

# Kapitel 5

## Starre Körper

### 5.1 Definition und Freiheitsgrade

Bisher haben wir uns darauf beschränkt, die Teilchen eines Systems als Punktteilchen zu beschreiben. Um die Bewegung dieser Teilchen zu beschreiben, reichte es aus, den Ortsvektor dieser Teilchen als Funktion der Zeit anzugeben. Für jedes dieser Punktteilchen haben wir also 3 Koordinaten beziehungsweise 3 Freiheitsgrade.

Wir wollen nun berücksichtigen, dass die uns umgebenden Teilchen keine Punktteilchen sind, sondern eine Ausdehnung und charakteristische Form besitzen. Wenn man nun jemandem die genaue Lage eines solchen ausgedehnten Körpers, z.B. eines irregulär geformten Steines, eindeutig beschreiben will, so kann ich diesem Kollegen zunächst einmal die Position angeben, etwa dadurch, dass ich den Ortsvektor des Schwerpunktes bestimme. Ausserdem sollte ich dem Kollegen aber auch noch darüber etwas sagen, in welcher Lage sich dieser Stein an seiner Position befindet. Die Frage ist wie viele Angaben (Koordinaten) sind erforderlich, um diese Lage eindeutig zu definieren?

Wir könnten sehr naiv an dieses Problem herangehen und uns überlegen, dass der Stein aus  $N$  Atomen besteht. Wir werden also eine genaue Information über die Lage des Steines vermitteln, wenn wir dem Kollegen alle  $3N$  Koordinaten der Atome mitteilen. Ganz abgesehen davon, dass dies wegen der großen Zahl  $N$  der Atome praktisch unmöglich ist, enthielten diese  $3N$  Koordinaten aber offensichtlich auch sehr viel redundante Information. Die Atome des Steines sind ja untereinander fest verbunden. Wir wissen, dass die Abstände von jeweils 2 Atomen  $i$  und  $j$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = C_{ij}$$

unverändert bleiben, jedenfalls solange wir den Stein nicht zertrümmern. Wir sprechen allgemein von einem **Starren Körper**, wenn wir ein System aus  $N$  Massenpunkten vorliegen haben, für deren Abstände zueinander eine Bedingung vom Typ (5.1) gilt.

Man könnte also nun annehmen, dass die  $3N$  Koordinaten oder Freiheitsgrade eines solchen starren Körpers durch die  $N(N-1)/2$  Zwangsbedingungen so eingeschränkt sind, dass man insgesamt

$$f = 3N - \frac{N(N-1)}{2}$$

Freiheitsgrade hätte. Aber auch diese Abschätzung kann nicht stimmen. Sie würde ja für  $N = 7$  den Wert Null liefern und für  $N$  größer als 7 sogar einen negativen Wert.

Wir wollen uns deshalb dieser Frage nach der Zahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers dadurch annähern, dass wir die verschiedenen Teilchenzahlen  $N$  einzeln betrachten:

- N=1:** Besteht der starre Körper aus nur einem Atom, so ist die Zahl der Freiheitsgrade natürlich gleich  $f=3$ , was auch der Formel (5.1) entspricht.
- N=2:** Ein starrer Körper aus 2 Atomen ist eindeutig dadurch gekennzeichnet, dass man zunächst einmal die Koordinaten des ersten Teilchens angibt. Wegen der Zwangsbedingung (5.1) kann sich das zweite Atom nur auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $c_{12}$  und dem ersten Atom im Zentrum aufhalten. Diese Position ist also durch zwei Winkel (Kugelkoordinaten) festgelegt. Insgesamt hat das System  $f = 3 + 2 = 5$  Freiheitsgrade, was auch durch (5.1) gegeben ist.
- N=3:** Die Positionen der Atome 1 und 2 mit dem Abstand  $C_{12}$  seien festgelegt. Das dritte Atom mit dem geforderten Abstand  $C_{13}$  vom Atom 1 muss sich dann auf der Oberfläche einer Kugel mit Zentrum beim Atom 1 und dem Radius  $C_{13}$  befinden (siehe Abb. 5.1). Gleichzeitig aber auch auf der Oberfläche der Kugel mit dem Zentrum im Atom 2 und dem Radius  $C_{23}$ . In der Abb. 5.1 sind diese Kugeln als Kreise dargestellt mit zwei Schnittpunkten, die als mögliche Position des 3. Atoms gekennzeichnet sind. Im drei-dimensionalen Raum liegen diese Schnittpunkte der Kugeln auf einem Kreis um die Verbindungslinie zwischen Atom 1 und 2. Für die Position des 3. Atoms ergibt sich also unter den Bedingungen des starren Körpers genau ein weiterer Freiheitsgrad, etwa eine Winkelkoordinate für den Kreisbogen. Auch in diesem Fall stimmt die Zahl der Freiheitsgrade ( $f = 6$ ) mit der Abschätzung (5.1) überein.
- N=4:** Für die Position des 4. Atoms sind 3 Zwangsbedingungen zu erfüllen. Wenn diese Bedingungen überhaupt erfüllbar sind, gibt es dafür im allgemeinen genau 2 Lösungen. Für das 4. Atom ergibt sich also kein weiterer kontinuierlicher Freiheitsgrad und es bleibt bei  $f = 6$  auch für den Fall  $N = 3$ , was ja auch mit (5.1) übereinstimmt.
- N=5 und mehr:** Für das 5. Atom (und das gleiche gilt für jedes weitere Atom), ist die Position bereits durch die Angabe des Abstandes zu den Atomen 1, 2 und 3 festgelegt. Die Angabe der Abstände zu den weiteren Atomen ist also redundant. Die Zwangsbedingungen sind nicht unabhängig voneinander. Deshalb stagniert auch die Zahl der Freiheitsgrade bei  $f = 6$  für einen starren Körper mit  $N = 3$  bis hinauf zu einer beliebig großen Anzahl von Atomen  $N$ .

Um die Lage eines starren Körpers mit  $N = 3$  oder mehr Atomen eindeutig anzugeben, reicht also die Angabe von 6 Koordinaten. Mit 3 Koordinaten können wir die Position eines Referenzpunktes des starren Körpers angeben. Dies kann z.B. der Schwerpunkt des starren Körpers oder aber auch ein anderer Punkt sein. Durch diese 3 Koordinaten ist sozusagen der Aufenthaltsort des Körpers definiert. Wir haben dann noch genau 3 Koordinaten zur Verfügung um die Orientierung des Körpers im Raum zu beschreiben. Dazu kann man z.B. den Referenzpunkt des Körpers (also etwa der Schwerpunkt) als Koordinatenursprung für zwei Koordinatensysteme ansehen. Das eine Koordinatensystem

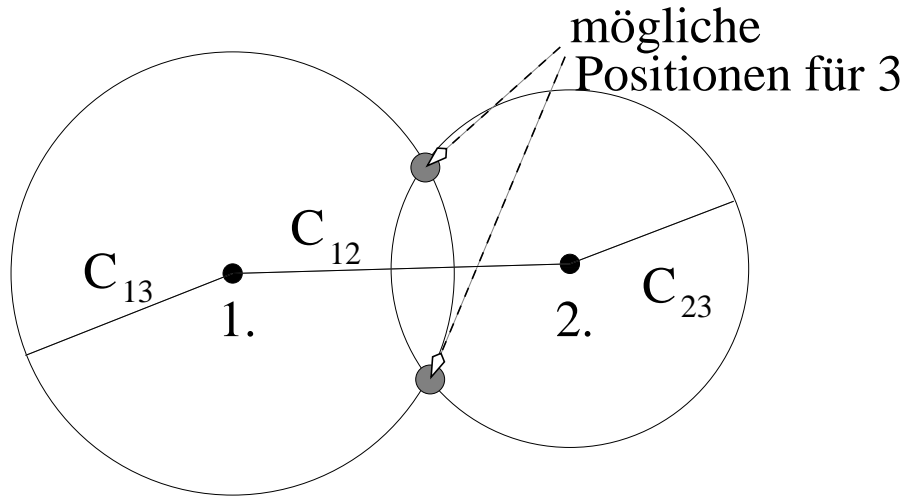


Abbildung 5.1: *Position eines dritten Atoms im starren Körper (siehe Diskussion im Text)*

hat seine Achsen fest im Raum verankert. Das zweite Koordinatensystem mit dem gleichen Koordinatenursprung orientiert seine Achsen aber auf Punkte des starren Körpers. Wir sprechen von einem **körperfesten Koordinatensystem**, das sich mit dem Körper bewegt und rotiert. Die Orientierung des Körpers kann nun durch die 3 Eulerwinkel definiert werden, die erforderlich sind, das raumfeste Koordinatensystem in das körperfeste Koordinatensystem zu drehen.

