EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

MATHEMATISCH-
NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
Fachbereich Physik

K.Bräuer: Philosophische Aspekte der modernen Physik, SS 2018

- Theorie -

1. Vektoren

Ortsvektor: $$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{e}_i \qquad (1\text{-}1)$$

Vierervektor: $$\vec{r}^{(4)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu \hat{e}_\mu$$

Invarianten

Physikalische Gesetze sind kontextunabhängig oder objektiv

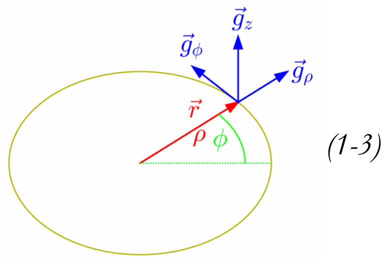
Längenquadrat eines Vektors: $$a^2 \equiv \vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i \underbrace{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}_{\delta_{ij}} a_j = \sum_{i=1}^{3} a_i^2 \qquad (1\text{-}2)$$

Winkel α zwischen zwei Vektoren: $$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = (ab)^{-1} \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

Spatprodukt: $$V = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Generalisierte Koordinaten

Vereinfachen oder lösen physikalische Probleme



Generalisierte Kordinaten: $q^i: \quad x_i \to x_i\left(q^1, \ldots, q^N\right) \qquad (1\text{-}3)$

Grundvektor: $$\vec{g}_i \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$$

Metrik: $$g_{ij} \equiv \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{für karthesische Koordinaten} \\ g_i^2 \delta_{ij} & \text{für orthogonale K. } (\text{ZK, KK...}) \\ g_{ij} \neq 0 & \text{im Allgemeinen} \end{cases}$$

Beispiel:

$$\text{Zylinderkoordinaten:}\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \tag{1-4}$$

$$\text{Grundvektoren:}\quad \vec{g}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{g}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Metrik:}\quad G \equiv \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontravariante Grundvektoren

Für nicht-orthogonale generalisierte Koordinaten wichtig

$$\text{Vektor:}\quad \vec{r} = \underbrace{x^i \vec{g}_i}_{\substack{\text{Einsteinsche}\\ \text{Summenkonvention}}} \tag{1-5}$$

$$\text{Projektion}\quad \vec{r}\cdot\vec{g}^{\,j} = x^i\, \underbrace{\vec{g}_i \cdot \vec{g}^{\,j}}_{\overset{!}{=}\delta_i^j} = x^j$$

$$\text{Kontravarianter Grundvektor:}\quad \vec{g}^{\,i} \equiv \vec{\nabla} q^i\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

$$\text{Orthonormalität:}\quad \vec{g}^{\,i}\cdot\vec{g}_j = \vec{\nabla} q^i \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^j} = \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial q^i\left(x_1,x_2,x_3\right)}{\partial x_k}\hat{e}_k\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial x_l\left(q^1,\ldots,q^N\right)}{\partial q^j}\hat{e}_l\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial q^i\left(x_1,x_2,x_3\right)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k\left(q^1,\ldots,q^N\right)}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i$$

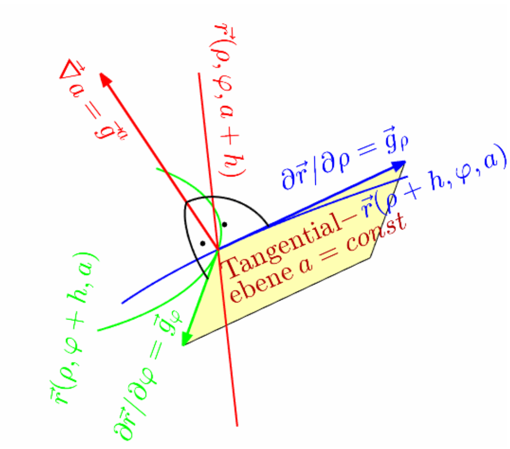


Abbildung 1-1: Konstruktion der kontravarianten Grundvektoren. Die Grundvektoren bezüglich ρ und φ spannen eine Ebene mit a=constant auf. Der Gradient von $a(x^i)$ steht auf dieser Ebene senkrecht und damit auch auf den relevanten kovarianten Grundvektoren

Entwicklungsbasen

Beide Grundvektorsysteme $\vec{g}_i$ und $\vec{g}^i$ dienen als Entwicklungsbasen. Vorausgesetzt ist dabei die lineare Unabhängigkeit der Grundvektoren.

