

Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaft

im Wintersemester 2008/2009

Luis Huergo

Universität Tübingen

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät

Lehrstuhl für Statistik, Ökonometrie und Empirische Wirtschaftsforschung

Prof. Dr. Joachim Grammig

luis.huergo@uni-tuebingen.de

Taschenrechner

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre
Anwendung

- Was ist nicht erlaubt?

- Der Taschenrechner darf **nicht** programmierbar und **nicht** graphikfähig sein!
- Dazu darf er **keine** Gleichungen (symbolisch oder Lineare Gleichungssysteme) lösen können!
- Auch die Matrixrechnung darf er **nicht** unterstützen!

- Was ist erlaubt?

Mehrzeilige Taschenrechner sind erlaubt. Achtung: Können oft oben genanntes!

Positivliste

Folgende Taschenrechner sind hinreichend, aber nicht notwendig.

● Taschenrechner

3. Differentiation und ihre
Anwendung

Texas Instr.	Casio	Sharp
TI-30 eco RS	FX-82 MS	EL-531 WG
TI-30X IIB	FX-82 ES	EL-500 W
TI-30X IIS	FX-85 MS	
TI-34 II		



3. Differentiation und ihre Anwendung

3.1 Die Ableitung

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

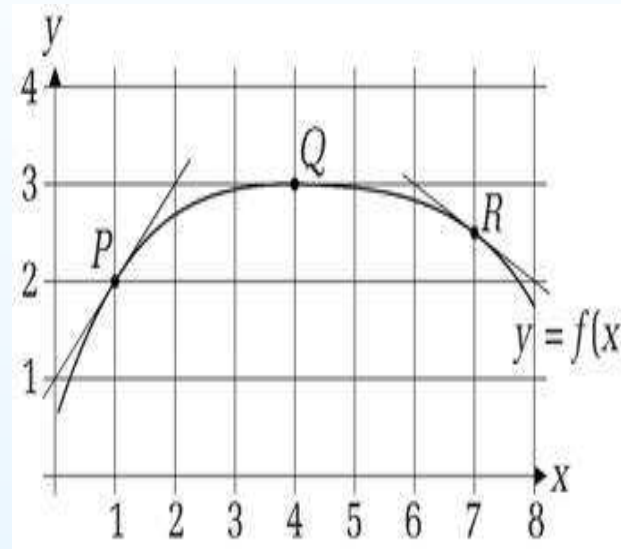
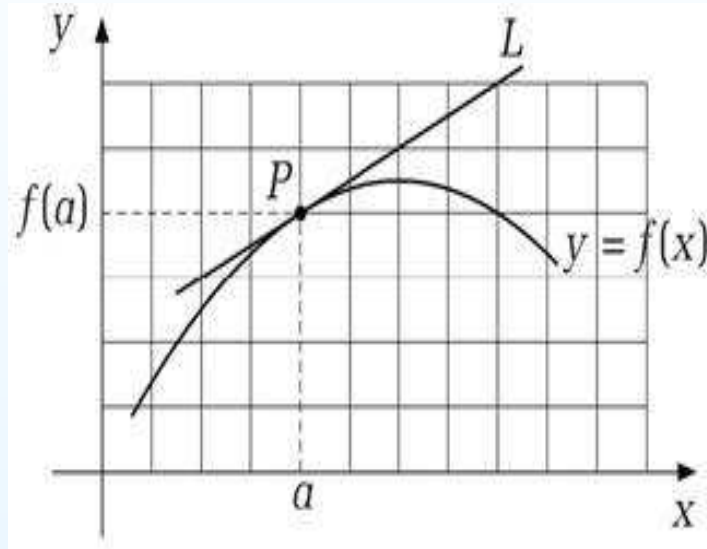
- **3.1 Die Ableitung**
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz, Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

Motivation: Neben der reinen funktionalen Zuordnung von Variablen spielt insb. in ökonomischen Anwendungen die Frage der **Änderungstendenz einer Funktion** eine große Rolle.

- Für den Anbieter eines Gutes auf einem Markt ist es nicht nur wichtig zu wissen, wie hoch sein Erlös bei einem bestimmten (festen) Marktpreis ist, sondern auch, wie sich sein Erlös ändert, wenn sich der Preis ändert.
- Analysiert man die Auswirkungen einer Lohnerhöhung auf das Güternachfrageverhalten von Haushalten, ist es u.a. wichtig zu wissen, wie die Konsumausgaben der Haushalte sich ändern, wenn das (verfügbare) Haushaltseinkommen um einen bestimmten Betrag ansteigt.

Maß für die Steilheit eines Grafen:

