EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
Fachbereich Physik

K.Bräuer: Philosophische Aspekte der modernen Physik, SS 2015

- Theorie -

3. Dynamik

- Welt erscheint in ständiger Veränderung
- Veränderung wird beschrieben durch Kräfte
- Impuls=Kraft*Zeit 'sammelt' Kraftwirkungen
- Klassischen Mechanik: Impuls ∝ Geschwindigkeit von Massepunkten auf Bahnkurven
- Impuls: hat Richtung -> Vektor
- Wahl eines Koordinatensystems mit willkürlicher Basis

Wirkungsfeld

Wirkungsfeld S als 'Potenzial' des Impulsfeld: *(3-1)*

Impuls: $\vec{p} = \vec{\nabla} S$

Differential: $dS = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q^i}}_{\substack{\equiv p_i \\ (\text{Impuls})}} dq^i + \frac{\partial S}{\partial t} dt$

Kraft: $F_i = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial}{\partial q^i} S}_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} S}_{\substack{-E \\ (\text{Energie})}}$

Später: Hamilton-Jacobi-Gleichung -> E ist Erhaltungsgröße

Viererimpuls

wegen Lorentz-Invarianz

Wirkungsdifferential: $dS = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q^\mu}}_{\equiv p_\mu} dq^\mu = p_i \vec{g}^{(4)i} \cdot \vec{g}_j^{(4)} dq^j - \frac{E}{c} \vec{g}^{(4)4} \cdot \vec{g}_4^{(4)} d\,ct$ *(3-2)*

Viererimpuls: $\vec{p}^{(4)} = p_i \underbrace{\vec{g}^{(4)i}}_{\hat{e}_i} - \frac{E}{c} \underbrace{\vec{g}^{(4)4}}_{-i\hat{e}_4}$

Koordinaten-Tupel: $\vec{p}^{(4)} = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ -\frac{E}{c} \end{pmatrix}_{\vec{g}^{(4)\mu}}$

$-E/c$ ist vierte Komponente des kontravarianten Vierervektors!

Energiefunktion und nichtrelativistischer Grenzfall

Länge des Viererimpulses ist Invariante (Lorentz-Skalar)

Länge Impulsvektor (Invariante): $\left(\vec{p}^{(4)}\right)^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \vec{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} = \underbrace{-m_0^2 c^2}_{\substack{Konst \\ Lorentz-Skalar}}$ *(3-3)*

Energie: $E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + \vec{p}^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m_0^2 c^2}}$

kleine Impulse: $E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^2}{m_0^2 c^2} + O\left(\frac{\vec{p}^4}{m_0^2 c^4}\right)\right) \simeq \underbrace{m_0 c^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m_0}}_{\text{Schreibweise: } m_0 \to m}$

Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG) und Hamilton-Funktion

Energiefunktion (3-3) über Wirkungsfeld aus

$$HJG: \quad \underbrace{\frac{\partial S(\vec{r},t)}{\partial t}}_{-E} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} S(\vec{r},t)\right)^2}_{\frac{\vec{p}^2}{2m}} + \underbrace{V(\vec{r})}_{\substack{\text{Brechung der} \\ \text{räumlichen Symmetrie} \\ \to \text{Impulsänderungen}}} = 0 \qquad (3\text{-}4)$$

oder: $E = \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} S(\vec{r},t)\right)^2 + V(\vec{r})$

mc^2 nichtrelativistisch irrelevant - ortsabhängiges Potenzial $V(\vec{r})$ (Begründung später bei WW)

Energieerhaltung

Hamilton-Jacobi-Gleichung lösen durch 'Trennung der Variablen'

Lösungsansatz: $S(\vec{r},t) = W_{\vec{r}}(\vec{r}) + S_t(t)$ *(3-5)*

HJG: $-\frac{\partial S_t(t)}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} W_{\vec{r}}(\vec{r})\right)^2 + V(\vec{r})$

