbrace{\rho}_{\text{Quellstärke}} \quad (9-10)$

\Rightarrow Coulomb-Gesetz: $Q = \int_V dV \rho = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \underbrace{\int_{\partial V(R)} d\vec{f} \cdot \vec{E}}_{=4\pi R^2 E_r} = \underbrace{f(R)}_{\text{Gesamtladung } Q \text{ unabhängig von } R!}$

also: $E_r = \frac{Q}{4\pi R^2}$ (Coulomb-Gesetz ist zwingend)

Vergleich mit
Ladungserhaltung: $\dot{Q} = \int_V dV \dot{\rho} \stackrel{\text{Ladungs-erhaltung}}{=} \int_{\partial V(R)} d\vec{f} \cdot \vec{j} = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}} = \int_{\partial V(R)} d\vec{f} \cdot \dot{\vec{E}}$

also: $\dot{\vec{E}} = \vec{j}$ (Verschiebungsstrom)

Jedes Feld einer Quelle ρ muss also aus Symmetriegründen diesem Coulomb-Gesetz folgen (vergl. Schwerefeld). Auch der Verschiebungsstrom $\dot{\vec{E}}$ ergibt sich daraus zwangsläufig.

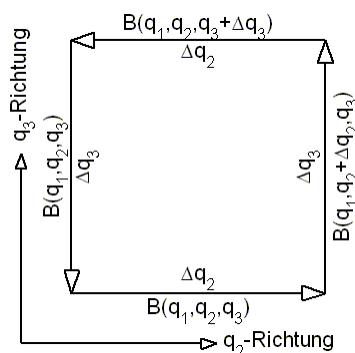
Physikalischer Input: Kontinuität von $\begin{cases} \vec{E} \\ \rho \end{cases}$ und $(9-11)$

Mathematik: $\Rightarrow \begin{cases} \text{Coulomb-Gesetz} \\ \text{Verschiebungsstrom} \end{cases}$

Rotation oder Wirbelstärke

Integral über einen sehr kleinen, geschlossenen Weg (Für ein konservatives Feld ist diese Integral immer 0!)

$$\hat{n}_F \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \equiv \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{O(V)} d\vec{s} \cdot \vec{B} \quad (\hat{n}_F : \text{Normalenvektor auf Fläche } F). \quad (9-12)$$



Zur Berechnung der Rotation wird ein geschlossener Weg in der q_2 - q_3 -Ebene betrachtet.

$$\begin{aligned}
\hat{n}_{q_1} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &\equiv \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F_{q_2 q_3}} \oint_{O(V)} d\vec{s} \cdot \vec{B} \\
&= \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F_{q_2 q_3}} \left(\Delta q_2 \left(\left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| B_2(q_1, q_2, q_3) - \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| B_2(q_1, q_2, q_3 + \Delta q_3) \right) \right. \\
&\quad \left. + \Delta q_3 \left(\left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| B_3(q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3) - \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| B_3(q_1, q_2, q_3) \right) \right) \\
&= \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F_{q_2 q_3}} \Delta q_2 \Delta q_3 \left(-\partial_{q_3} \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| B_2 + \partial_{q_2} \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| B_3 \right) \\
&= \frac{1}{\left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right|} \left(\partial_{q_2} \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right| B_3 - \partial_{q_3} \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| B_2 \right).
\end{aligned} \tag{9-13}$$

also:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\varepsilon_{ijk} \hat{n}_i}{\left| \partial_{q_j} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_k} \vec{r} \right|} \left(\partial_{q_j} \left| \partial_{q_k} \vec{r} \right| B_k - \partial_{q_k} \left| \partial_{q_j} \vec{r} \right| B_j \right). \tag{9-14}$$

Kartesische Koordinaten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i \left(\partial_j B_k - \partial_k B_j \right) = \begin{pmatrix} \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_y \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x \end{pmatrix}; \tag{9-15}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\left| \partial_{q_j} \vec{r} \right| = 1, \rho, 1$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \hat{e}_\rho \frac{1}{\rho} \left(\partial_\phi B_z - \partial_z B_\phi \right) + \hat{e}_\phi \left(\partial_z B_\rho - \partial_\rho B_z \right) \\
&\quad + \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \left(\partial_\rho \rho B_\phi - \partial_\rho B_\phi \right);
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten:

$$\left| \partial_{q_j} \vec{r} \right| = 1, r, r \sin \vartheta$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \hat{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\partial_\vartheta \sin \vartheta B_\phi - \partial_\phi B_\vartheta \right) \\
&\quad + \hat{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\phi B_r - \partial_r r B_\phi \right) \\
&\quad + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \left(\partial_r r B_\vartheta - \partial_\vartheta B_r \right).
\end{aligned}$$

Laplace-Operator:

Kombination aus Gradient und Divergenz führt auf

$$\Delta\varphi \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \underbrace{\frac{1}{\left| \partial_{q_1} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_2} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_3} \vec{r} \right|}}_{\text{Divergenz}} \partial_{q_i} \left| \partial_{q_j} \vec{r} \right| \left| \partial_{q_k} \vec{r} \right| \underbrace{\frac{1}{\left| \partial_{q_i} \vec{r} \right|}}_{\text{Gradient}} \partial_{q_i} \varphi, \quad \begin{array}{l} i \neq j \neq k \neq i, \\ \text{Einsteinsummation über } i \end{array} \quad (9-16)$$

Kartesische Koordinaten: $\Delta\varphi = \left(\partial_{x_i} \right)^2 \varphi;$

Zylinderkoordinaten: $\Delta\varphi = \frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho \varphi + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi;$

$\left| \partial_{q_j} \vec{r} \right| = 1, \rho, 1$

Kugelkoordinaten: $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \varphi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta \sin \vartheta \partial_\vartheta \varphi + \frac{1}{(r \sin \vartheta)^2} \partial_\phi^2 \varphi.$

$\left| \partial_{q_j} \vec{r} \right| = 1, r, r \sin \vartheta$

Interpretation: Summiert Krümmungen des Feldes

Beispiel: $\varphi = ax^2 + by^2$ (Paraboloid): (9-17)

Laplace-Operator: $\Delta\varphi = a + b.$