Natürlich gibt es auch alternative Möglichkeiten für die Wahl der Koordinaten, die die Orientierung des Körpers fest legen. Als ein weiteres Beispiel sei genannt, dass wir die Position von zwei weiteren Referenzpunkten des starren Körpers angeben. Wegen der festen Abstände dieser weiteren Referenzpunkte zum ersten und untereinander, reichen auch hier 3 weitere Koordinaten.

## 5.2 Drehimpuls, Drehmoment und Trägheitstensor

Wie wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, besitzt ein starrer Körper 3 Freiheitsgrade zur Beschreibung seiner Position und 3 Freiheitsgrade zur Beschreibung seiner Orientierung. Da wir die Kinematik der Ortsänderung von Teilchen, die **Translationsbewegungen** bereits am Beispiel der Punktteilchen diskutiert haben, wollen wir uns jetzt zunächst auf die Beschreibung von Bewegungen beschränken, bei denen ein Punkt des starren Körpers ruht. Dies sei gleichzeitig der Koordinatenursprung unseres Koordinatensystems. Wenn der Körper sich um eine Drehachse dreht, die durch diesen diesen Referenzpunkt geht, dreht, so spricht man von einer Rotation des Körpers. Mit diesem Körper wird aber natürlich auch ein körperfestes Koordinatensystem gedreht relativ zu dem ruhenden Laborsystem (Beide Systeme haben einen gemeinsamen Koordinatenursprung, eben den ruhenden Referenzpunkt).

Wenn wir die Geschwindigkeit der einzelnen Atome  $\alpha$  im Laborsystem berechnen wollen, so können wir die allgemeine Beziehung zwischen Geschwindigkeiten in Inertialsystemen und rotierenden Systemen benutzen

$$\vec{v}_\alpha = \left( \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \right)_{\text{Lab}} = \underbrace{\left( \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \right)_{\text{RK}}}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha.$$

Dabei bezeichnet  $\vec{\omega}$  die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers beziehungsweise des mitrotierenden körperfesten Koordinatensystems. Wegen der Zwangsbedingungen des starren Körpers bewegen sich die Atome nicht relativ zueinander. Deshalb ist natürlich auch die Geschwindigkeit jedes Atoms im mitrotierenden Koordinatensystem identisch Null. Damit erhalten wir also z.B. für den Drehimpuls des Atoms  $\alpha$  mit der Masse  $m_\alpha$  bezogen auf den Koordinatenursprung

$$\begin{aligned} \vec{l}_\alpha &= m_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha) \\ &= m_\alpha \{ \vec{r}_\alpha \times \{ \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \} \} \\ &= m_\alpha \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Im Folgenden soll der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  des starren Körpers betrachtet werden, das ist die Summe der Drehimpulse seiner atomaren Bestandteile:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_\alpha \vec{l}_\alpha \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_y z_\alpha - \omega_z y_\alpha \\ \omega_z x_\alpha - \omega_x z_\alpha \\ \omega_x y_\alpha - \omega_y x_\alpha \end{pmatrix} \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha(\omega_x y_\alpha - \omega_y x_\alpha) - z_\alpha(\omega_z z_\alpha - \omega_x z_\alpha) \\ z_\alpha(\omega_y z_\alpha - \omega_z y_\alpha) - x_\alpha(\omega_x y_\alpha - \omega_y x_\alpha) \\ x_\alpha(\omega_z x_\alpha - \omega_x z_\alpha) - y_\alpha(\omega_y z_\alpha - \omega_z y_\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha & -y_\alpha z_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  kann also berechnet werden als Produkt des Vektors der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  mit einer Matrix  $I$ , die wir als **Trägheitstensor** bezeichnen.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Die Matrix des Trägheitstensors ist dabei definiert durch

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \begin{pmatrix} y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -x_{\alpha}y_{\alpha} & -x_{\alpha}z_{\alpha} \\ -x_{\alpha}y_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -y_{\alpha}z_{\alpha} \\ -x_{\alpha}z_{\alpha} & -y_{\alpha}z_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Matrixelemente des Trägheitstensors sind identisch, wenn der Zeilen- und Spaltenindex vertauscht sind

$$I_{ij} = I_{ji},$$

man nennt deshalb den Trägheitstensor einen **symmetrischen** Tensor oder Matrix.

Der Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  in (5.2) kann man ganz analog zur Beziehung zwischen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und Impuls  $\vec{p}$  eines Teilchens sehen:  $\vec{p} = M\vec{v}$ . Der Trägheitstensor  $I$  ist dabei wie die Masse  $M$  ein Charakteristikum des bewegten Körpers. Es gibt jedoch wichtige Unterschiede: Die Masse  $M$  ist eine Zahl, eine skalare Größe. Deshalb sind die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und der Impuls  $\vec{p}$  auch zueinander parallel. Da  $I$  aber eine Matrix ist, gilt dies im Allgemeinen nicht für Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit. Sei  $\vec{\omega}$  z.B. die Geschwindigkeit einer Drehung um die  $z$ -Achse, so berechnet sich der Drehimpuls nach (5.2)

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{13}\omega \\ I_{23}\omega \\ I_{33}\omega \end{pmatrix},$$

ist also ein Vektor, der nur im Fall  $I_{13} = I_{23} = 0$  parallel zu  $\vec{\omega}$  ist.

### 5.2.1 Hauptträgheitsachsen und Momente

Der Trägheitstensor ist also eine Größe, die genau so wie die Masse eines Teilchens charakteristisch für einen starren Körper ist. Allerdings ist die Masse eines Teilchens unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, in dem ich die Bewegung des Teilchens beschreibe. Der Trägheitstensor hängt aber von der Wahl des Koordinatensystems ab. Die detaillierte Form der Matrix  $I$  hängt sowohl von der Wahl des Koordinatenursprungs als auch von der Orientierung der kartesischen Koordinatenachsen ab, wie man aus der Darstellung in (5.3) direkt entnehmen kann. Dies ist nicht sehr verwunderlich, da ja auch der Drehimpuls von der Wahl des Koordinatenursprungs als Referenzpunkt abhängt. Darüber hinaus ist natürlich auch die Angabe einer Komponente des Drehimpulses, also z.B. die  $x$ -Komponente  $L_x$  von der Orientierung des Koordinatensystems abhängig.

In diesem Teilabschnitt wollen wir den Referenzpunkt zur Berechnung des Trägheitstensors konstant halten. Wir stellen uns nun die Frage: Können wir die Matrix  $I$ , die den

Trägheitstensor beschreibt, durch eine geschickte Wahl der Orientierung des Koordinatensystems, auf eine möglichst einfache Gestalt bringen.

Dazu überlegen wir uns in einem ersten Schritt, wie sich die Matrix  $I$  ändert, wenn wir das Koordinatensystem drehen. Ausgangspunkt dieser Überlegung ist die Beziehung (5.2) zwischen Drehimpuls  $\vec{L}$ , Trägheitstensor  $I$  und Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ . Diese Beziehung soll natürlich in jedem Koordinatensystem gelten, ganz egal wie wir das System der kartesischen Achsen drehen. Wir haben im Abschnitt 4.1 gelernt, wie sich die Darstellung eines Vektors, z.B. des Drehimpulsvektors, ändert, wenn wir das Koordinatensystem drehen:

$$\vec{L}' = R\vec{L}.$$

Dabei bezeichnet  $\vec{L}'$  den Spaltenvektor, durch den der Drehimpuls im gedrehten System dargestellt ist und  $R$  ist die Transformationsmatrix für die durchgeführte Rotation des Koordinatensystems mit der Eigenschaft (siehe (4.1))

$$R^{-1} = R^t.$$

Wenden wir diese Eigenschaften auf (5.2) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= RI\vec{\omega} \\ &= RI\underbrace{R^{-1}R}_{=1}\vec{\omega} \\ &= RIR^{-1}R\vec{\omega} \\ &= I'\vec{\omega}'. \end{aligned}$$

In dieser letzten Zeile bezeichnet  $\vec{\omega}' = R\vec{\omega}$  die Darstellung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit und

$$I' = RIR^{-1},$$

konsequenterweise die Darstellung des Trägheitstensors im gedrehten Koordinatensystem. Während sich also die Komponenten eines Vektors bei einer Drehung oder orthogonalen Transformation des Koordinatensystems ändern nach

$$L'_i = \sum_j R_{ij}L_j,$$

transformiert sich eine Größe wie der Trägheitstensor unter der gleichen Transformation wie

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \sum_{kl} R_{ik}I_{kl}R_{lj}^{-1} \\ &= \sum_{kl} R_{ik}R_{jl}I_{kl}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, dass  $R^{-1} = R^t$ . Allgemein bezeichnet man eine Größe  $T$  mit  $3^n$  Elementen, die durch  $n$  Indizes  $i_1 = 1, 2, 3$  (bzw.  $i_1 = x, y, z$ ) bis  $i_n = 1, 2, 3$  charakterisiert wird als einen Tensor der Stufe  $n$  genau dann, wenn bei einer orthogonalen Transformation, also z.B. einer Drehung des Koordinatensystems gilt, dass sich die Elemente dieses Tensors im transformierten System berechnen genäß

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{j_1 \dots j_n} R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}.$$

Mit dieser Nomenklatur ist also ein Vektor ein Tensor erster Stufe und der Trägheitstensor ein Beispiel für einen Tensor zweiter Stufe. Eine Zahl, die sich bei der Drehung eines Koordinatensystems nicht ändert, wie z.B. die Masse eines Teilchens, bezeichnet man als einen Tensor nullter Stufe oder einen Skalar.