Trennung der Variablen: $\underbrace{\frac{1}{2m}\left(W_{\vec{r}}(\vec{r})\right)^2 + V(\vec{r})}_{\text{zeitunabhängig}} = \underbrace{-\frac{\partial S_t(t)}{\partial t}}_{\text{ortsunabhängig}} = E$

also: $E = \text{konstant}$

Konstanten der Bewegung

'Trennung der Variablen' wie bei Energie

Hamilton-Funktion: $$H=\sum_{i,j=1}^{N}\frac{1}{2m}g_{ij}\frac{\partial W_{\vec r}(\vec r)}{\partial q^i}\frac{\partial W_{\vec r}(\vec r)}{\partial q^j}+V\left(q^1,...q^N\right) \tag{3-6}$$

spezielles Beispiel: $$H=\frac{1}{2m}g_{11}\left(q^1\right)\frac{\partial W_{\vec r}(\vec r)}{\partial q^1}\frac{\partial W_{\vec r}(\vec r)}{\partial q^j}+V_1\left(q^1\right)$$
$$+\sum_{i,j=2}^{N}\frac{1}{2m}g_{ij}\frac{\partial W_{\vec r}(\vec r)}{\partial q^i}\frac{\partial W_{\vec r}(\vec r)}{\partial q^j}+V_{2..N}\left(q^2,...q^N\right)=E$$

Seperationsansatz: $W_{\vec r}(\vec r)=W_1\left(q^1\right)+W_{2..N}\left(q^2,...,q^N\right)$

damit:

$$\frac{1}{2m}g_{11}\left(q^1\right)\left(\frac{\partial W_1\left(q^1\right)}{\partial q^1}\right)^2+V_1\left(q^1\right)=$$
$$E-\sum_{i,j=2}^{N}\frac{1}{2m}g_{ij}\frac{\partial W_{2..N}\left(q^2,...q^N\right)}{\partial q^i}\frac{\partial W_{2..N}\left(q^2,...q^N\right)}{\partial q^j}+V_{2..N}\left(q^2,...q^N\right)$$
$$=const$$

Ist etwa $V(\vec r)=V(z)$, folgt sofort die Impulserhaltung in *x*- und *y*-Richtung $p_x=const, p_y=const$. Für ein Zentralpotenzial $V(\vec r)=V(r)$ folgt mit $\vec r=r\cos\varphi\hat e_x+r\sin\varphi\hat e_y$ sofort die Erhaltung des Drehimpulses $p_\varphi=const$.

Beispiel

Hamilton-Funktion: $$H=\frac{1}{2m}\left(\vec\nabla S\right)^2+V\left(|\vec r|\right) \tag{3-7}$$

Ansatz: $S(\vec r,t)=W_r(r)+W_\varphi(\varphi)+S_t(t)$

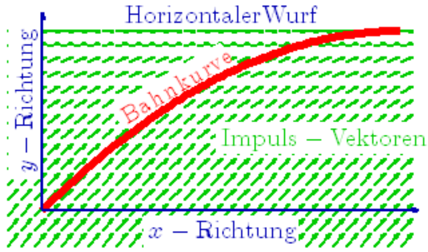
Hamilton-Jacobi-Gl.: $$E=\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W_r(r)}{\partial r}\right)^2+V(r)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W_\varphi(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right)$$

Seperation: $$\underbrace{\left(\frac{\partial W_\varphi(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2}_{F_\varphi(\varphi)}=\underbrace{2mE-\left(\frac{\partial W_r(r)}{\partial r}\right)^2-V(r)}_{F_r(r)}=konst.$$

Konstante der Bewegung: $$\frac{\partial S}{\partial\varphi}=p_\varphi=\sqrt{2mE-\left(\frac{\partial W_r(r)}{\partial r}\right)^2-V(r)}$$

4. Klassische Mechanik

Bahnkurven



- Grundlage der Klassischen Mechanik: Bahnkurven (geniale Abstraktion), QM: Messwahrscheinlichkeit & Wirkungsfeld → Wellenfunktion + Quantisierung
- Bewegung: zeitliche Ortsänderung der Punktmasse (Geschwindigkeit proportional zum Impuls)
- Proportionalitätskonstante: Masse m
- Kraft ändert den Bewegungszustand (je leichter desto größer die Geschwindigkeit bei gleicher Impulsänderung)

Bahnkurve wird so über Impulsfeld gelegen, dass Geschwindigkeit überall proportional zum Impulsvektor ist

