K.Bräuer: Philosophische Aspekte der modernen Physik, SS 2018

# - Theorie -

# 3. Dynamik

- Welt erscheint in ständiger Veränderung
- Weltinhalte bewegen sich, die Bewegung ändert sich ständig (Dynamik)
- Dynamik klassisch: Wirkung von Kräften auf Objekte $\left(m\dot{\vec{r}} = m\vec{v} = \vec{p}, \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}\right)$
- Quantenmechanisch: keine Bahnkurve, Impuls: $\hat{p}\psi = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi$

Impuls hat Richtung -> Vektor: Wahl eines Koordinatensystems mit willkürlicher Basis

Wirkung: Invariante und einheitliche Behandlung in der klassischen Mechanik und in der Quantenmechanik

## *Wirkungsfeld*

Wirkungsfeld $S$ als 'Potenzial' des Impulsfeld: *(3-1)*

Impuls: $\vec{p} = \vec{\nabla} S$

Differential: $$dS = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q^i}}_{\substack{\equiv p_i \\ (\text{Impuls})}} dq^i + \frac{\partial S}{\partial t} dt = \vec{\nabla}^{(4)} S \cdot d\vec{r}^{(4)}$$

Kraft: $$F_i = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial}{\partial q^i} S}_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} S}_{\substack{-E \\ (\text{Energie})}}$$

## *Viererimpuls*

wegen Lorentz-Invarianz

Wirkungsdifferential: $$dS = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q^\mu}}_{\equiv p_\mu} dq^\mu = \underbrace{p_i \vec{g}^{(4)i} \cdot \vec{g}^{(4)}_j dq^j - \frac{E}{c} \vec{g}^{(4)4} \cdot \vec{g}^{(4)}_4 d\,ct}_{\vec{p}^{(4)} \cdot d\vec{r}^{(4)}} \qquad (3\text{-}2)$$

Viererimpuls: $$\vec{p}^{(4)} = p_i \underbrace{\vec{g}^{(4)i}}_{\hat{e}_i} - \frac{E}{c} \underbrace{\vec{g}^{(4)4}}_{-i\hat{e}_4}$$

Koordinaten-Tupel: $$\vec{p}^{(4)} = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ -\frac{E}{c} \end{pmatrix}_{\vec{g}^{(4)\mu}}$$

$-E/c$ ist vierte Komponente des kontravarianten Impuls-Vierervektors!

## *Energiefunktion und nichtrelativistischer Grenzfall*

Länge des Viererimpulses ist Invariante (Lorentz-Skalar)

Länge Impulsvektor (Invariante):

$$\left(\vec{p}^{(4)}\right)^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \vec{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} \quad (3\text{-}3)$$

$$= \underset{\substack{\text{Ruhemasse,}\\ \text{Invariante Masse}}}{m_0^2} \left(\vec{v}^{(4)}\right)^2 = \underbrace{-m_0^2 c^2}_{\substack{Konst\\ Lorentz-Skalar}}$$

Energie:

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + \vec{p}^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m_0^2 c^2}}$$

kleine Impulse:

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^2}{m_0^2 c^2} + O\left(\frac{\vec{p}^4}{m_0^2 c^4}\right)\right) \simeq m_0 c^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m_0}$$

Einstein-Formel für $\vec{p} = 0$: $E = m_0 c^2$

## *Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG)*

Energiefunktion (3-3) über Wirkungsfeld aus

$$HJG: \underbrace{\frac{\partial S(\vec{r},t)}{\partial t}}_{-E} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} S(\vec{r},t)\right)^2}_{\frac{\vec{p}^2}{2m}} + \underset{\substack{\text{Brechung der}\\ \text{räumlichen Symmetrie}\\ \rightarrow \text{Impulsänderungen}}}{V(\vec{r})} = 0 \quad (3\text{-}4)$$

## *Energieerhaltung*

Hamilton-Jacobi-Gleichung lösen durch 'Trennung der Variablen'

Lösungsansatz:

$$S(\vec{r},t) = S_{\vec{r}}(\vec{r}) + S_t(t) \quad (3\text{-}5)$$

Trennung der Variablen:

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} S_{\vec{r}}(\vec{r})\right)^2 + V(\vec{r})}_{\text{zeitunabhängig}} = \underbrace{-\frac{\partial S_t(t)}{\partial t}}_{\text{ortsunabhängig}} = E$$

also: $E = \text{konstant}$

## *Freie Wirkung (V=0)*

Ansatz:

$$S(\vec{r},t) = \underset{S_r}{\vec{p}\cdot\vec{r}} - \underset{-S_t}{E\cdot t} \quad (3\text{-}6)$$

$$HJG: \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left(\vec{\nabla} S\right)^2}{2m} = -E + \frac{\vec{p}^2}{2m} = 0$$

*Konstanten der Bewegung*
'Trennung der Variablen' wie bei Energie

Energie:
$$E=\sum_{i,j=1}^{N}\frac{1}{2m}g_{ij}\frac{\partial S_{\vec{r}}\left(\vec{r}\right)}{\partial q^{i}}\frac{\partial S_{\vec{r}}\left(\vec{r}\right)}{\partial q^{j}}+V\left(q^{1},\ldots q^{N}\right) \quad (3\text{-}7)$$

spezielles Beispiel: $V\left(q^{1},\ldots q^{N}\right)=V_{1}\left(q^{1}\right)+V_{2..N}\left(q^{2},\ldots q^{N}\right),\quad g_{1j}=g_{11}\delta_{j}^{1}$

Seperationsansatz: $S_{\vec{r}}\left(\vec{r}\right)=S_{\vec{r}1}\left(q^{1}\right)+S_{\vec{r}2..\vec{r}N}\left(q^{2},\ldots,q^{N}\right)$

damit:
$$\frac{1}{2m}g_{11}\left(q^{1}\right)\left(\frac{\partial S_{1}\left(q^{1}\right)}{\partial q^{1}}\right)^{2}+V_{1}\left(q^{1}\right)=$$
$$E-\sum_{i,j=2}^{N}\frac{1}{2m}g_{ij}\frac{\partial S_{2..N}\left(q^{2},\ldots q^{N}\right)}{\partial q^{i}}\frac{\partial S_{2..N}\left(q^{2},\ldots q^{N}\right)}{\partial q^{j}}+V_{2..N}\left(q^{2},\ldots q^{N}\right)$$
$$=const$$

Ist etwa $V(\vec{r})=V\left(z\right)$, folgt sofort die Impulserhaltung in *x*- und *y*-Richtung $p_{x}=const,\ p_{y}=const$. Für ein Zentralpotenzial $V(\vec{r})=V\left(r\right)$ folgt mit $\vec{r}=r\cos\varphi\hat{e}_{x}+r\sin\varphi\hat{e}_{y}$ sofort die Erhaltung des Drehimpulses $p_{\varphi}=const$.

## Beispiel

Energie-Satz:
$$E=\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla}S\right)^{2}+V\left(\left|\vec{r}\right|\right) \quad (3\text{-}8)$$

Ansatz: $S\left(\vec{r},t\right)=S_{r}\left(r\right)+S_{\varphi}\left(\varphi\right)+S_{t}\left(t\right)$

Hamilton-Jacobi-Gl.:
$$E=\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_{r}\left(r\right)}{\partial r}\right)^{2}+\frac{1}{2mr^{2}}\left(\frac{\partial S_{\varphi}\left(\varphi\right)}{\partial\varphi}\right)^{2}+V\left(r\right)$$

Seperation:
$$\underbrace{\left(\frac{\partial S_{\varphi}\left(\varphi\right)}{\partial\varphi}\right)^{2}}_{F_{\varphi}\left(\varphi\right)}=\underbrace{2mr^{2}\left(E-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_{r}\left(r\right)}{\partial r}\right)^{2}-V\left(r\right)\right)}_{F_{r}\left(r\right)}=konst.$$

Konstante der Bewegung:
$$\frac{\partial S}{\partial\varphi}=p_{\varphi}=\pm r\sqrt{2m\left(E-V\right)-\left(\frac{\partial S_{r}\left(r\right)}{\partial r}\right)^{2}}=konst.$$

Auflösen $\rightarrow p_{r}\left(r\right)$:
$$p_{r}=\frac{\partial S_{r}\left(r\right)}{\partial r}=\pm\sqrt{2m\left(E-V\right)-\frac{p_{\varphi}^{\,2}}{r^{2}}}$$