Nachdem wir wissen, wie sich ein Trägheitstensor in einem gedrehten Koordinatensystem berechnet, wollen wir einen starren Körper betrachten, der eine Symmetrieachse besitzt. Dabei versteht man unter einer Symmetrieachse die folgende Eigenschaft des Körpers:

Wir drehen einen Körper um eine Achse mit einem Winkel  $\phi = 2\pi/n$ . Kann man den Körper und seine Orientierung nach dieser Drehung nicht unterscheiden von der Ausgangslage vor der Drehung, so bezeichnet man die Achse um die gedreht wurde, als  **$n$ -zählige Symmetrieachse**.

Dreht man z.B. eine Würfel um eine Achse, die durch den Mittelpunkt einer Seite und dem Zentrum des Würfels geht, um den Winkel von 90 Grad, also  $2\pi/4$ , so ändert sich seine Erscheinung nicht. Diese Drehachse ist also eine 4-zählige Symmetrieachse.

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir einen Zylinder mit der  $z$ -Achse der Zylinderkoordinaten als Drehachse. In diesem Fall bleibt der Körper bei einer Drehung mit beliebigem Winkel unverändert: Man spricht daher von einer unendlich zähligen Symmetrieachse.

Wir betrachten jetzt einen Körper mit einem körperfesten Koordinatensystem in der Gestalt, dass die  $z$ -Achse eine  $n$ -zählige Symmetrieachse ist mit  $n = 2$  oder auch höher. Bei einer Drehung des Koordinatensystems um diese  $z$ -Achse mit einem Winkel  $\alpha$  ergibt sich also der Trägheitstensor im gedrehten System  $I'$  nach (5.4) mit

$$R^z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Siehe (4.1)). Damit berechnen sich die Elemente des Tensors im gedrehten Koordinatensystem wie z.B.

$$\begin{aligned} I'_{13} &= I_{13} \cos \alpha + I_{23} \sin \alpha = I_{13} \\ I'_{23} &= I_{13} \sin \alpha + I_{23} \cos \alpha = I_{23}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dabei gilt die letzte Gleichung in jeder Zeile, wenn  $\alpha = 2\pi/n$  ist, da ja dann der Körper nach entsprechender Drehung des Koordinatensystems die gleiche Darstellung und damit auch den gleichen Trägheitstensor besitzt, wie vor der Drehung. Die Gleichungen in (5.5) können für einen beliebigen Winkel  $\alpha \neq 0$  aber nur erfüllt werden, wenn

$$I_{13} = I_{31} = 0 \quad \text{und} \quad I_{23} = I_{32} = 0.$$

In diesem Fall gilt also für eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  parallel zur  $z$ -Achse

$$\vec{L} = I_{33}\vec{\omega} \quad \text{für} \quad \vec{\omega} = \omega\hat{e}_z.$$

Der Vektor des Drehimpulses zeigt also in Richtung der Winkelgeschwindigkeit. Man bezeichnet diese  $z$ -Achse als Hauptträgheitsachse und  $I_{33}$  als Hauptträgheitsmoment. Wir haben an diesem Beispiel gezeigt, dass Symmetrieachsen eines Körpers Hauptträgheitsachsen sind.

Man kann nun allgemein zeigen, dass man auch für Körper, die keine Symmetrieachsen besitzen, immer eine Drehung des Koordinatensystems finden kann, so dass

$$I' = R I R^t = \begin{pmatrix} I'_{11} & 0 & \\ 0 & I'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente  $I'_{11}$ ,  $I'_{22}$  und  $I'_{33}$  sind die Hauptträgheitsmomente und die zugehörigen Achsen des gedrehten Koordinatensystems sind die Hauptträgheitsachsen. Mathematisch bezeichnet man die Hauptträgheitsmomente als Eigenwerte des Trägheitstensors  $I$ . Die Hauptträgheitsachsen sind die Eigenvektoren. Wir suchen ja die Vektoren  $\hat{e}_i$  für die mit dem Eigenwert  $\lambda_i$  gilt

$$I \hat{e}_i = \lambda_i \hat{e}_i,$$

beziehungsweise

$$(I - \lambda_i \mathbb{1}) \hat{e}_i = \vec{0}.$$

Dabei steht  $\mathbb{1}$  für die  $3 \times 3$  Einheitsmatrix. Damit diese Gleichung eine nicht triviale Lösung hat, darf die Matrix  $I - \lambda_i \mathbb{1}$  nicht invertierbar sein. (Wäre diese Matrix invertierbar, so könnten wir Gl.(5.2.1) von links mit der inversen Matrix multiplizieren und erhielten als Ergebnis  $\hat{e}_i = \vec{0}$  also nur die triviale Lösung.) Diese Forderung wird erfüllt, wenn die Determinante von  $I - \lambda_i \mathbb{1} = 0$  ist. Die Eigenwerte  $\lambda_i$  ergeben sich also als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(I - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - \lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Für eine symmetrische Matrix  $I$ , und beim Trägheitstensor handelt es sich ja um eine symmetrische Matrix mit  $I_{ij} = I_{ji}$ , sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\lambda_i$  alle real. Sind erst einmal diese Eigenwerte bestimmt, so kann man die zugehörigen Eigenvektoren und das entspricht ja hier den Richtungen der entsprechenden Hauptträgheitsachsen durch die Lösung der jeweiligen Gleichung (5.2.1) bestimmen.

## 5.2.2 Drehmomente

Warum ist der Drehimpuls eines starren Körpers für uns interessant? Wir sehen uns dazu an, unter welchen Bedingungen sich der Drehimpuls als Funktion der Zeit ändert und betrachten (im Laborsystem)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{\alpha} \frac{d\vec{l}_{\alpha}}{dt} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} (\vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}) \\ &= \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{v}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha})}_{=0} + \sum_{\alpha} \left( \vec{r}_{\alpha} \times \frac{d}{dt} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}. \end{aligned} \tag{5.6}$$



Beim Übergang zur letzten Zeile haben wir die Newtonsche Bewegungsgleichung ausgenutzt. Das Vektorprodukt aus dem Ortsvektor und der Kraft  $\vec{F}_\alpha$  summiert über alle Teilchen bezeichnet man als **Drehmoment**

$$\vec{D} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha} .$$

Mit (5.6) haben wir also gezeigt, dass die Änderung des Drehimpulses mit der Zeit durch das Drehmoment  $\vec{D}$  gegeben ist

$$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} .$$

Die Kraft, die auf ein Teilchen  $\alpha$  wirkt,  $\vec{F}_{\alpha}$  besteht aus dem Anteil durch externe Ursachen  $\vec{F}_{\alpha}^{ext}$  und den internen Kräften,

$$\vec{F}_{\alpha} = \vec{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\beta} \vec{F}_{\alpha\beta}$$

die die atomaren Bestandteile des Körpers aufeinander ausüben. Diese internen Kräfte, die also z.B. das Teilchen  $\beta$  auf das Teilchen  $\alpha$  ausübt wirken im Normalfall in Richtung der Verbindungslinie zwischen den Atomen

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = f(\alpha\beta) (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) .$$

Ist diese Bedingung (5.2.2) erfüllt, so tragen die internen Kräfte nicht zum Drehmoment bei. Zum Beweis dieser Behauptung berechnen wir

$$\begin{aligned} \vec{D}^{int} &= \sum_{\alpha\beta} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left( \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{r}_{\beta} \vec{F}_{\beta\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left( \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta} - \vec{r}_{\beta} \vec{F}_{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) \times (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) f(\alpha\beta) \\ &= 0 . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Bei dem Übergang zur dritten Zeile haben wir das Newtonsche Axiom “Actio = Reactio” ( $\vec{F}_{\beta\alpha} = -\vec{F}_{\alpha\beta}$ ) angewandt und beim Übergang zur vierten Zeile die Voraussetzung (5.2.2) eingesetzt, womit die Behauptung bewiesen wurde, dass in diesem Fall Drehmomente nur durch externe Kräfte generiert werden. Wir haben also die atomaren Kräfte zwischen den Elementen des starren Körpers nicht zu berücksichtigen.