Punktteilchen	Impuls	Geschwindigkeit	Bahnkurve
$q^i \to q^i(t)$	$p_k(q^i,t) \to p_k(q^i(t),t) \to p_k(t)$	$v^i(t) \equiv \dot q^i(t) = \frac{1}{m} g^{ik} p_k(t)$	$q^i(t) = q^i(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} g^{ik} p_k(q^i(t'),t')\,dt'$

(4-1)

Impulsfeld: Lösung der *HJG*

Bahnkurve: kaum lösbare Integralgleichung

Integration des Impulses

Wahl geeigneter Koordinaten -> Separation der einzelnen Freiheitsgrade

$$\text{Energie:}\quad E = \underbrace{\frac{1}{2m}\sum_{k,l\in\mathbb{N}_{/i}}^{N} g^{kl} p_k p_l}_{T_{/i}} + \underbrace{V\left(q^1,\dots,q^{i-1},q^{i+1},\dots,q_M\right)}_{V_{/1}} + \underbrace{\frac{1}{2m} g^{ii} p_i^{\,2}}_{\text{nur wenn } g^{ij}=\delta^{ii}\,!} + V_i\left(q^i\right) \tag{4-2}$$

$$(\text{Separation, wenn möglich})$$

$$\text{Impuls:}\quad \frac{1}{2m} g^{ii} p_i^{\,2} + V_i = E - T_{/i} - V_{/i} = konst = E_i$$

$$p_i = \pm\sqrt{\frac{2m}{g^{ii}}\left(E_i - V_i\right)}$$

$$\text{Zeitablauf:}\quad t - t_0 = \int_{t_0}^{t} dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{\overbrace{m\dot q^i}^{1=}}{g^{ii} p_i}\,dt' = \pm\int_{q^i(t_0)}^{q^i(t)} \sqrt{\frac{m}{2g^{ii}\left(E_i - V_i\right)}}\,dq^i \tag{4-3}$$

$$\text{Bahnkurve:}\quad q^i(t)\quad (\text{durch Auflösen des Zeitablaufs})$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichung (HG)

$$\text{Hamilton-Funktion:} \quad H(\vec{q},\vec{p}) \equiv \frac{1}{2m} g^{ij} p_i p_j + V(\vec{q}(t)) \tag{4-4}$$

$$\text{Impuls-Ort:} \quad \vec{p} = m\dot{\vec{q}}$$

$$\text{also:} \quad \dot{q}^i = \frac{1}{m} g^{ij} p_j = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Damit folgt auch die Impulsdynamik:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j}\underbrace{\dot{q}^j}_{\frac{\partial H}{\partial p_j}} = \underbrace{\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j}\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial q^i}}_{\substack{\frac{\partial}{\partial q^i}\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial q^i}\right) = \frac{d}{dq^i}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H\right) = \frac{d}{dq^i} 0 = 0 \\ p = p(q(t)) \text{ auf Bahnkurve!}}} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{4-5}$$

$$\text{also:} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Bekannte Formulierung der klassischen Mechanik:

$$HG: \begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \tag{4-6}$$

Zyklische Variablen

Hängt die Energiefunktion von einer Koordinate q^i nicht ab, dann ist der konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße oder eine Konstante der Bewegung.

$$q^i \text{ zyklisch:} \quad H \neq F(q^i) \tag{4-7}$$

$$HG: \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0$$

$$\text{also Impulserhaltung:} \quad p_i = \text{konstant}$$

Durch Wahl geeigneter Koordinaten:

- Holonome Zwangsbedingungen (zeitunabhängig)
- Rheonome Zwangsbedingungen (zeitabhängig)
- Vielteilchensysteme und kontinuierliche Massenverteilungen

5. Quantenmechanik

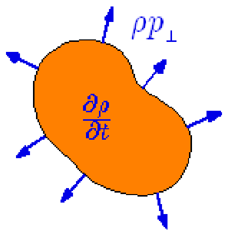
Klassisches Weltbild	Modernes Weltbild
Welt ist absolut und objetiv, unabhängig vom Beobachter	• Bewusstsein: ∘ exzerpiert ∘ spatialisiert ∘ narrativiert ∘ kompatibilisiert • Wir erleben die Welt als Bild im Bewusstsein • Physik: Gesetze zur ∘ Erkennbarkeit ∘ Reproduzierbarkeit ∘ Messbarkeit