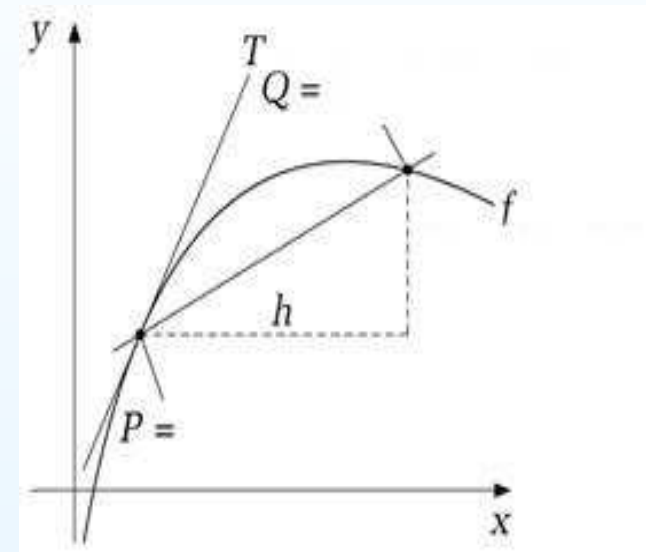
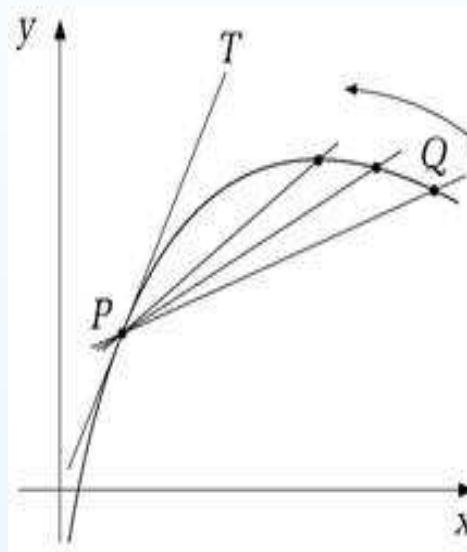
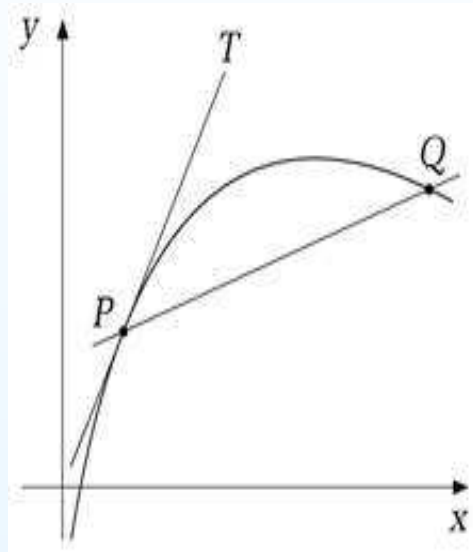
- Wie kann man auf präzise Weise die Steilheit eines Grafen messen?



- Die Steigung der Tangente im Punkt a misst die Steigung der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $(a, f(a))$.
- Bei nichtlinearen Funktionen kann die Steigung von Punkt zu Punkt variieren!

Von der Sekante zur Tangente:

- Grafische Veranschaulichung:



- Die Steigung der Sekante ist gegeben durch den **Differenzenquotienten**:

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

DEFINITION: *Differentialquotient; erste Ableitung; derivative*

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$ mit dem Definitionsbereich $D(f)$.
Existiert für einen Wert $a \in D(f)$ der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

so heißt dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder **erste Ableitung** der Funktion f an der Stelle a . Diese Zahl gibt die Steigung der Funktion an der Stelle $(a, f(a))$ an.

Übliche Schreibweisen:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} ; \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a} ; \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a} ; y'|_{x=a} ; y'(a)$$

DEFINITION: *Tangente*

Die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(a, f(a))$ ist

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) .$$

—
DEFINITION: *Ableitungsfunktion*

Existiert zu einer Funktion $y = f(x)$ in jedem Punkt x eines Intervalls I (mit $I \in D(f)$) die (erste) Ableitung $f'(x)$, so heißt f (in I) **differenzierbar**.

Die Funktion f' , die jedem $x \in I$ die zugehörige (erste) Ableitung $f'(x)$ von f zuordnet, heißt **abgeleitete Funktion** von f oder **Ableitungsfunktion** von f .

ANMERKUNGEN:

- Die Bestimmung der Ableitung einer Funktion mittels der dargestellten Grenzwertbetrachtung ist i.a. sehr aufwändig.
Zur praktischen Anwendung der Differentialrechnung erweist es sich als nicht notwendig. Es genügt vielmehr die Kenntnis der Ableitung elementarer Funktionen und einiger Rechenregeln zum Differenzieren.
- Bevor wir diese ermitteln bzw. darstellen, sollen einige zentrale Anwendungen der Differentialrechnung die weiteren Ausführungen motivieren. Weiterhin erweist es sich als sinnvoll, einen kurzen Exkurs über die Rechenregeln für die Grenzwerte an dieser Stelle einzubauen.

3.2 Monotonie

Wir greifen auf die Definition im Abschnitt 2.1 zurück:

DEFINITION: *Monotonie*

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f(x)$

- streng monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- streng monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
- monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
- monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

• Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

• 3.1 Die Ableitung

• **3.2 Monotonie**

• 3.3 Änderungsraten

• 3.4 Exkurs: Grenzwerte

• 3.5 Differentiationsregeln

• 3.6 Höhere Ableitungen

• 3.7 Konvexe Funktionen

• 3.8 Die

Exponentialfunktion

• 3.9 Die

Logarithmusfunktion

• 3.10 Differentiale

• 3.11 Approximation von

Funktionen

• 3.12 Taylor Formel

• 3.13 Elastizitäten

• 3.14 Stetigkeit und

Differenzierbarkeit

• 3.15 Zwischenwertsatz.

Newton-Verfahren

• 3.16 Regel von L'Hôpital

• Literatur

- Mit Hilfe des **Vorzeichens der ersten Ableitung** einer Funktion ist es möglich, für (differenzierbare) Funktionen die **schwache Monotonie** über folgende Zusammenhänge zu überprüfen:
 - $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I \iff f$ ist monoton wachsend auf I ;
 - $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I \iff f$ ist monoton fallend auf I ;
 - ebenso gilt:
 - $f'(x) = 0$ für alle $x \in I \iff f$ ist konstant auf I .
- Die dargestellten Zusammenhänge haben den Charakter eines mathematischen Satzes. Eine Möglichkeit, diesen Satz zu beweisen liefert der so genannte Mittelwertsatz, den wir weiter unten kennenlernen werden.
- Für die **strenge Monotonie** gelten lediglich die folgenden Implikationen:
 - $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \implies f$ ist streng monoton wachsend auf I ;
 - $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \implies f$ ist streng monoton fallend auf I .