### 5.2.3 Trägheitsmomente

Wenn wir im folgenden die Drehung des starren Körpers auf eine feste Drehachse reduzieren, also z.B. die  $z$ -Achse, dann ist für die Winkelgeschwindigkeit, den Drehimpuls und

das Drehmoment auch nur die jeweilige  $z$ -Komponente von Interesse. Aus (5.2) sehen wir, dass in diesem Fall auch nur die Komponente

$$I_{33} = \hat{e}_z(I\hat{e}_z)$$

von Interesse ist. Allgemein definieren wir das **Trägheitsmoment** eines starren Körpers um die Drehachse  $\hat{e}_\omega$ , das ist der Einheitsvektor der in Richtung der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  zeigt, durch

$$I_\omega = \hat{e}_\omega(I\hat{e}_\omega).$$

Im Fall  $\hat{e}_\omega = \hat{e}_z$  erhalten wir

$$I_\omega = I_{33} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2),$$

wie man aus (5.3) ablesen kann. Jede Masse  $m_{\alpha}$  wird also gewichtet mit dem Abstand von der Drehachse,  $\Delta_{\alpha}$ , zum Quadrat. Für eine beliebige Drehachse  $\hat{e}_\omega$  ergibt sich also entsprechend

$$I_\omega = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\Delta_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha}^2 - (\vec{r}_{\alpha}\hat{e}_\omega)^2).$$

Es sollen nun für einige Beispiele die Trägheitsmomente ausgerechnet werden. Als erstes Beispiel betrachten wir 4 Massenpunkte der Masse  $m$ , die auf den Eckpunkten eines Quadrates der Kantenlänge  $a$  angeordnet sind, wie es in Abb. 5.2 dargestellt ist. Die Drehachse befinde sich in der Mitte des Quadrates (siehe Teilbild a der Abb. 5.2) und die Richtung der Winkelgeschwindigkeit sei senkrecht zur Ebene, in der die Massenpunkte angeordnet sind. Damit ist der Abstand eines jeden dieser Massenpunkte  $\Delta_{\alpha}$  von der Drehachse gleich  $a/\sqrt{2}$  und es ergibt sich insgesamt ein Trägheitsmoment

$$I_\omega = 4m\Delta_{\alpha}^2 = 2ma^2.$$

Als zweites Beispiel betrachten wir die gleiche Anordnung der Massenpunkte, nun aber mit einer Drehachse, die durch einen der Eckpunkte geht (die Winkelgeschwindigkeit steht wieder senkrecht zur Ebene der Massenpunkte, siehe Teilbild b der Abb. 5.2). Der Massenpunkt, der auf der Drehachse liegt liefert in diesem Fall keinen Beitrag zum Trägheitsmoment, da ja der Abstand zur Drehachse,  $\Delta_{\alpha}$ , identisch Null ist. Zwei der Massenpunkte haben den Abstand  $\Delta_{\alpha} = a$  und einer den Abstand  $\sqrt{2}a$ . Insgesamt ergibt sich also für das Trägheitsmoment in diesem Beispiel der Wert

$$I_\omega = 2ma^2 + m(\sqrt{2}a)^2 = 4ma^2.$$

Wir sehen also, dass der gleiche starre Körper unterschiedliche Werte für das Trägheitsmoment liefert wenn die Drehachse nur verschoben wird.

Der Zusammenhang zwischen den Trägheitsmomenten eines starren Körpers bei zueinander verschobenen Drehachsen wird durch den **Satz von Steiner** beschrieben. Danach gilt:

- Das Trägheitsmoment eines starren Körpers um eine Drehachse  $\hat{e}_\omega$ ,  $I_\omega$  ist gleich der Summe des Trägheitsmomentes  $I_\omega^{SP}$  des Körpers um die Drehachse, die parallel zu  $\hat{e}_\omega$  durch den Massenschwerpunkt des Körpers verläuft plus der Masse  $M$  des Körpers multipliziert mit dem Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse  $b$  zum Quadrat (siehe auch Abb. 5.3):

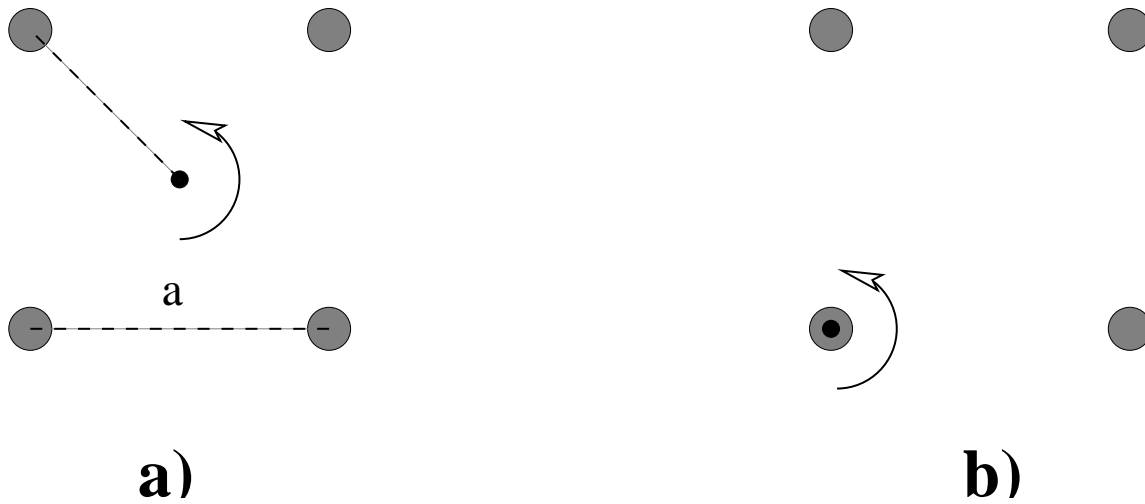


Abbildung 5.2: Beispiele zur Berechnung von Trägheitsmomenten (siehe Diskussion im Text)

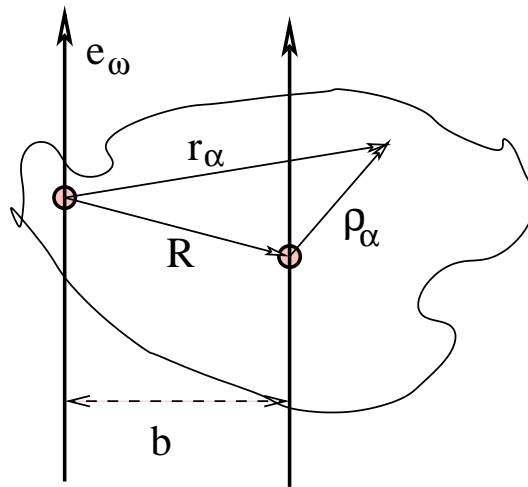


Abbildung 5.3: Illustration des Satzes von Steiner (siehe Diskussion im Text)

$$I_{\omega} = I_{\omega}^{SP} + Mb^2$$

Als Beispiel für die Anwendung dieses Satzes können wir die 4 Massenpunkte der Abb. 5.2 heranziehen. Das Beispiel a) liefert gerade  $I_{\omega}^{SP}$  (siehe (5.2.3)), da ja in diesem Fall die Drehachse durch den Schwerpunkt verläuft. Der Abstand der Schwerpunktes von der Drehachse des Beispiels b der Abb. 5.2 entspricht  $a/\sqrt{2}$ . Damit liefert der Satz von Steiner für die Anordnung im Teilbild b:

$$I_{\omega} = 2ma^2 + 4m \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = 4ma^2,$$

was ja auch mit der Rechnung aus (5.2.3) übereinstimmt.