(5-1)

Korrekturen zur klassischen Physik

Bahnkurve ⟶ Dichte der Meßwahrscheinlichkeit

Detektor-Ansprech-Wahrscheinlichkeitsdichte: $\rho(x,t)$



Kontinuitätsgleichung (KG): $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec\nabla\left(\rho\cdot\underbrace{\frac{\vec\nabla S}{m}}_{=\frac{\vec p}{m}=\vec v}\right)=0$

Vereinheitlichung von Inhalt und Bewegung

Wellenfunktion $$\underbrace{\psi(\vec r,t)\equiv\sqrt{\rho(\vec r,t)}e^{iS(\vec r,t)/\hbar}}_{\psi(\vec r_1,\vec r_2,t)=\sqrt{\rho(\vec r_1,t)\rho(\vec r_2,t)}e^{i\left(S_1(\vec r,t)+S_2(\vec r_2,t)\right)/\hbar}=\sqrt{\rho(\vec r_1,\vec r_2,t)}e^{iS(\vec r_1,\vec r_2,t)/\hbar}} \tag{5-2}$$

Transformation:
$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\vec\nabla S\right)^2+V=0\\ &\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec\nabla\cdot\left(\rho\frac{\vec\nabla S}{m}\right)=0\end{aligned}\right\}\underbrace{\Rightarrow}_{\psi=\sqrt{\rho}e^{iS/\hbar}}-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\psi$$

Operatoren

Mittlere Energie: $$\bar E\equiv\int E\rho d^3r=\int\underbrace{\psi^*}_{Re^{-iS/\hbar}}\underbrace{E}_{\left(-\frac{\partial S}{\partial t}\right)}\underbrace{\psi}_{Re^{iS/\hbar}}d^3r=\int\psi^*\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar}{iR}\frac{\partial R}{\partial t}\right)\psi d^3r \tag{5-3}$$

$$=\int\psi^*\underbrace{\left(-\frac{\hbar}{i}\right)\frac{\partial}{\partial t}}_{\equiv\hat E\ \text{Energie-Operator}}\psi d^3r+\frac{\hbar}{i}\underbrace{\int R\frac{\partial R}{\partial t}d^3r}_{=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\rho d^3r=0}$$

$$\equiv\left\langle\hat E\right\rangle$$

Mittlerer Impuls: $$\overline{\vec{p}} \equiv \int \vec{p}\rho d^3r = \int \psi^* \underbrace{\vec{p}}_{(\vec{\nabla}S)} \psi d^3r = \int \psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{\hbar}{iR}\left(\vec{\nabla}R\right)\right)\psi d^3r \tag{5-4}$$

$$= \int \psi^* \underbrace{\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}}_{\equiv\hat{\vec{p}}\text{ Impuls-Operator}} \psi d^3r - \frac{\hbar}{i} \underbrace{\int R\frac{\partial R}{\partial t}d^3r}_{=\frac{1}{2}\int\vec{\nabla}\rho d^3r=\frac{1}{2}\int\rho d^2\vec{f}=0}$$

$$\equiv \left\langle \vec{p} \right\rangle$$

Mittleres Impulsquadrat: $$\left\langle \hat{\vec{p}}^2 \right\rangle = \int \psi^* \hat{\vec{p}}^2 \psi d^3r = -\hbar^2 \int \psi^* \Delta\psi d^3r = \hbar^2 \int \left(\vec{\nabla}\psi^*\right)\left(\vec{\nabla}\psi\right)d^3r \tag{5-5}$$

$$= \hbar^2 \int \left(\frac{\vec{\nabla}R}{R} - \frac{i\vec{\nabla}S}{\hbar}\right)\left(\frac{\vec{\nabla}R}{R} + \frac{i\vec{\nabla}S}{\hbar}\right)\psi^*\psi d^3r$$

$$= \hbar^2 \int \left(\left(\frac{\vec{\nabla}R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\vec{\nabla}S}{\hbar}\right)^2\right)\rho d^3r$$

$$= \hbar^2 \underbrace{\int \left(\frac{\vec{\nabla}R}{R}\right)^2 \rho d^3r}_{=\int\left(\vec{\nabla}R\right)^2 d^3r = -\int R\Delta R d^3r = -\int \psi^* \frac{\Delta R}{R}\psi d^3r} + \underbrace{\int \left(\vec{\nabla}S\right)^2 \rho d^3r}_{\overline{\vec{p}^2}}$$