3.3 Änderungsraten

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

- Die Ableitung wurde als Steigung der Tangente an einem bestimmten Punkt des Grafen der Funktion definiert.
- In den wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen spielt aber oft eine Interpretation als **Änderungsrate** eine Rolle.
- Wir unterscheiden zwischen der **momentanen Änderungsrate** $f'(a)$ und der **durchschnittlichen Änderungsrate**, die durch den Differenzenquotient $(f(a+h) - f(a))/h$ gegeben ist. Beide Raten spielen insbesondere bei der Betrachtung einer Variable im Zeitablauf eine Rolle (d.h. die unabhängige Variable ist die Zeit t).
- Eine weitere Anwendung des Ableitungsbegriffes in den Wirtschaftswissenschaften spiegelt sich in einer speziellen Bezeichnung von bestimmten Ableitungsfunktionen wider. So spricht man regelmäßig von **Grenzkosten** oder **Grenzertrag**, vom **Grenzprodukt** oder der **Grenzneigung** zum Konsum. (**marginal costs**,...)

3.4 Exkurs: Grenzwerte

Grenzwerte spielen nicht nur bei der Definition der Ableitung eine Rolle, sondern sind auch für spätere Anwendungen relevant. Deshalb wollen wir hier einen (ersten) Exkurs darüber einfügen.

DEFINITION: *Grenzwert einer Zahlenfolge, limits of a sequence*

Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt **konvergent** gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $\bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \bar{n}(\varepsilon).$$

a heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **divergent**, falls sie nicht konvergiert.

ANMERKUNG: Ist $a = 0$, so wird $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **Nullfolge** genannt.

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz, Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

DEFINITION: *Grenzwert von Funktionen*

Die Funktion $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ hat an der Stelle $a \in \mathbb{R}$, die nicht notwendigerweise im Definitionsbereich $D(f)$ enthalten sein muss, genau dann einen **Grenzwert** \bar{a} , in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \bar{a} ,$$

wenn es Zahlenfolgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ und $\lim x_n = a$ gibt und für alle solche Folgen gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \bar{a} .$$

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen:

Wir betrachten die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $D(f) = D(g)$.

Es sei: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = d$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = e$ mit $d, e \in \mathbb{R}$.

Dann gelten folgende Rechenregeln:

$$(R1) \quad \lim_{x \rightarrow a} c = c \quad \text{mit } c = \textit{konst.} \in \mathbb{R}$$

$$(R2) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + c] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + c = d + c$$

$$(R3) \quad \lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot d$$

$$(R4) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = d \pm e$$

Fortsetzung der Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen:

$$(R5) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = d \cdot e$$

$$(R6) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{d}{e}$$

$$(R7) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = d^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$(R8) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{d} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad \text{und } f, d \geq 0$$

3.5 Differentiationsregeln

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- **3.5 Differentiationsregeln**
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

- Die Ableitung der **konstanten Funktion** $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}; c = \text{konst.}$)
Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist überall differenzierbar und es gilt: $f'(x) = 0$.
- Die Ableitung einer **additiven Konstante** $y = c + f(x)$ ($c \in \mathbb{R}; c = \text{konst.}$)
Die Ableitung ergibt sich zu: $y' = f'(x)$.
- Die Ableitung einer **multiplikativen Konstante** $y = c \cdot f(x)$ ($c \in \mathbb{R}; c = \text{konst.}$)
Die Ableitung ergibt sich zu: $y' = c \cdot f'(x)$.
- Die Ableitung der **Potenzfunktion** $f(x) = x^r$ ($r \in \mathbb{R}$).
Die Potenzfunktion ist überall differenzierbar und es gilt:
 $f'(x) = r x^{r-1}$ (power rule).

- **Summenregel:** $y = f(x) \pm g(x) \implies y' = f'(x) \pm g'(x)$.

Die Summenregel kann auf beliebig viele Summanden erweitert werden. Insbesondere gilt sie auch bei der Summendarstellung.

Z.B. für ein Polynom der Form $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x^i$ erhält man die Ableitung

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n i \cdot a_i \cdot x^{i-1}.$$

- **Produktregel:** $y = f(x) \cdot g(x) \implies y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

- **Quotientenregel:** $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x) \neq 0$

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

- **Kettenregel: (chain rule)** $y = f(g(x))$ mit $y = f(z)$ als äußerer Funktion und $z = g(x)$ als innerer Funktion

$$y' = f'(z) \cdot g'(x)$$

Verallgemeinerung der Kettenregel: $y = f(g(h(x)))$ mit $y = f(z)$, $z = g(u)$ und $u = h(x)$

$$y' = f'(z) \cdot g'(u) \cdot h'(x)$$

- **Ableitung der Umkehrfunktion (inverse function rule):**

Besitzt eine in D differenzierbare Funktion $y = f(x)$ eine Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$, so ist $x = f^{-1}(y)$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

3.6 Höhere Ableitungen

DEFINITION: *Zweite Ableitung, second derivative*

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$. Ist ihre erste Ableitung $y' = f'(x)$ ihrerseits differenzierbar, dann heißt f zweimal differenzierbar und die erste Ableitung von $f'(x)$ heißt **zweite Ableitung** der Funktion $y = f(x)$. Diese Ableitung wird bezeichnet mit

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad \text{oder} \quad y'' \quad \text{oder} \quad f'' .$$

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

3.7 Konvexe Funktionen

DEFINITION: *konvexe und konkave Funktionen*

Sei $I \in D(f)$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f

a) **konvex**, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

für alle $\lambda \in [0, 1]$;

b) **konkav**, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

für alle $\lambda \in [0, 1]$.

Eine Funktion f heißt **streng** konvex (konkav), wenn stets das Ungleichheitszeichen gültig ist.