Zum Beweis des Steinerschen Satzes betrachten wir den Ortsvektor eines Massenpunktes  $\alpha$  des starren Körpers einerseits in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung auf der

Drehachse  $\hat{e}_\omega$  liegt (und bezeichnen diesen mit  $\vec{r}_\alpha$ , andererseits im Schwerpunktsystem, also dem Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt mit dem Ortsvektor  $\vec{R}$ . Bezeichnen wir die Koordinate des Massenpunktes  $\alpha$  im Schwerpunkt mit  $\vec{\rho}_\alpha$ , so gilt (siehe auch Abb. 5.3):

$$\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{\rho}_\alpha$$

Damit können wir das Trägheitsmoment um die Drehachse  $\hat{e}_\omega$  nach (5.2.3) ausrechnen

$$\begin{aligned} I_\omega &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 - (\vec{r}_{\alpha} \hat{e}_{\omega})^2) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ (\vec{R} + \vec{\rho}_{\alpha})^2 - ((\vec{R} + \vec{\rho}_{\alpha}) \hat{e}_{\omega})^2 \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ R^2 + 2\vec{R}\vec{\rho}_{\alpha} + \vec{\rho}_{\alpha}^2 - (\vec{R}\hat{e}_{\omega})^2 - 2(\vec{R}\hat{e}_{\omega})(\vec{\rho}_{\alpha}\hat{e}_{\omega}) - (\vec{\rho}_{\alpha}\hat{e}_{\omega})^2 \right] \\ &= M\vec{R}^2 + 0 + \sum_{\alpha} m_{\alpha}\vec{\rho}_{\alpha}^2 - M(\vec{R}\hat{e}_{\omega})^2 - 0 - \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\vec{\rho}_{\alpha}\hat{e}_{\omega})^2 \\ &= I_{\omega}^{SP} + Mb^2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Beim Übergang von der dritten zur vierten Zeile haben wir ausgenutzt, dass

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha}\vec{\rho}_{\alpha} = 0,$$

da die linke Seite dieser Gleichung gerade die Gesamtmasse multipliziert mit dem Vektor des Schwerpunktes ergibt und zwar in dem Koordinatensystem der  $\vec{\rho}_{\alpha}$ , in dem dieser Schwerpunkt gerade im Koordinatenursprung liegt. Mit (5.8) ist also der Beweis des Satzes von Steiner erbracht.

Als spezielle Anwendungen berechnen wir nun noch das Trägheitsmoment eines Zylinders der Höhe  $c$  und mit Radius  $R$ , der eine homogene Massendichte  $\rho_0$  aufweist. In diesem Fall geht natürlich die Summe über die Massenpunkte in das entsprechende Volumenintegral über. Ist die Drehachse identisch mit der zentralen Längsachse des Zylinders, der  $z$ -Achse des zugehörigen Zylinderkoordinatensystems, so berechnet sich das Trägheitsmoment zu:

$$I_z = \int_0^c dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho_0 r^2 r dr.$$

Dabei besteht der Integrand (neben den Anteilen  $r dr d\varphi dz$  die das Volumenelement in Zylinderkoordinaten darstellen) aus der Massendichte  $\rho_0$  und dem Abstand der Massenelemente von der Drehachse zum Quadrat,  $r^2$ . Dieses Integral liefert

$$I_z = c 2\pi \rho_0 \frac{R^4}{4} = \rho_0 \underbrace{\pi c R^2}_{=\text{Volumen}} \frac{R^2}{2} = M \frac{R^2}{2},$$

also das Trägheitsmoment das vorliegt, wenn die gesamte Masse  $M$  des Zylinders den Abstand  $R/\sqrt{2}$  von der Drehachse hätte.

Bei einem Hohlzylinder mit den gleichen geometrischen Abmessungen und der gleichen Masse  $M$ , hat die gesamte Masse den Abstand  $R$  von der Drehachse (wenn dies ebenfalls die zentrale  $z$ -Achse ist. Dies ergibt also ein Trägheitsmoment für den Hohlzylinder von

$$I_z = M R^2.$$

## 5.3 Drehimpuls und Drehmoment im Experiment

Wir besprechen nun einige Experimente zum Thema Drehimpuls und Drehmoment. Wir betrachten ein System von  $N$  Massenpunkten, die miteinander verbunden sind.

Die Ausgangsgleichung ist:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{D} \quad (5.9)$$

Hierbei ist  $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$  der Drehimpuls des Systems; die Summe läuft über alle Massenpunkte. Die Größe  $\vec{D} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  ist das gesamte Drehmoment, das auf das System wirkt. Hier sind die Kräfte  $\vec{F}_i$  die auf die Massenpunkte wirkenden *äußeren* Kräfte. Wie im Theorieteil gezeigt wurde, verschwinden die Beiträge durch die inneren Kräfte  $\vec{F}_{ik}$ , solange diese Kräfte parallel zur Verbindungslinie zwischen den Massenpunkten  $i$  und  $k$  wirken. Weiter ist zu beachten, dass  $\vec{L}$  und  $\vec{D}$  von der Wahl des Ursprung des Koordinatensystems abhängen; im allgemeinen werden wir den Ursprung auf die Achse legen, um die sich das betrachtete System dreht.

### 5.3.1 Drehimpulserhaltung

Für  $\vec{D} = 0$  ist  $\vec{L} = \text{const.}$ , der Drehimpuls des Systems bleibt erhalten.

Wir können die **Drehimpulserhaltung** sehr schön dadurch demonstrieren, dass wir auf einer um die  $z$ -Achse drehbaren Scheibe ("Drehschemel") ein Rad in Rotation versetzen bzw. dieses Rad in verschiedene Richtungen drehen (Abb. 5.4).

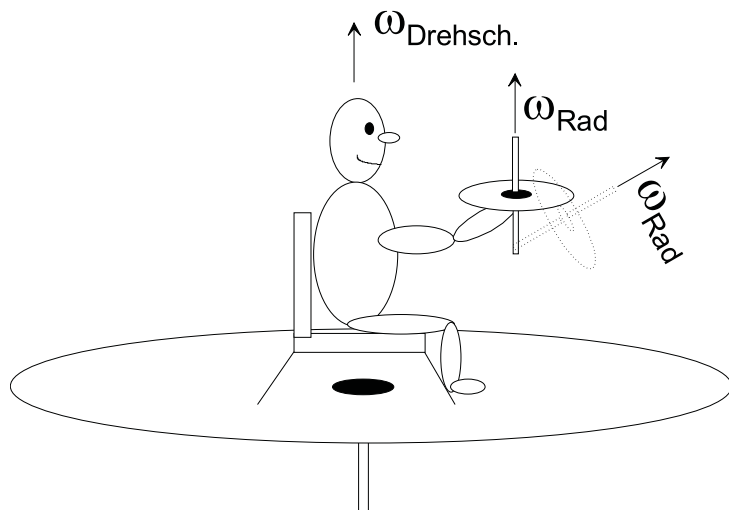
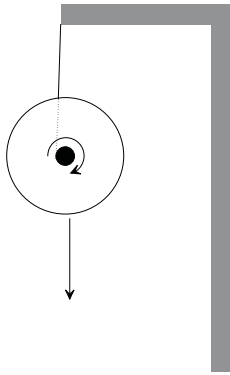


Abbildung 5.4: Rotierendes Rad auf dem Drehschemel.

War der Drehschemel anfangs in Ruhe und starten wir das Rad so, dass die Drehachse in  $z$ -Richtung zeigt, mit  $\vec{L}_{\text{rad}} = L_{\text{rad}} \vec{e}_z$ , dann rotiert der Drehschemel selbst in Gegenrichtung, so dass die Summe  $\vec{L}_{\text{schemel}} + \vec{L}_{\text{rad}}$  erhalten bleibt (d. h. 0 ergibt). Drehen wir das Rad um  $180^\circ$ , so dass  $\vec{L}_{\text{rad}} = -L_{\text{rad}} \vec{e}_z$  gilt, so dreht sich auch der Drehschemel gerade in die Gegenrichtung. Die Drehung des Rades erfordert einigen Kraftaufwand, da sich dabei  $\vec{L}_{\text{rad}}$  zeitlich ändert, was ein endliches Drehmoment auf das Rad erfordert. Dieses Drehmoment

Abbildung 5.5: *Maxwell-Rad* ("JoJo").

wird von der Lagerung des Drehschemels aufgenommen. Steht  $\vec{L}_{rad}$  in (x,y)-Richtung, so ist auch der Drehschemel in Ruhe, da  $\vec{L}_{rad}$  keine Komponente in z-Richtung mehr hat.

Wenn wir das Rad außerhalb des Drehschemels in Rotation versetzen und dann auf den anfänglich ruhenden Drehschemel bringen, so bleibt dieser in Ruhe, solange wir die Achse des Rads nicht ändern. Jede Änderung der Rotationsachse führt jetzt aber zu einer Rotation des Drehschemels, wobei gilt:  $\vec{L}_{rad} + \vec{L}_{schemel} = \vec{L}_{rad,0}$ . Hierbei ist  $\vec{L}_{rad,0}$  der anfängliche Drehimpuls des Rades.