Entwicklung: $$\vec{a}\cdot\vec{g}^i = \underbrace{\left(\vec{a}\cdot\vec{g}^k\right)\delta_k^i}_{\text{Summenkonvention!}} = \left(\vec{a}\cdot\vec{g}^k\right)\vec{g}_k\cdot\vec{g}^i \tag{1-6}$$

Koeffizentenvergleich in $\vec{g}^i$: $\vec{a} = \left(\vec{a}\cdot\vec{g}^k\right)\vec{g}_k = a^k\vec{g}_k$

entsprechend: $\vec{a} = \left(\vec{a}\cdot\vec{g}_k\right)\vec{g}^k = a_k\vec{g}^k$

Metrik und Skalarprodukt

Metrik: $$\delta_i^j = \vec{g}_i\cdot\vec{g}^j = \vec{g}_i\cdot\left(\vec{g}^j\cdot\vec{g}^k\right)\vec{g}_k = g^{jk}g_{ki} \tag{1-7}$$

also: $\boxed{G_i \equiv \left(g^{ik}\right) = G^{-1}}$

Skalarprodukt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{g}^i a_i\cdot\vec{g}^j b_j = g^{ij}a_i b_j = g_{ij}a^i b^j = a_i b^j$

Längenquadrat eines Vektors: $a^2 = g^{ij}a_i a_j = g_{ij}a^i a^j$

Hoch- und runterziehen von Indizes

Hoch- und runterziehen von Indizes: $$a^i\vec{g}_i = a_j\vec{g}^j = a_j\left(\vec{g}^j\cdot\vec{g}^i\right)\vec{g}_i = \underbrace{a_j g^{ji}}_{\substack{=a^i \\ \text{(Koeffizienten-} \\ \text{vergleich in } \vec{g}_i\text{)}}}\vec{g}_i \tag{1-8}$$

also: $a^i = g^{ij}a_j,\quad a_i = g_{ij}a^j$

Totales Differential und Gradient

Differential des Ortsvektors: $$d\vec{r} \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}dq^i = \vec{g}_i dq^i \tag{1-9}$$

Differentials eines Feldes: $$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial q^i}dq^i = \frac{\partial\phi}{\partial q^j}\delta_i^j dq^i = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial q^j}\vec{g}^j}_{\equiv\vec{\nabla}\phi}\cdot\vec{g}_i dq^i = \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r}$$

Gradient in generalisierten Koordinaten: $$\boxed{\vec{\nabla}\phi = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial q^j}}_{\equiv p_j}\vec{g}^j = p_j\vec{g}^j}$$

Wichtig für Mechanik

Impuls:	Wirkungsfeld als Potential:	Kanonische Impulse p_i :	Kinetische Energie:
$\vec{p}$	$\vec{p} = \vec{\nabla} S$	$\vec{p} = p_i \vec{g}^i$	$T = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 = g^{ij} \underbrace{p_i p_j}_{\text{Komponenten eines Gradienten} \to \text{kontravariant}}$

(1-10)

Vorgehen

(1-11)

Koordinatenwahl: $x^i\left(q^1,...,q^N\right)$

Jacobi-Matrix: $J = \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}\right) = \left(\vec{g}_j\right)$

Metrik: $G = \left(\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j\right) = J^T J, \quad G_i = \left(g_{ij}\right)^{-1}$

Geschwindigkeit-Impuls: $m\dot{q}^i = g^{ij} p_j$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 = \frac{1}{2m} g^{ij} p_i p_j$

Beispiel

(1-12)

Zylinderkoordinaten: $\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

Jacobi-Matrix: $J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\vec{g}_\rho, \vec{g}_\varphi, \vec{g}_z\right)$

Metrik: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_i = G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Geschwindigkeit-Impuls: $\begin{cases} m\dot{\rho} = p_\rho \\ m\dot{\varphi} = \rho^{-2} p_\varphi \\ m\dot{z} = p_z \end{cases}$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 + p_z^2\right)$