Mittlere kinetische Energie: $$\left\langle \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} \right\rangle = \frac{\overline{\vec{p}^2}}{2m} + \left\langle Q \right\rangle, \quad \text{mit} \quad \underbrace{Q = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta R}{R}}_{\text{Term hebt Trennung von Inhalt und Bewegung auf}} \tag{5-6}$$

Quantisierung

Variablen $\rightarrow$ Operatoren auf ψ: $$\begin{cases} p = \vec{\nabla}S & \rightarrow \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}, \quad \hat{p}\psi = \left(\vec{\nabla}S + \frac{\hbar}{i}\frac{\vec{\nabla}R}{R}\right)\psi \\ E = -\frac{\partial S}{\partial t} & \rightarrow \quad \hat{E} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{E}\psi = \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\hbar}{i}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial t}\right)\psi \end{cases} \tag{5-7}$$

also: $$E = \frac{p^2}{2m} + V \rightarrow \hat{E}\psi = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi + V\psi$$

$\rightarrow$ Schrödinger-Gleichung: $$\underbrace{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}}_{\hat{E}\psi} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta}_{\frac{\hat{p}}{2m}\psi}\psi + V\psi \qquad \underbrace{}_{\text{Störender Term } \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \text{ ist verschwunden}}$$

Kontinuitätsgleichung: $$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\psi\psi^* = \vec{\nabla}\left(\rho\frac{\vec{\nabla}S}{m}\right) \quad (\text{siehe unten})$$

Durch Quantisierung: Komplementarität von Inhalt und Bewegung *(5-8)*

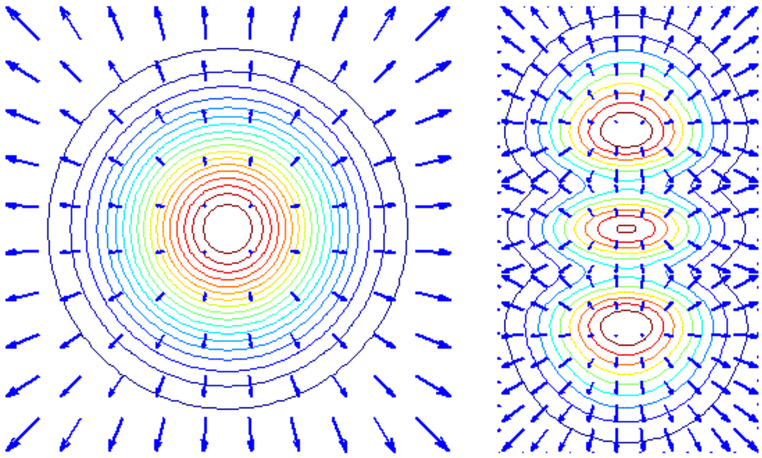
Führt zu:
- Gleichzeitiges Vorhandensein aller Möglichkeiten
- Interferenz
- Nichtlokalität
- atomaren Strukturen, Halbleiter, LASER, ...

Beispiel für Lösung der Schrödinger-Gleichung

(5-9)

Gauß'sches Wellenpaket: $$\psi(x,t)=\sqrt{\frac{b}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2b_t^2}}}{b_t}},\quad \text{mit } b_t=b\sqrt{1+i\frac{\hbar t}{mb^2}}$$

Zerfließen



Unschärfe

(5-10)

Ortsunschärfequadrat: $$(\Delta x)^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{x}^2\psi\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\rho\,dx$$

Impulsunschärfe: $$(\Delta p)^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{p}^2\psi\,dx=\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi'^*\psi'\,dx$$

Heisenbergsche Unschärferelation: $$\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$