Eine weitere Demonstration von  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$  ist ein in z-Richtung abrollendes **Maxwell-Rad** ("JoJo") (s. Abb. 5.5). Auf dessen Drehachse ist ein Faden aufgewickelt, dessen freies Ende an einem Stativ befestigt ist. Das Rad ist zunächst in einer Höhe  $h$  in Ruhe. Auf das Rad wirkt ein Drehmoment  $\vec{D}$ , das das Rad nach unten abrollen lässt; hierbei wächst gemäß  $\dot{\vec{L}} = \vec{D}$  der Drehimpuls des Rades. Ist der Faden des Rades am unteren Umkehrpunkt vollständig abgewickelt, ist  $\vec{L}$  maximal und  $\vec{D} = 0$ . Jetzt muss sich das Rad aber weiterdrehen, so dass das Rad wieder nach oben ((in Richtung +z) läuft. Hierbei nimmt  $\vec{L}$  wieder ab. Ohne Reibung würde das Maxwell-Rad wiederum die Höhe  $h$  erreichen (hier ist  $\vec{L} = 0$ ) und dann wieder nach unten abrollen.

### 5.3.2 Hebelgesetze und Gleichgewicht

Als nächstes betrachten wir **statische** Anordnungen, auf die Drehmomente  $\vec{D}$  wirken. Wir diskutieren zunächst den "**einarmigen Hebel**" der Abb. 5.6. In der Position (a) ist der Betrag des Drehmoment auf den Verankerungspunkt in der Wand gleich  $m \cdot g \cdot l$ . Das Drehmoment zeigt aus der Zeichenebene heraus. Analog ist der Betrag des Drehmoments in der Position (b) gleich  $m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi$ ; speziell in der Position (c) verschwindet  $\vec{D}$ . Wenn der Hebel um den Verankerungspunkt in der Wand drehbar ist, so wird er schnell in die Position (c) übergehen und dort zur Ruhe kommen.

Wir betrachten jetzt den zweiarmigen Hebel der Abb. 5.7.

Der Hebel sei drehbar gelagert. Auf den Hebel wirken die beiden Drehmomente

$$\vec{D}_1 = -m_1 g \vec{l}_1 \times \vec{e}_z = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 \vec{e}_y \quad (5.10)$$

und

$$\vec{D}_2 = -m_2 g \vec{l}_2 \times \vec{e}_z = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2 \vec{e}_y. \quad (5.11)$$

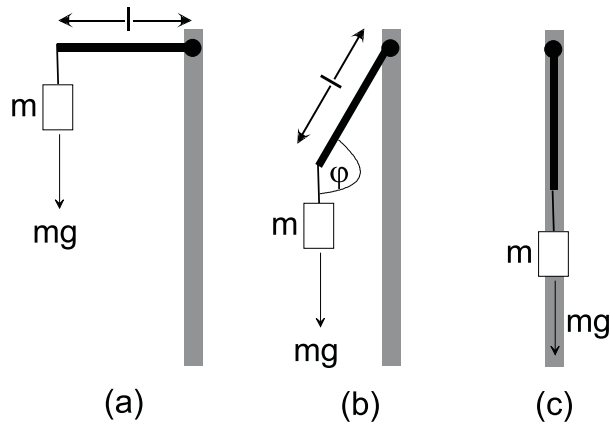


Abbildung 5.6: Einarmiger Hebel.

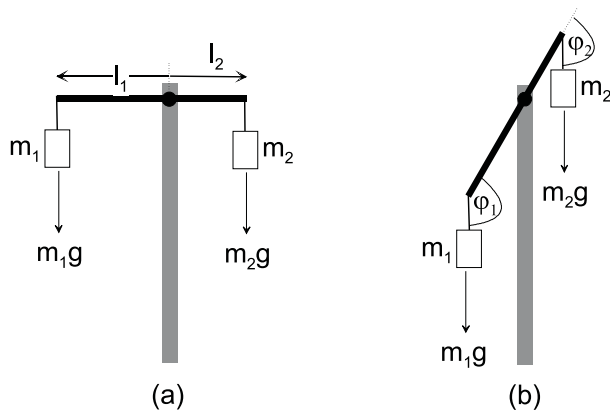


Abbildung 5.7: Zweiarmiger Hebel.

Das Gesamtdrehmoment verschwindet für

$$-m_1gl_1 \sin \varphi_1 = -m_2gl_2 \sin \varphi_2, \quad (5.12)$$

d. h. für

$$-m_1l_1 \sin \varphi_1 = -m_2l_2 \sin \varphi_2, \quad (5.13)$$

was sich mit

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 \quad \text{zu} \quad m_1l_1 = m_2l_2 \quad (5.14)$$

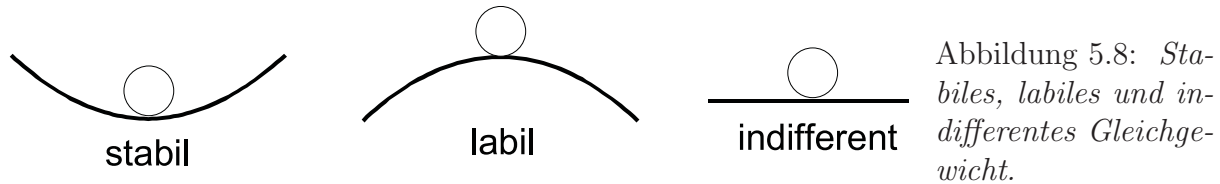
reduziert. Dies ist die **„Hebelbedingung“**.

Für  $m_1l_1 = m_2l_2$  verschwindet das Gesamtdrehmoment auf den Hebel. Unterschlagen wir für den Moment, dass wie in Abb. 5.7 gezeichnet die Massen  $m_1$  und  $m_2$  unterhalb der Drehachse liegen, so ist die Hebelbedingung für alle Winkel  $\varphi_1$  erfüllt. Zum anderen ist dann der Hebel genau im Schwerpunkt gelagert<sup>1</sup>.

Wenn - bei obiger Näherung - die Hebelbedingung für einen kontinuierlichen Satz von Winkeln  $\varphi_1$  erfüllt werden kann, so liegt ein **„indifferentes Gleichgewicht“** vor.

<sup>1</sup>Wenn wir berücksichtigen, dass sich die Massen  $m_1$  und  $m_2$  unterhalb des Hebelarms befinden, dann finden wir, dass im Gleichgewicht der Schwerpunkt genau unterhalb der Drehachse liegt. Wir werden darauf etwas später eingehen.

Allgemein sprechen wir von einem ”**stabilen Gleichgewicht**”, wenn ein Körper nach Auslenkung aus der Ruhelage wieder in diese zurückkehrt. Beim ”**labilen Gleichgewicht**” entfernt sich der Körper nach der Auslenkung immer weiter vom Gleichgewichtswert, während beim ”**indifferenten Gleichgewicht**” die verschobene Position ebenfalls stabil ist. Das Prinzip ist in Abb. 5.8 nochmals erläutert. Hier befindet sich eine Kugel in einem Tal, auf einem Berg bzw. in einer Ebene.



Kehren wir wieder zu Hebeln und Drehmomenten zurück und betrachten die Anordnung der Abb. 5.9.

In der Konfiguration der Abb. 5.9(b) gelte  $m_1 l_1 = 2m_2 l_2$ . Hängen wir jetzt eine der beiden Massen  $m_2$  an den unteren rechten Hebelarm (Länge:  $l_3$ ) wie in Abb. 5.9(a), so haben wir als Hebelbedingung:  $m_1 l_1 = m_2 l_2 + m_2 l_3 \cos \alpha$  (man beachte, dass  $\alpha = 90^\circ - \varphi_3$  ist, wobei  $\varphi_3$  wie in Abb. 5.7 der Winkel zwischen dem Hebelarm und der z-Achse ist). Nun ist  $l_3 \cos \alpha = l_2$ , so dass beide Konfigurationen im Gleichgewicht sind.

