EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
Fachbereich Physik

K.Bräuer: Philosophische Aspekte der modernen Physik, SS 2018

- Theorie -

2. Lorentz-Invarianz

Lichtsignalausbreitung:	kein Medium wie Wasser oder Luft
Wahrnehmung:	Ursache (Quelle) und Wirkung
Konsequenz:	c unabhängig vom Bezugssystem
und	Raum-und Zeit nur in Bezug zum Beobachter
Philosophie, Psychologie, Kunst, ...:	Raum und Zeit entsteht im Bewusstsein des Beobachters

Lichtsignalen

Ausbreitung:
$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\text{Abstandsquadrat von der Lichtquelle}} - \underbrace{c^2t^2}_{\text{in } t \text{ zurück-gelegter Weg}} = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

in einem anderen Koordinatensystem: $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0, \quad (c=c'!)$

Invariante Formulierung

als Vektorlänge: $\left(\vec r^{(4)}\right)^2 = \left(\vec r'^{(4)}\right)^2 = 0$

mit Viererort: $\vec r^{(4)} = x\hat e_x + y\hat e_y + z\hat e_z + ict\hat e_t$

oder: $\vec r^{(4)} = \begin{pmatrix} \vec r \\ ict \end{pmatrix}$

Minkowski-Metrik

Generalisierte Koordinaten: $q^i = x^i, \quad q^4 = ct$ (2-3)

Ortsdifferential: $d\vec r^{(4)} = \vec g_i^{(4)} dq^i + \vec g_4^{(4)} dq^4, \quad i \in \{1..3\}$

Grundvektoren: $\vec g_i^{(4)} = \hat e_i, \quad \vec g_4^{(4)} = \dfrac{\partial \vec r^{(4)}}{\partial ct} = i\hat e_4$

Kontravariant: $\vec g^{(4)i} = \hat e_i, \quad \underbrace{\vec g^{(4)4} = -i\hat e_4}_{\vec g_\mu^{(4)} \cdot \vec g^{(4)\nu} = \delta_\mu^\nu}$

Minkowski-Metrik: $\left(g_{\mu\nu}\right) = \left(g^{\mu\nu}\right) = diag\left(1,1,1,-1\right)$

Lorentz-Transformation (LT)

Bezugssysteme: $K,\quad K'$ (2-4)

Relativgeschwindigkeit: v

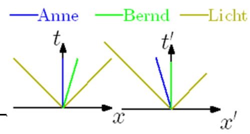
Lorentz-Transformation: $\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \underbrace{T_L}_{\substack{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \\ \text{4 Elemente}}} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad \underbrace{y' = y, z' = z}_{\substack{\text{durch geeignete Wahl} \\ \text{der Raumrichtungen}}}$

Festlegung von $T_L = (a_{ij})$

Invarianzbedingung: $\underbrace{x'^2 - (ct')^2}_{(a_{11}x+a_{12}ct)^2-(a_{21}x+a_{22}ct)^2} = x^2 - (ct)^2$ (2-5)

Vergleich der Koeffizienten:

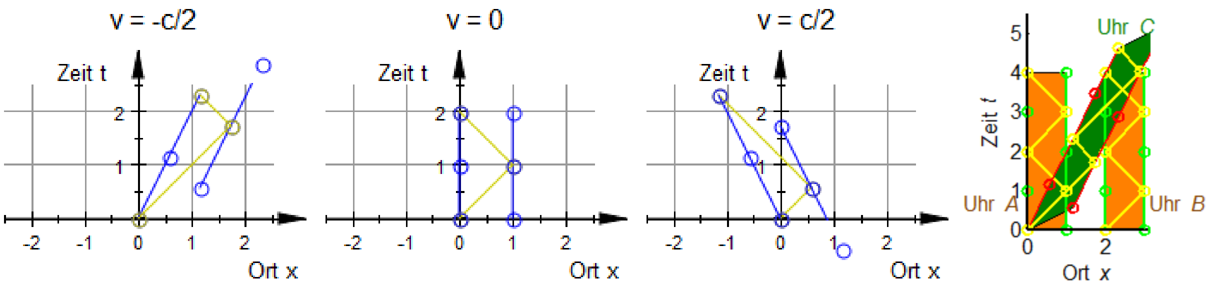
$$\underbrace{\left(a_{11}^2 - a_{21}^2 - 1\right)}_{=0} x^2 + \underbrace{\left(a_{12}^2 - a_{22}^2 - 1\right)}_{=0} (ct)^2 + 2\underbrace{\left(a_{11}^2 a_{12}^2 - a_{21}^2 a_{22}^2\right)}_{=0} x \cdot ct = 0$$



Relativbewegung der Systme: $\underbrace{0 = x'}_{\text{Ruhesystem}} = a_{11}x + a_{12}ct \quad \text{und} \quad x = v \cdot t$

Lösung der vier Gleichungen $\rightarrow\ T_L = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \gamma = \sqrt{\dfrac{1}{1 - v^2/c^2}}$

Lichtuhren



Invariante Zeit oder Eigenzeit eines Raum-Zeit-Punktes

LT ins Ruhesystem: $\begin{pmatrix} 0 \\ c\tau \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad \text{mit } x = vt$ (2-6)

also: $c\tau = \gamma\left(-\dfrac{xv}{c} + ct\right) = \gamma\left(-\dfrac{v^2 t}{c} + ct\right) = \gamma \underbrace{\left(-\dfrac{v^2}{c^2} + 1\right)}_{\gamma^{-2}} ct$

Eigenzeit ~ Beobachterzeit: $\tau = \dfrac{1}{\gamma} t$

Vierergeschwindigkeit eines Raum-Zeit-Punktes

Vierergeschwindigkeit: $\vec{v}^{(4)} \equiv \dfrac{d\vec{x}^{(4)}}{d\tau} = \gamma \dfrac{d\vec{x}^{(4)}}{dt} = \gamma \dfrac{d}{dt}(\vec{x}, ct) = \gamma(\vec{v}, c)$ (2-7)

Länge (Invariante): $\vec{v}^{(4)2} = \gamma^2 \left(g_{ij} v^i v^j + g_{44} c^2\right) = \underbrace{\gamma^2}_{\frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{c^2}{c^2-v^2}} \left(v^2 - c^2\right) = -c^2$