• Taschenrechner

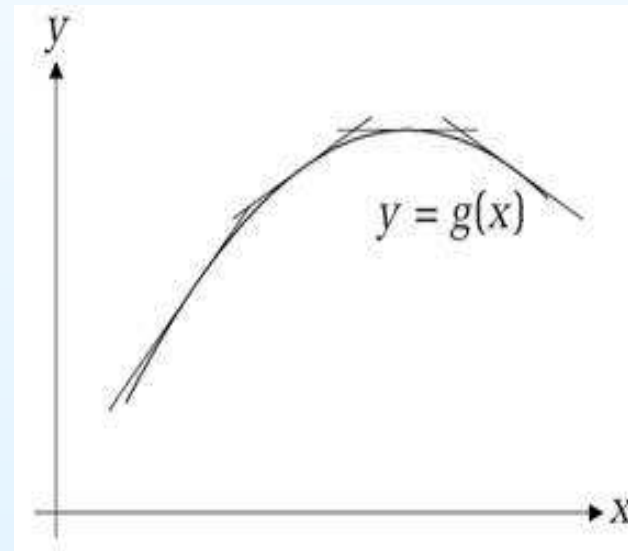
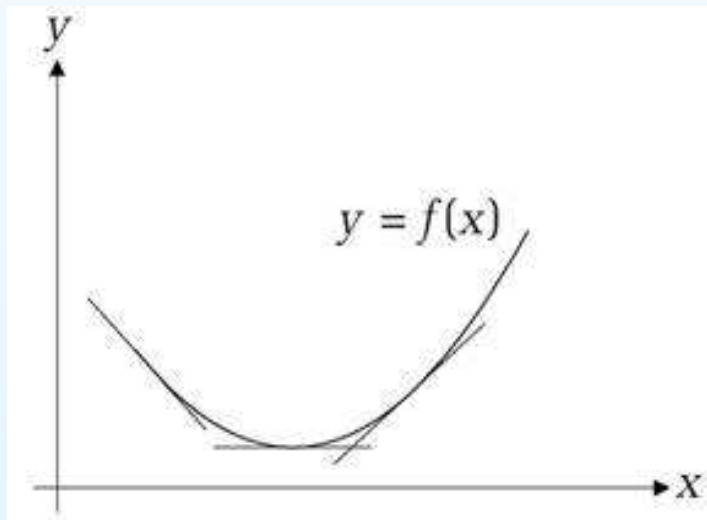
3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- **3.7 Konvexe Funktionen**
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

SATZ: *Krümmungsverhalten differenzierbarer Funktionen*

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$. Gilt für alle $x \in I \subset D(f)$:

- a) $f''(x) \geq 0$, so ist f im Intervall I **konvex**;
- b) $f''(x) \leq 0$, so ist f im Intervall I **konkav**.



3.8 Die Exponentialfunktion

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- **3.8 Die Exponentialfunktion**
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz, Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

- Die Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$.
Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist überall differenzierbar und es gilt: $f'(x) = e^x$

- *Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion: $y = e^{g(x)}$*

$$y' = e^{g(x)} g'(x)$$

- *Ableitung einer Exponentialfunktion zur allgemeinen Basis a :*

$$y = a^x \text{ für } a > 0$$

$$y' = a^x \ln a$$

Verallgemeinerung: $y = a^{g(x)} \implies y' = a^{g(x)} g'(x) \ln a$ für $a \in \mathbb{R}^+$

3.9 Die Logarithmusfunktion

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- **3.9 Die Logarithmusfunktion**
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

- Die Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ ($x > 0$)
Die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ ist für $x > 0$ überall differenzierbar und es gilt: $f'(x) = 1/x$.
- *Ableitung der Logarithmusfunktion zur allgemeinen Basis a :*
 $y = \log_a x$ mit $a > 0$

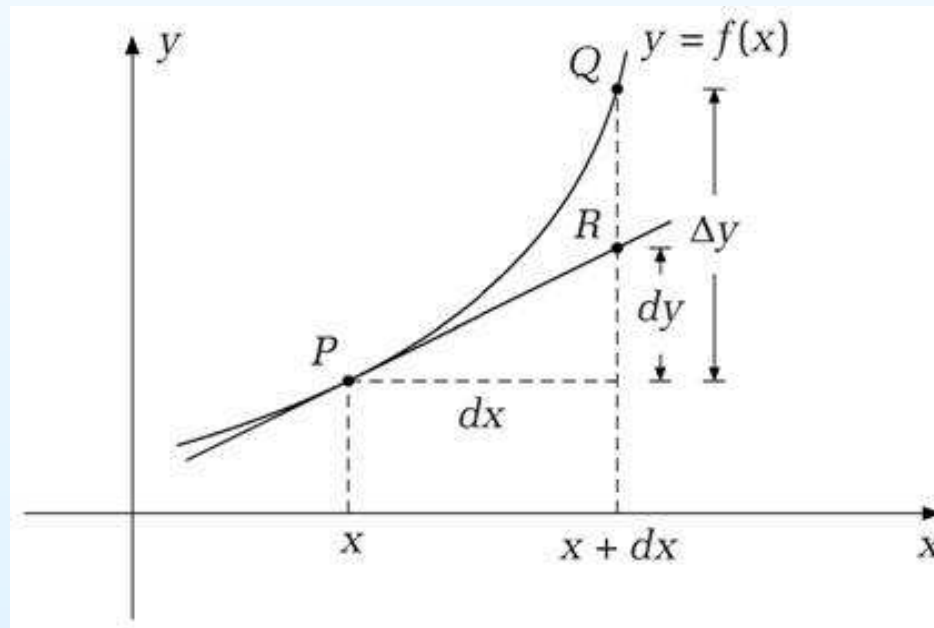
$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

Verallgemeinerung: $y = \log_a g(x) \implies y' = \frac{g'(x)}{g(x) \ln a}$

3.10 Differentiale

DEFINITION: *Differential, differential*

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$ und ihre erste Ableitung $y' = f'(x)$. dx sei eine endliche Änderung der unabhängigen Variablen. Dann nennt man $dy = f'(x)dx$ das zu dx gehörende **Differential der Funktion** f . dx nennt man auch Differential der unabhängigen Variablen.



• Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- **3.10 Differentiale**
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

—
ANMERKUNGEN:

- Für $dx = 1$ gilt: $dy = f'(x)$, d.h. das Differential ist gleich der ersten Ableitung der Funktion.
- Analog zu den Rechenregeln für die Differentiation gibt es Rechenregeln für Differentiale.

Beispielsweise gilt:

- $dc = 0$ für $c = \text{konstant}$;
 - $d(c_1 \cdot x + c_2 \cdot y) = c_1 dx + c_2 dy$ für c_1 und c_2 konstant;
 - $d(x \cdot y) = y dx + x dy$
- Differentiale können auch für höhere Ableitungen einer Funktion definiert werden. Z.B. ist ein **Differential zweiter Ordnung** definiert als $d^2y = f''(x)dx^2$.
 - Allgemein gilt: Ein Differential n -ter Ordnung ist gegeben durch:

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n .$$

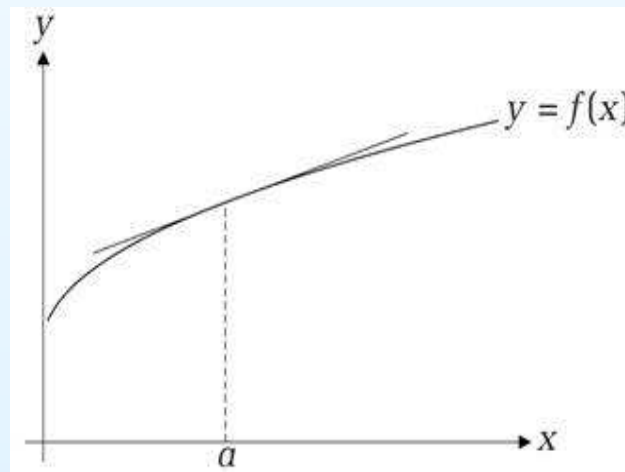
3.11 Approximation von Funktionen

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- **3.11 Approximation von Funktionen**
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

- Differentiale berechnen die (approximative) Änderung des Funktionswertes aufgrund einer Änderung des Argumentwertes. Regelmäßig ist es aber zusätzlich erforderlich den approximativen Funktionswert (und nicht nur dessen Änderung) zu berechnen.
- Dazu kann z.B. die Tangentengleichung herangezogen werden, womit eine **lineare Approximation** des Funktionswertes möglich ist.



Zur linearen Approximation verwenden wir:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Quadratische Approximation:

- Manchmal erweist sich die lineare Approximation als zu ungenau.

Vorschlag: Statt eine Funktion nur durch ein Polynom 1. Grades (= lineare Funktion) zu approximieren, kann versucht werden, ein Polynom n -ten Grades $P(x)$ zu verwenden!

- Die Vorgehensweise bei der polynomialen Approximation wird anhand der **quadratischen Approximation** demonstriert:
- Bisher wurde ein Polynom 1. Grades der Form $P(x) = A + B \cdot (x - a)$ zur Approximation der Funktion $y = f(x)$ in der Nähe von $x = a$ verwendet; durch die Identität des Polynoms 1. Grades mit der Tangente konnten die unbekannt Koeffizienten des Polynoms (A und B) identifiziert werden und es wurde eine lineare Approximation in der Form $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ vorgeschlagen.
- Jetzt soll ein Polynom 2. Grades der Form $P(x) = A + B \cdot (x - a) + C \cdot (x - a)^2$ verwendet werden.
- Was setzen wir für die Koeffizienten A , B und C in diesem Fall ein?

– \implies Sinnvollerweise werden folgende drei Anforderungen an das Polynom $P(x)$ gestellt:

- $P(a) = f(a)$, d.h. der Funktionswert an der Stelle a soll gleich dem Wert des Polynoms an dieser Stelle sein;
 - $P'(a) = f'(a)$; d.h. die Steigung des Polynoms und der Funktion an der Stelle a sollen identisch sein;
 - $P''(a) = f''(a)$; d.h. das Krümmungsverhalten des Polynoms und der Funktion an der Stelle a sollen identisch sein;
- Dies liefert drei Gleichungen zur Identifikation von A , B und C . Denn neben der Polynomgleichung $P(x)$ erhalten wir die deren erste und zweite Ableitung des Polynoms zu:

$$(I) \quad P'(x) = B + 2C(x - a)$$

$$(II) \quad P''(x) = 2C$$

Aus (II) folgt dann unmittelbar: $C = P''(a)/2 = f''(a)/2$; $B = P'(a) = f'(a)$ und $A = P(a) = f(a)$.

- Damit erhalten wir als quadratische Approximation von $y = f(x)$ um den Wert $x = a$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2 .$$

- Als allgemeiner Fall ergibt sich schließlich das so genannte **Taylor-Polynom n -ter Ordnung**, die **Taylorreihe n -ter Ordnung** oder die **Taylorapproximation n -ter Ordnung** zu:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i .$$

- Durch die Konstruktion des Taylor-Polynoms sollte es möglich sein, die Funktion $y = f(x)$ in einem (kleinen?) Intervall um die Stelle $x = a$ herum zu approximieren.

ANMERKUNGEN:

- Wird die Approximation um den speziellen Punkt $a = 0$ herum durchgeführt, so spricht man von einer Maclaurin-Reihe.
- Wie kann man den Approximationsfehler abschätzen?

3.12 Taylor Formel

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- **3.12 Taylor Formel**
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz, Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

- Zur Abschätzung des Approximationsfehlers betrachten wir das Taylorpolynom um $x = 0$ (Maclaurin-Polynom) in der Form

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i .$$

- Die so genannte **Taylor-Formel** erlaubt nun die Funktion $y = f(x)$ exakt mittels des Taylorpolynoms und eines geeignet gewählten Restglieds $R_{n+1}(x)$ darzustellen.