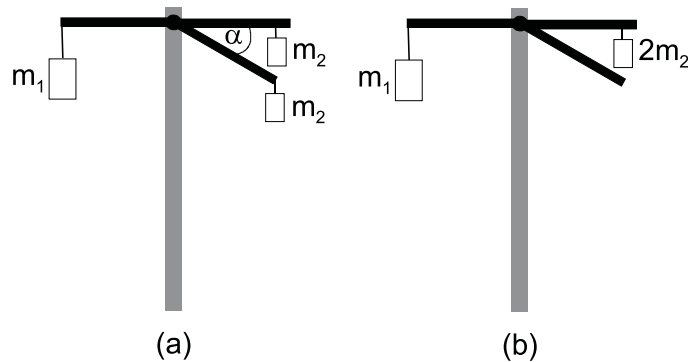


Abbildung 5.9: Dreiarmer Hebel.

Man beachte außerdem, dass bei der Anordnung (a) der Schwerpunkt deutlich unterhalb der Drehachse liegt, wobei sein z-Abstand von der Drehachse  $l_3 \sin \alpha / (m_1 + 2m_2)$  beträgt<sup>2</sup>. Stellen wir jetzt die Anordnung (a) analog zur Abb. 5.7(b) schräg, so stellen wir fest, dass die Anordnung wiederum in die Gleichgewichtspostion  $\varphi_1 = 90^\circ$  zurückkehrt. Der Grund hierfür ist leicht zu verstehen: Der Schwerpunkt liegt für  $\varphi_1 \neq 90^\circ$  nicht mehr unterhalb der Drehachse. Jetzt führen die Kräfte, die an den drei Massen angreifen, zu einem Drehmoment auf den Schwerpunkt, die diesen wieder zur Drehachse hin bewegen. Das gleiche gilt auch, wenn man die Länge aller Hebelarme  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$  (bzw. die Produkte  $m_i l_i$ ) ändert. Die Anordnung ist im **stabilen Gleichgewicht**, sobald sich der **Schwerpunkt unterhalb der Drehachse** befindet.

Wenn sich umgekehrt der **Schwerpunkt oberhalb des Aufhängepunktes** befindet, ist die Anordnung im **labilen Gleichgewicht**. Jede Störung führt zu einem Anwachsen des Drehmoments, die Anordnung kippt, sofern die Form des Körpers dies zulässt. Wir demonstrieren den Effekt am ”**schiefen Haus**”, das in Abb. 5.10 skizziert ist.

Das stabile Gleichgewicht verlangt, dass der Schwerpunkt einer frei drehbaren Anordnung von Massenpunkten unterhalb der Drehachse liegt. Dies erlaubt, den **Schwerpunkt** auch von kompliziert geformten starren Körpern zu **bestimmen**: Wir hängen den Körper an einem beliebigen Punkt auf, der nicht der Schwerpunkt sein soll. Der Körper wird sich

<sup>2</sup>Die x-Koordinate des Schwerpunkts ist  $-l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 \cos \alpha m_3 = -l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_2 m_2 = 0$  (Hebelbedingung).



dann so ausrichten, dass der Schwerpunkt unterhalb des Aufhängepunkts liegt. Wiederholen wir dies für drei nicht in einer Ebene liegende Aufhängepunkte und "zeichnen" jeweils eine Gerade in z-Richtung durch den Aufhängepunkt, so ist der Schwerpunkt gerade der Kreuzungspunkt der drei Geraden.

Was passiert nun der **Körper genau im Schwerpunkt gelagert** wird?

Ganz allgemein gilt:

$$\vec{D} = \sum_i \vec{D}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (5.15)$$

Wir setzen für  $\vec{F}_i$  explizit die Schwerkraft  $\vec{F}_i = -m_i g \vec{e}_z$  ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= -g \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{e}_z \\ &= -g \sum_i \{m_i y \vec{e}_x - m_i x \vec{e}_y\} \\ &= -gM \sum_i \{R_y \vec{e}_x - R_x \vec{e}_y\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

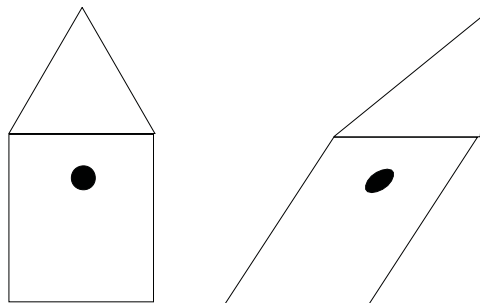


Abbildung 5.10: "Schiefes Haus". Der Schwerpunkt ist durch einen Kreis markiert. Die linke Anordnung ist stabil. Das Haus kippt, sobald der Schwerpunkt außerhalb des rechten unteren Hausecks (=Drehachse) liegt (rechte Anordnung).

Hierbei sind  $R_x$  und  $R_y$  die x- bzw. y-Koordinate des Schwerpunktsvektors und  $M$  die Gesamtmasse. Nun hatten wir aber den Körper im Schwerpunkt gelagert, d. h. es ist  $R_x = R_y = 0$  und damit ist auch  $\vec{D} = 0$ . Bei Lagerung im Schwerpunkt wirken keine Drehmomente auf den Körper, er ist im indifferenten Gleichgewicht<sup>3</sup>.

Wir nutzen nun die Hebelgesetze, um das **Prinzip der Balkenwaage** zu beschreiben. Diese Waage ist in Abb. 5.11 skizziert. Anstelle der Massen  $m_1$  und  $m_2$  des zweiarmigen Hebels aus Abb. 5.7 haben wir jetzt Waagschalen gleicher Masse  $m$  angebracht. Auf der linken Schale liege die Masse  $\Delta m$ . Die beiden Hebelarme zu den Schalen seien gleich lang (Länge  $l$ ). Wir haben zusätzlich einen Zeiger der Länge  $l_z$ . Er habe die Masse  $m_z$ .

Auf die Drehachse wirken also drei Drehmomente.

$$\vec{D}_1 = -(m + \Delta m) \cdot gl \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y \quad (5.17)$$

$$\vec{D}_2 = m \cdot gl \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y \quad (5.18)$$

$$\vec{D}_3 = m_z \cdot gl_z \cdot \sin \alpha \cdot \vec{e}_y. \quad (5.19)$$

Das Gesamtdrehmoment verschwindet für:

$$(m + \Delta m) \cdot gl \cdot \sin \varphi - m \cdot gl \cdot \sin \varphi - m_z \cdot gl_z \cdot \sin \alpha = 0. \quad (5.20)$$

Nun ist  $\alpha + \varphi = 90^\circ$  und wir erhalten:

$$\Delta m \cdot l \cdot \cos \alpha = m_z l_z \sin \alpha \quad \text{oder} \quad \tan \alpha = \frac{\Delta m \cdot l}{m_z l_z} \quad (5.21)$$

<sup>3</sup>Dies gilt, solange wir den Körper um die Aufhängung kippen. Bezüglich einer Verschiebung der Aufhängung aus dem Schwerpunkt ist die Lagerung im allgemeinen labil.

Für kleine Winkel ist  $\tan \alpha \approx \alpha$  und wir erhalten:

$$\frac{\alpha}{\Delta m} = \frac{1}{m_z l_z}. \quad (5.22)$$

Diese Größe bezeichnet man auch als die **Empfindlichkeit** der Waage (Ausschlag pro Gewicht  $\Delta m$ ). Sie kann offensichtlich z. B. durch Verkürzung der Zeigerlänge  $l_z$  bequem gesteuert werden.

