



K.Bräuer: Philosophische Aspekte der modernen Physik, SS 2015

- Theorie -

1. Vektoren (Spatialisierung)

Ortsvektor:
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \quad (1-1)$$

Vierervektor:
$$\vec{r}^{(4)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu} \hat{e}_{\mu}$$

Invarianten

Physikalische Gesetze sind kontextunabhängig oder objektiv

Längenquadrat eines Vektors:
$$a^2 \equiv \vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{i,j=1}^3 a_i \underbrace{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}_{\delta_{ij}} a_j = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \quad (1-2)$$

Winkel α zwischen zwei Vektoren:
$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = (ab)^{-1} \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

Spatprodukt:
$$V = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Generalisierte Koordinaten

Vereinfachen oder lösen physikalische Probleme

Generalisierte Koordinaten:
$$q^i : x_i \rightarrow x_i(q^1, \dots, q^N) \quad (1-3)$$

Grundvektor:
$$\vec{g}_i \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$$

Metrik:
$$g_{ij} \equiv \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{für kartesische Koordinaten} \\ g_i^2 \delta_{ij} & \text{für orthogonale K. (ZK, KK...)} \\ g_{ij} \neq 0 & \text{im Allgemeinen} \end{cases}$$

Beispiel:

$$\text{Zylinderkoordinaten: } \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

$$\text{Basisvektoren: } \vec{g}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Metrik: } (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontravariante Grundvektoren

Für nicht-orthogonale generalisierte Koordinaten wichtig

$$\text{Vektor: } \vec{r} = \underbrace{x^i \vec{g}_i}_{\substack{\text{Einsteinsche} \\ \text{Summenkonvention}}} \quad (1-5)$$

$$\text{Projektion } \vec{r} \cdot \vec{g}^j = x^i \vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = x^j$$

Kontravarianter

$$\text{Grundvektor: } \vec{g}^i \equiv \vec{\nabla} q^i(x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{Orthonormalität: } \vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = \vec{\nabla} q^i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial q^i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} \hat{e}_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^N \frac{\partial x_l(q^1, \dots, q^N)}{\partial q^j} \hat{e}_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial q^i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(q^1, \dots, q^N)}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i \end{aligned}$$

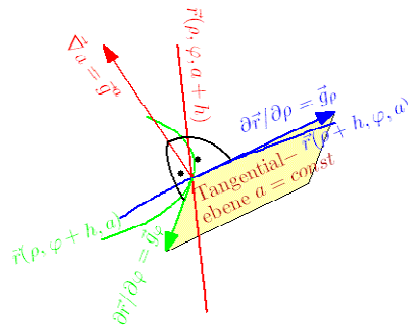


Abbildung 1-1: Konstruktion der kontravarianten Grundvektoren. Die Grundvektoren bezüglich ρ und φ spannen eine Ebene mit $a=\text{constant}$ auf. Der Gradient von $a(x^i)$ steht auf dieser Ebene senkrecht und damit auch auf den relevanten kovarianten Grundvektoren.

Entwicklungsbasen

Beide Grundvektorsysteme \vec{g}_i und \vec{g}^i dienen als Entwicklungsbasen. Vorausgesetzt ist dabei die lineare Unabhängigkeit der Grundvektoren.

Entwicklung:
$$\vec{a} \cdot \vec{g}^i = \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{g}^k)}_{\text{Summenkonvention!}} \delta_k^i = (\vec{a} \cdot \vec{g}^k) \vec{g}_k \cdot \vec{g}^i \quad (1-6)$$

Koeffizientenvergleich in \vec{g}^i : $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{g}^k) \vec{g}_k = a^k \vec{g}_k$

entsprechend: $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{g}_k) \vec{g}^k = a_k \vec{g}^k$

Metrik und Skalarprodukt

Metrik:
$$\delta_i^j = \vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \vec{g}_i \cdot (\vec{g}^j \cdot \vec{g}^k) \vec{g}_k = g^{ik} g_{ik} \quad (1-7)$$

also:

$$(g^{ik}) = (g_{ik})^{-1}$$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{g}_i a^i \cdot \vec{g}_j b^j = g_{ij} a^i b^j = a_i b^i$

Längenquadrat eines Vektors: $a^2 = g_{ij} a^i a^j$

Hoch- und runterziehen von Indizes

Hoch- und runterziehen von Indizes:
$$\overbrace{a^i \vec{g}_i} = \overbrace{a_j \vec{g}^j} = a_j (\vec{g}^j \cdot \vec{g}^k) \vec{g}_k = \underbrace{a_j g^{ji}}_{=a^i} \vec{g}_i \quad (1-8)$$

(Koeffizientenvergleich in \vec{g}_i)

also: $a^i = g^{ij} a_j, \quad a_i = g_{ij} a^j$

Totales Differential und Gradient

Differential des Ortsvektors: $d\vec{r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} dq^i = \vec{g}_i dq^i \quad (1-9)$

Differentials eines Feldes: $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial q^i} dq^i = \frac{\partial \phi}{\partial q^j} \delta_i^j dq^i = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial q^j} \vec{g}^j}_{\equiv \vec{\nabla} \phi} \cdot \vec{g}_i dq^i = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r}$

Gradient in generalisierten Koordinaten:

$$\vec{\nabla} \phi = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial q^j}}_{\equiv p_j} \vec{g}^j = p_j \vec{g}^j$$

Wichtig für Mechanik

Impuls:	Wirkungsfeld als Potential:	Kanonische Impulse p_i :	Kinetische Energie:
\vec{p}	$\vec{p} = \vec{\nabla} S$	$\vec{p} = p_i \vec{g}^i$	$T = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 = g^{ij} \underbrace{p_i p_j}_{\substack{\text{Komponenten} \\ \text{eines Gradienten} \\ \rightarrow \text{kontravariant}}}$

(1-10)

Vorgehen

$$\begin{aligned}
\text{Koordinatenwahl:} & \quad x^i (q^1, \dots, q^N) & (1-11) \\
\text{Jacobi-Matrix:} & \quad J = \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} \right) = (\vec{g}_j) \\
\text{Metrik:} & \quad (g_{ij}) = (\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j) = J^T J, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} \\
\text{Geschwindigkeit-Impuls:} & \quad m\dot{q}^i = g^{ij} p_j \\
\text{Kinetische Energie:} & \quad T = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 = g^{ij} p_i p_j
\end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
\text{Zylinderkoordinaten:} & \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} & (1-12) \\
\text{Jacobi-Matrix:} & \quad J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{g}_\rho, \vec{g}_\varphi, \vec{g}_z) \\
\text{Metrik:} & \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\text{Geschwindigkeit-Impuls:} & \quad \begin{cases} m\dot{\rho} = p_\rho \\ m\dot{\varphi} = \rho^{-2} p_\varphi \\ m\dot{z} = p_z \end{cases} \\
\text{Kinetische Energie:} & \quad T = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 + p_z^2 \right)
\end{aligned}$$