Man erhält dann: $f(x) = P(x) + R_{n+1}(x)$.

- Eine wichtige explizite Form für das Restglied ist die so genannte Lagrange'sche Form des Restglieds:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(c) x^{n+1} ,$$

für eine Zahl c zwischen 0 und x .

Beweis siehe z.B. Sydsæter und Hammond (2.A.) S. 336f.

- Damit nun kann man die Taylor-Formel explizit hinschreiben mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(c) x^{n+1} .$$

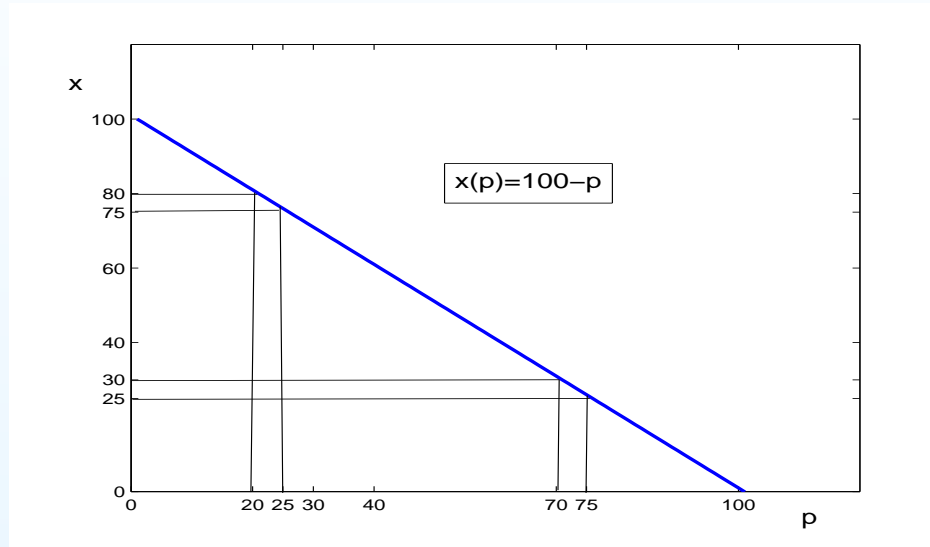
ANMERKUNGEN

- Die auf der Taylor-Formel basierte Approximation einer Funktion wird häufig in wirtschaftswissenschaftlichen Modellen verwendet. Darüberhinaus wird sie als eines der Hauptresultate der Analysis angesehen.
- Das Restglied in der Lagrange'schen Form ähnelt den Summentermen im Taylorpolynom.
- Allerdings enthält die Taylor-Formel das nicht näher spezifizierte c und damit ist sie nicht direkt für die praktische Anwendung geeignet!

- Es lassen sich aber dennoch zwei „indirekte“ Anwendungen der Taylor-Formel ableiten:
 - Da sich zeigen läßt, dass für jedes feste x der Restterm mit wachsendem n gegen 0 geht, ist also eine umso genauere Approximation der Funktion $f(x)$ durch das Polynom $P(x)$ möglich, je höher der Polynomgrad ist.
 - Darüberhinaus ist auch eine Abschätzung einer oberen Grenze für den Approximationsfehler möglich.

3.13 Elastizitäten

Motivation zur Verwendung von Elastizitäten: *Wir betrachten eine lineare Nachfragefunktion der Form $x(p) = 100 - p$.*



Ändert man für eine Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $(x; f(x))$ die unabhängige Variable x um Δx so bezeichnet man das Verhältnis der relativen Änderungen $\frac{\Delta f}{f}$ und $\frac{\Delta x}{x}$ nennt man

Bogenelastizität von f bezüglich x $\varepsilon_B(f, x) = \frac{\Delta f}{f} / \frac{\Delta x}{x}$.

Die Bogenelastizität gibt an, um wieviel % sich f durchschnittlich ändert, wenn die unabhängige Variable um 1% geändert wird.

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- **3.13 Elastizitäten**
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

Bildet man den Grenzwert für $\Delta x \rightarrow 0$ so erhalten wir eine gute Approximation der Elastizität wie folgt:

DEFINITION: *Punkt*elastizität, *elasticity*

Gegeben sei die stetige Funktion $y = f(x)$. Dann nennt man das Verhältnis der relativen Änderungen $\frac{df}{f}$ und $\frac{dx}{x}$ **Punkt**elastizität von f bezüglich x

$$\varepsilon(f, x) = \frac{df/f}{dx/x}$$

Der Zahlenwert der Punkt

elastizität gibt an, um wieviel % sich f ändert, wenn die unabhängige Variable um 1% geändert wird.

Wert der Elastizität	Attribut der Funktion
$\varepsilon = 0$	vollkommen unelastisch
$-1 < \varepsilon < 0$ bzw. $0 < \varepsilon < 1$	inelastisch
$-\infty < \varepsilon < -1$ bzw. $1 < \varepsilon < \infty$	elastisch
$\varepsilon = \pm\infty$	vollkommen elastisch

3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

DEFINITION: *Stetigkeit von Funktionen, continuity*

$y = f(x)$ heißt stetig an der Stelle $a \in D(f)$ genau dann, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

Ist eine Funktion $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig, so wird die Funktion **stetig** genannt.

Damit eine Funktion an der Stelle $x = a$ stetig ist müssen also drei Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Funktion f muss an der Stelle $x = a$ definiert sein;
2. der Grenzwert von f , wenn x gegen a strebt, muss existieren;
3. dieser Grenzwert muss exakt gleich $f(a)$ sein.

• Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur

BEISPIELE:

1. $f(x) = |x|;$

2. $f(x) = \begin{cases} 0,5x + 1 & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ -x + 5 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$

3. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$

Wir unterscheiden zwischen hebbaren und nicht hebbaren Unstetigkeitsstellen.

