



K.Bräuer: Philosophische Aspekte der modernen Physik, SS 2017

## - Theorie -

### 4. QM-Messprozess

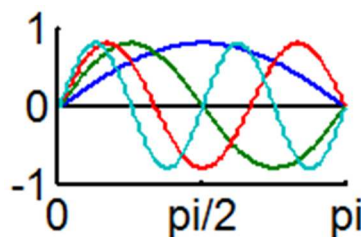
#### Beispiel Kastenpotential

Schrödinger-Gleichung: 
$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \underbrace{V(x)}_{\begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, \pi] \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}} \psi(x,t) \quad (4-1)$$

Separationsansatz: 
$$\psi(x,t) = \phi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

$$E\phi(x) e^{-iEt/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} e^{-iEt/\hbar} + V(x)\phi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

Zustände und Eigenwerte: 
$$\begin{cases} \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), & \text{für } x \in \{0, \pi\}; \\ \phi_n(x) = 0, & \text{sonst;} \\ E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2m} \end{cases}$$



#### Energiedarstellung

Observablen-Operator: 
$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V(x) \quad (4-2)$$

also: 
$$\hat{H}\phi_n(x) = \underbrace{\frac{\hbar^2 n^2}{2m}}_{\text{Energiewert } h_n} \underbrace{\phi_n(x)}_{\text{Energiezustand}}$$

Darstellung bezüglich Energiezuständen: 
$$\psi(x,t) = \sum c_n(t) \phi_n(x)$$

Wahrscheinlichkeit für Messwert  $h_n$ : 
$$|c_n(t)|^2$$

## Impulsdarstellung

$$\text{Observablen-Operator } \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (4-3)$$

$$\text{Impulseigenzustande: } \phi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx/\hbar}, \quad \text{mit } \hat{p}\phi_p(x) = p\phi_p(x)$$

$$\begin{aligned} \text{also: } \psi(x,t) &= \underbrace{\sum_n c_n(t) \phi_n(x)}_{\phi_n(x) = \int \phi_n(x') \delta(x-x') dx'} = \int \underbrace{\sum_n c_n(t) \langle \phi_p | \phi_n \rangle}_{c_p(t)} \phi_p(x) dp \\ &= \int \phi_n(x') \phi_p(x') \phi_p(x) dx' dp \end{aligned}$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit fur Messwert } p: |c_p(t)|^2 = \left| \sum_n c_n(t) \langle \phi_p | \phi_n \rangle \right|^2$$

## Ortsdarstellung

$$\text{Observablen-Operator } \hat{x} = x \quad (4-4)$$

$$\begin{aligned} \text{Ortszustande: } \phi_x(x') &= \delta(x-x') \\ \hat{x}\delta(x'-x) &= x\delta(x'-x) \\ \int \hat{x}\delta(x-x') dx' &= \int x\delta(x-x') dx' \end{aligned}$$

$$\text{also: } \psi(x,t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(x) = \int \underbrace{\sum_n c_n(t) \phi_n(x') \delta(x-x')}_{c_x(t)} dx'$$

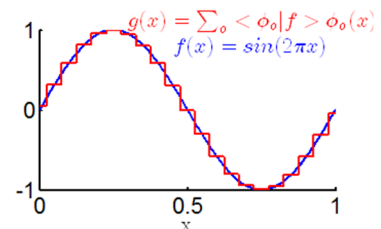
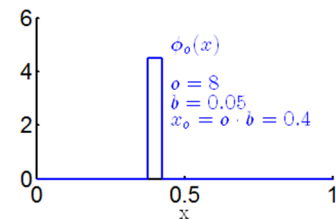
$$\text{Wahrscheinlichkeit fur Messwert } x: |c_x(t)|^2 = \rho(x,t)$$

Oder besser bei endlich ausgedehnten Detektoren

$$\text{Ortszustande: } \phi_o(x) = \frac{\mathcal{G}\left(x - \frac{2o-1}{2}b\right) \mathcal{G}\left(\frac{2o+1}{2}b - x\right)}{\sqrt{b}}$$

$$\hat{x}\phi_o(x) = \underbrace{x_o}_{=o \cdot b} \phi_o(x)$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \psi(x,t) &= \sum_n c_n(t) \underbrace{\phi_n(x)}_{\int \phi_n(x') \delta(x-x') dx' \rightarrow} = \sum_o \underbrace{\sum_n c_n(t) \langle \phi_o | \phi_n \rangle}_{c_o(t)} \phi_o(x) \\ &= \sum_o \int \phi_n(x') \phi_o(x') dx' \phi_o(x) \end{aligned}$$



$$\text{Wahrscheinlichkeit fur Messwert } x_o: |c_o(t)|^2 = \left| \sum_n c_n(t) \langle \phi_o | \phi_n \rangle \right|^2 \quad (4-5)$$