Falls eine Funktion stetig ist, können daraus viele wichtige Eigenschaften abgeleitet werden.

SATZ: (*Eigenschaften stetiger Funktionen*)

Die Funktionen f und g seien stetig in a . Dann gilt u.a.:

a) $f \pm g$ sind stetig in a ;

b) $f \cdot g$ und f/g (falls $g(a) \neq 0$) sind stetig in a .

Einseitige Grenzwerte:

DEFINITION: *einseitiger Grenzwert, one-sided limits*

Sei $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt der Ausdruck

a) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ **rechtsseitiger** Grenzwert von f an der Stelle a und

b) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = B$ **linksseitiger** Grenzwert von f an der Stelle a .

Man kann nun eine Aussage über die Existenz eines Grenzwerts einer Funktion f an einer Stelle a machen gemäß folgendem

Satz:

Eine Funktion $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Punkt a den Grenzwert A , falls links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen.

Einseitige Stetigkeit:

DEFINITION: *einseitige Stetigkeit, one-sided continuity*

a) Sei f eine Funktion auf dem Intervall $[a, d)$. Wenn gilt: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
nennt man die Funktion **stetig von rechts** an der Stelle a .

b) Sei f eine Funktion auf dem Intervall $(c, a]$. Wenn gilt: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$
nennt man die Funktion **stetig von links** an der Stelle a .

Eine Funktion ist demnach genau dann stetig an der Stelle a , wenn sie sowohl stetig von links als auch von rechts ist.

Eine Funktion, die auf einem **abgeschlossenen Intervall** $[a, b]$ definiert ist, ist dort auch stetig, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls (a, b) stetig ist und zusätzlich stetig von rechts an der Stelle a und stetig von links an der Stelle b ist.

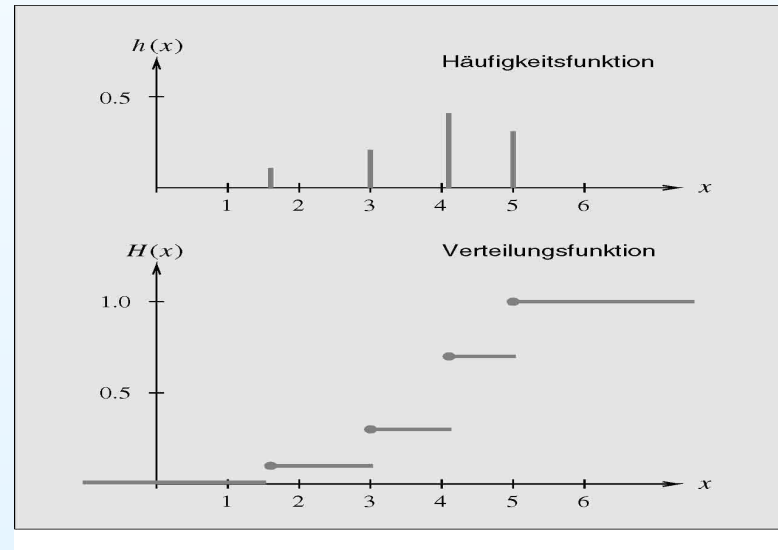
Anwendung dieses Konzepts in der Statistik:

Die Funktion $h(x) = \begin{cases} h_i & \text{falls } x = x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ heißt Häufigkeitsfunktion der

Variablen X . Die Funktion $H(x) = \sum_{x_i \leq x} h(x_i)$ heißt (empirische)

Verteilungsfunktion der Variablen X .

Grafische Darstellung von Häufigkeit- und Verteilungsfunktion:



Die (empirische) Verteilungsfunktion hat u.a. folgende Eigenschaft: $H(x)$ ist überall wenigstens rechtsseitig stetig, d.h. es gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} H(x) = H(a).$$

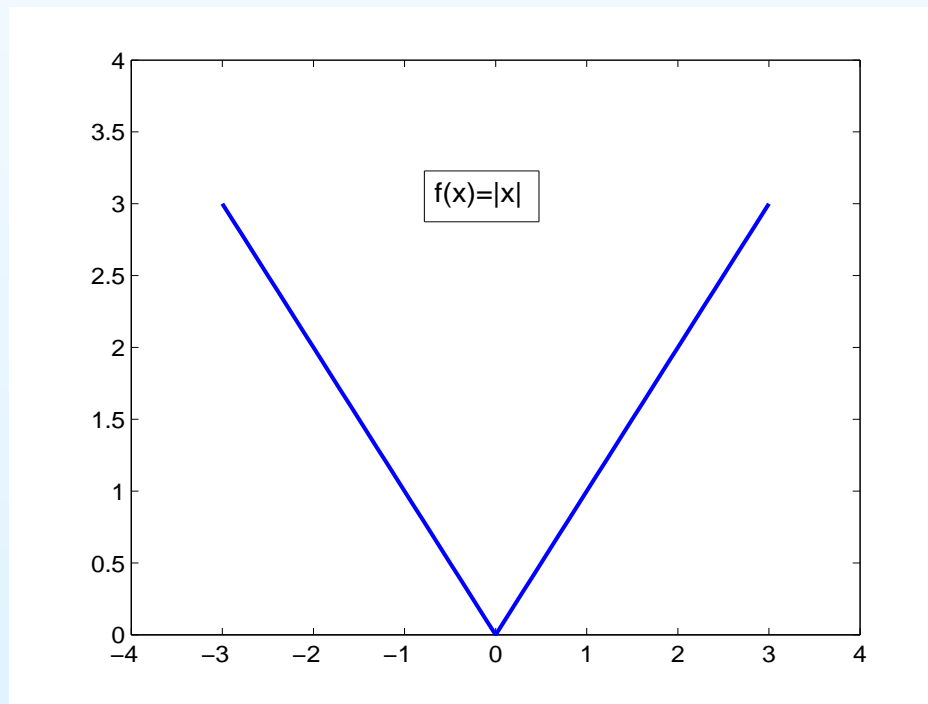
Die Beziehung zwischen den wichtigen Eigenschaften der Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion regelt der folgende

SATZ: (*Stetigkeit und Differenzierbarkeit*)

Ist eine Funktion f im Punkt a differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.
Die Umkehrung gilt nicht.