## Verallgemeinerung

Identifikation:	(4-6)
Observable	$\leftrightarrow$ Operator
Beobachtbarer Zustand	$\leftrightarrow$ Eigenfunktion
Messwert	$\leftrightarrow$ Eigenwert
Wahrscheinlichkeit für Messwert	$\leftrightarrow$ Entwicklungskoeffizient

## Allgemeine Zusammenfassung

$$\text{Eigenwertgleichung: } \underbrace{\hat{A}}_{\text{Observable}} \underbrace{\phi_n(\vec{r})}_{\text{Zustandsvektor}} = \underbrace{a_n}_{\text{Messwert}} \underbrace{\phi_n(\vec{r})}_{\text{Zustandsvektor}} \quad (4-7)$$

$$\text{Orthonormalität: } \langle \phi_m | \phi_n \rangle \equiv \int \phi_m^*(\vec{r}) \phi_n(\vec{r}) d^3r = \delta_{mn}$$

$$\text{Darstellung der Wellenfunktion: } \underbrace{\psi(\vec{r}, t)}_{\text{Darstellung bezüglich } \vec{x}} = \sum c_n(t) \underbrace{\phi_n(\vec{r})}_{\text{Darstellung bezüglich der Observablen } \hat{A}}, \quad c_n(t) = \int \phi_n^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) d^3r$$

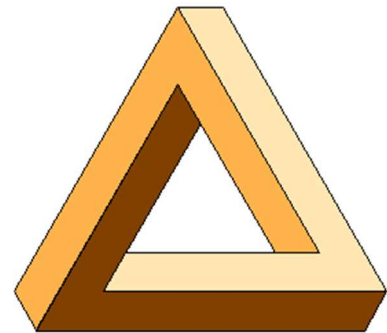
$$\text{Wahrscheinlichkeit für den Messwert } a_n : |c_n(t)|^2$$

Mittel- oder Erwartungswert:

$$\langle \hat{A} \rangle \equiv \int \psi^*(\vec{r}) \hat{A} \psi(\vec{r}) d^3r = \sum_{m,n} a_n c_m^* c_n \langle \phi_m | \phi_n \rangle = \sum_n a_n |c_n|^2$$

## Nichtphysikalisches Beispiel: Penrose-Dreieck (PD)

'Weltinhalt' PD ist im 2D-Raum bewusstseinsfähig,  
 Manifestation im 3D-Raum ist unmittelbar erlebbares Modell  
 für den quantenmechanischen Messprozess



Mögliche Zustände (Fokuse in der 3D-Darstellung des Gesichtsfelds)

Superposition von 3D-Möglichkeiten:

Wahrscheinlichkeiten für Manifestation eines bestimmten Fokus im Gesichtsfeld:

$$\psi = c_1 \underbrace{\text{PD}_1}_{\text{Fokus 1}} + c_2 \underbrace{\text{PD}_2}_{\text{Fokus 2}} + c_3 \underbrace{\text{PD}_3}_{\text{Fokus 3}}$$

$$|c_1|^2 = |c_2|^2 = |c_3|^2 = \frac{1}{3}$$

Quantenmechanik: Welt wird durch Versuchsaufbau exerziert, Weltausschnitt kann auf verschiedene Arten wirken, Möglichkeiten manifestieren sich in der Zeit entsprechend ihrer Wahrscheinlichkeit.

## Quantenphänomene in Physik und Wahrnehmung

### • Komplementarität

	Dynamik	↔	Inhalt
Physik	Welle	–	Teilchen (Elektron, Atom)
Visuelle Wahrn.	Ortsänderung	–	Körper (Stein, Auto, Mensch, Wolke, ...)
Gedanken	ich denke über	...	etwas
Gefühle	ich fühle mich	...	in der speziellen Situation

- Akustische Wahrnehmung, Tastwahrnehmung, Geruch
- Identifikation:
  - Körper ↔ Inhalt
  - Gedanken und Gefühlen ↔ Dynamik  
(das bin ich: meine Gedanken, meine Gefühle, mein Körper)

Inhalt und Bewegung sind untrennbar, sie sind eins

### • Manifestation

- Vakuumröhre: Plötzlich erscheint Punkt auf Bildschirm
- Bildbetrachtung: Plötzlich 'springt mir etwas ins Auge'
- Hören einer Stimme: Plötzlich weiß ich, wer da spricht
- Gedanken: Plötzlich ist mir die Lösung der Übungsaufgabe klar
- Gefühle: Plötzlich empfinde ich Liebe oder Haß für einen Menschen

### • Superposition

- Interferenz • Quanteninterferometer
- Oszillation • Atomare Zustände → Licht
  - Gesichter-Vase
  - 3D-Würfel
  - Ruhe - Lärme (Meditationsmusik - Straßenlärm)
  - Liebe - Hass
  - etwas tun oder lassen
  - ∴

Die Superposition von möglichen Bewusstseinsinhalten wird in der Kunst oft dargestellt (Musik, modernes Theater, ...)