Aber es gilt: Ist f in a *nicht* stetig, so ist sie auch *nicht* differenzierbar.

BEISPIEL:



3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren

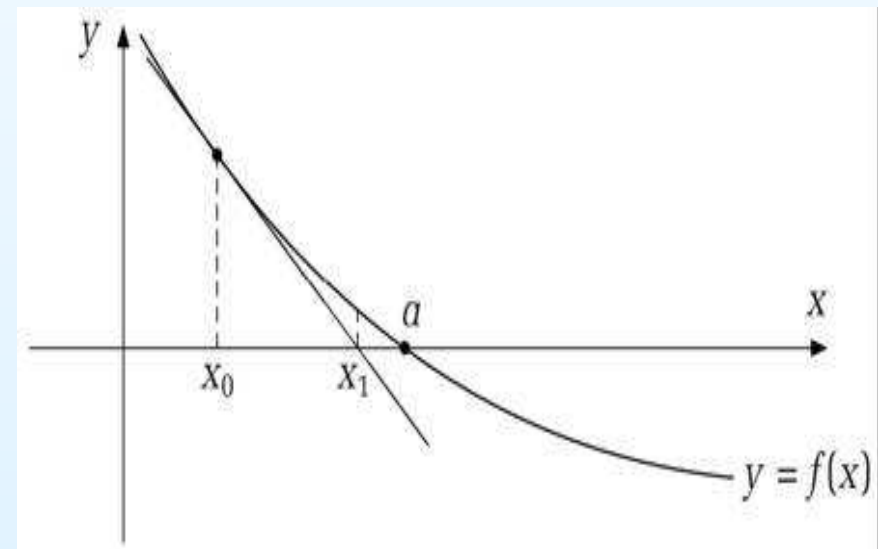
SATZ: (*Zwischenwertsatz, intermediate value theorem*)

Sei f eine auf $[a, b]$ stetige Funktion und nehmen Sie an, dass $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen besitzen. Dann gibt es wenigstens ein c in (a, b) , so dass $f(c) = 0$.

SATZ: (*Newton-Verfahren, Newton's method*)

Die durch das Newton-Verfahren erzeugten Punkte sind gegeben durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ mit } n = 0, 1, \dots$$



3.16 Regel von L'Hôpital

Häufig gilt es Grenzwerte für $x \rightarrow a$ zu untersuchen, bei denen sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen 0

streben. Wir schreiben dann: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{„0“}{„0“}$ und nennen solch einen Grenzwerte eine **unbestimmte Form vom Typ 0/0**.

SATZ: (*Regel von L'Hôpital*)

Gegeben seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die in einem Intervall (α, β) , das den Wert a enthält, differenzierbar sind, wobei sie möglicherweise an der Stelle a nicht differenzierbar sind. Für beide Funktionen f und g gelte, dass sie gegen 0 streben, wenn $x \rightarrow a$ geht. Wenn nun $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq a$ in (α, β) und wenn $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) = L$ ist, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L .$$

Dies gilt unabhängig davon, ob L endlich oder $\pm\infty$ ist.

• Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- **3.16 Regel von L'Hôpital**
- Literatur

Verallgemeinerungen des Satzes von L'Hôpital:

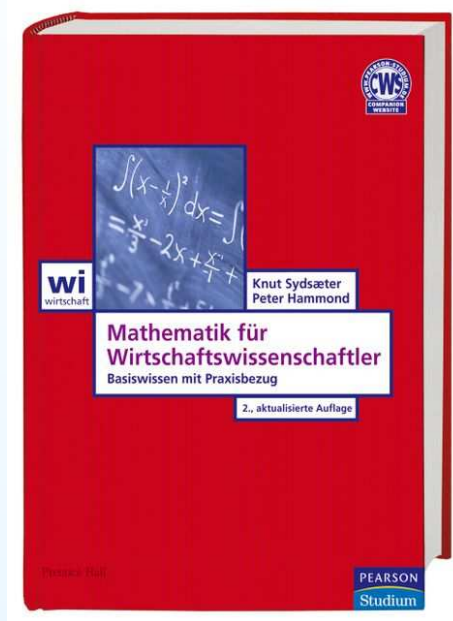
1. Falls $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ebenfalls eine unbestimmte Form vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “ besitzt, wird $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ betrachtet. Ist dies wiederum ein unbestimmter Wert, wird das Verfahren solange wiederholt, bis $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ bestimmt ist.
2. Die Regel behält auch dann ihre Gültigkeit, wenn
 - $x \rightarrow \pm\infty$ betrachtet wird und
 - unbestimmte Ausdrücke der Form „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ resultieren.

Literatur

- Taschenrechner

3. Differentiation und ihre Anwendung

- 3.1 Die Ableitung
- 3.2 Monotonie
- 3.3 Änderungsraten
- 3.4 Exkurs: Grenzwerte
- 3.5 Differentiationsregeln
- 3.6 Höhere Ableitungen
- 3.7 Konvexe Funktionen
- 3.8 Die Exponentialfunktion
- 3.9 Die Logarithmusfunktion
- 3.10 Differentiale
- 3.11 Approximation von Funktionen
- 3.12 Taylor Formel
- 3.13 Elastizitäten
- 3.14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 3.15 Zwischenwertsatz. Newton-Verfahren
- 3.16 Regel von L'Hôpital
- Literatur



Sydsæter/Hammond (2.A) Kapitel 6 und 7.