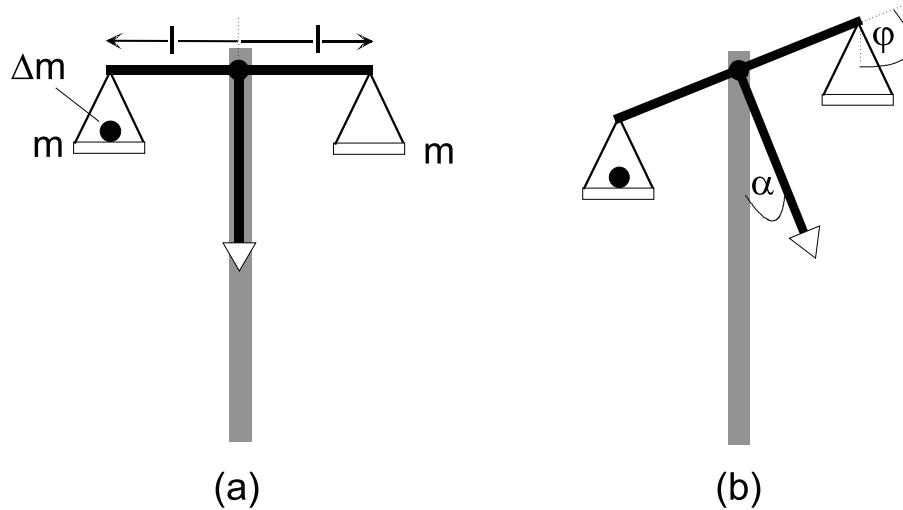


Abbildung 5.11: *Prinzip der Balkenwaage*

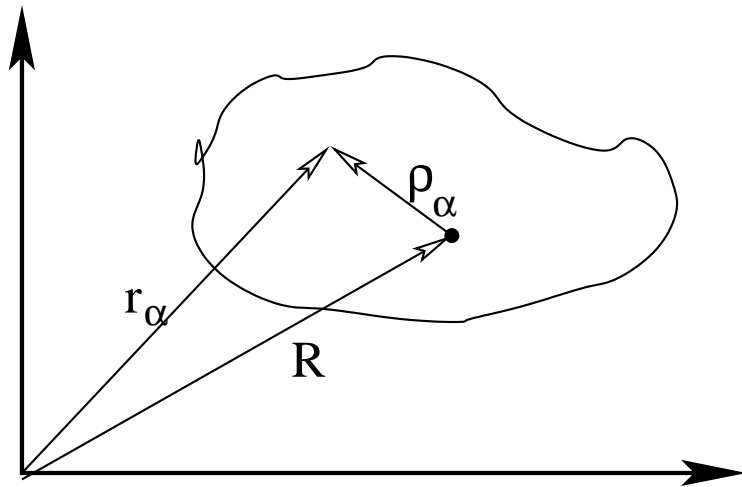


Abbildung 5.12: Koordinaten zur Berechnung der kinetischen Energie (siehe Diskussion im Text)

## 5.4 Kinetische Energie eines Starren Körpers

In diesem Abschnitt diskutieren wir, wie sich die Kinetische Energie eines Starren Körpers berechnet. Dazu gehen wir wieder davon aus, dass wir den Starren Körper wieder in Massenpunkte mit Massen  $m_\alpha$  zerlegen können und der Aufenthaltsort dieser Massenpunkte bezüglich eines Laborsystems durch Vektoren  $\vec{r}_\alpha$  gegeben ist (siehe Abb. 5.12). Wir nehmen ausserdem einen festen Punkt des starren Körpers heraus, der auf der Achse der augenblicklichen Drehbewegung liegt und gleichzeitig Koordinatenursprung eines körperfesten Koordinatensystems sein soll. Für den Ortsvektor eines Massenpunktes gilt dann

$$\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{\rho}_\alpha.$$

Dabei ist  $\vec{R}$  der Vektor für den Referenzpunkt im starren Körper und  $\vec{\rho}_\alpha$  der Ortsvektor des Massenpunktes im körperfesten Koordinatensystem. Zur Berechnung der kinetischen Energie benötigen wir die Geschwindigkeit der Massenpunkte im Laborsystem

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \left( \frac{d\vec{\rho}_\alpha}{dt} \right)_{\text{Lab}}.$$

In einem nächsten Schritt wird nun ausgenutzt, dass

$$\left( \frac{d\vec{\rho}_\alpha}{dt} \right)_{\text{Lab}} = \underbrace{\left( \frac{d\vec{\rho}_\alpha}{dt} \right)_{\text{RK}}}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\alpha$$

Dabei ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit mit der sich der Körper um die aktuelle Drehachse dreht und die Geschwindigkeit der Massenpunkte im Referenzsystem des starren Körpers ist natürlich identisch Null. Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\alpha.$$

Die kinetische Energie des gesamten starren Körpers berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned}
 T_{\text{Kin}} &= \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \left( \frac{d\vec{r}_{\alpha}}{dt} \right)^2 \\
 &= \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \left( \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{\alpha} \right)^2 \\
 &= \frac{M}{2} \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)^2 + \frac{d\vec{R}}{dt} \left( \vec{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{\rho}_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{\alpha})^2. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Diese kinetische Energie setzt sich also aus 3 Summanden bzw. Komponenten zusammen:

**1. Translation** Der erste Term in (5.23) entspricht der kinetischen Energie der Gesamtmasse des Starren Körpers,  $M$  vereinigt zu einer Punktmasse am Ort des Referenzpunktes, charakterisiert durch den Ortsvektor  $\vec{R}$ . Man bezeichnet diesen Beitrag als die kinetische Energie der Translationsbewegung.

**2. Rotation** Für die Diskussion des dritten Terms in (5.23) betrachten wir den Betrag des Vektors  $|\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{\alpha}|$ . Der Betrag dieses Vektors entspricht dem Abstand des Massenpunktes  $\alpha$  von der Drehachse multipliziert mit dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit. Setzt man dieses Ergebnis in den dritten Term von (5.23) ein und beachtet die Definition des Trägheitsmomentes für eine Drehung um die Drehachse  $I_{\omega}$ , so ergibt dieser dritte Term:

$$\frac{1}{2} I_{\omega} \omega^2$$

Wir bezeichnen diesen Beitrag als kinetische Energie der Rotationsbewegung

**3. Mischterm** Neben diesen beiden Termen tritt im allgemeinen Fall noch der Mischterm, der zweite Term in (5.23) auf. Dieser Mischterm verschwindet natürlich, wenn der Referenzpunkt ruht

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = 0,$$

also eine reine Rotation um die Drehachse stattfindet ohne jede Translation. Der Mischterm verschwindet aber auch, wenn der Schwerpunkt des starren Körpers auf der Drehachse liegt. In diesem Fall definieren wir den Schwerpunkt als den Koordinatenursprung des körperfesten Koordinatensystems und es gilt daher, dass

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{\rho}_{\alpha} = 0.$$

Als Beispiel wollen wir nun die Bewegung eines Zylinders betrachten, der, wie in Abb. 5.13 eine schiefe Ebene herunterrollt. Am Anfang befindet er sich in Ruhe auf der Höhe  $h$  und besitzt also die potenzielle Energie  $Mgh$  wobei  $M$  die Masse des Zylinders und  $g$  die Beschleunigung durch die Erdanziehung darstellt. Am Fußpunkt der schiefen Ebene ist diese potenzielle Energie vollständig in kinetische Energie umgesetzt. Da die Rollbewegung um die Drehachse erfolgt, die (bei homogener Dichte des Zylinders) durch den Schwerpunkt des Zylinders verläuft, entfällt der oben diskutierte Mischterm der Bewegung und die

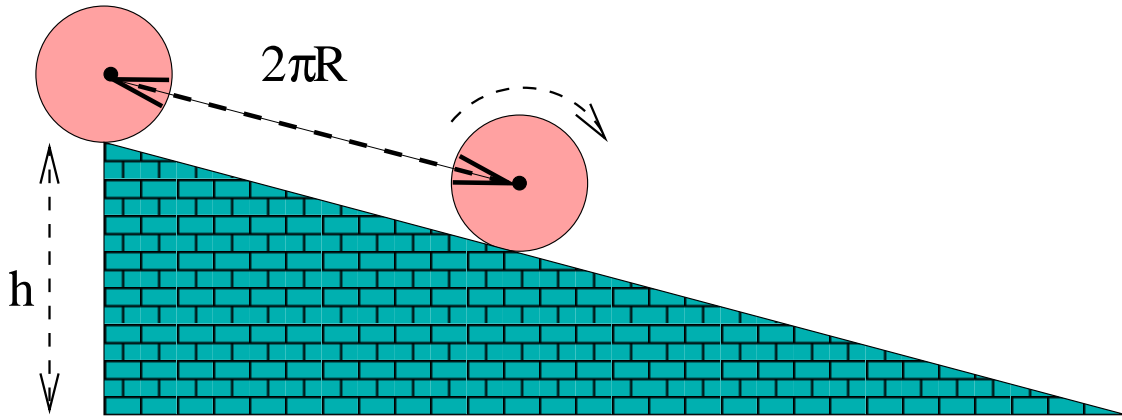


Abbildung 5.13: Rollbewegung eines Zylinders auf einer schiefen Ebene (siehe Diskussion im Text)

kinetische Energie setzt sich nur aus der Energie der Translation und der der Rotation zusammen:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2.$$

Dabei bezeichnet  $v$  die Geschwindigkeit der Translationsbewegung. Zwischen dieser Geschwindigkeit der Translationsbewegung und der Drehgeschwindigkeit  $\omega$  gibt es nun noch eine Verbindung, die Zwangsbedingung für die Rollbewegung. In der Zeit  $T$ , in der sich der Zylinder einmal um die eigene Achse dreht, rotiert er um den Winkel  $2\pi$ . Gleichzeitig legt er den Weg  $2\pi R$  zurück, wobei  $R$  der Radius des Zylinders ist. Es gilt also

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad v = \frac{2\pi R}{T}.$$

Hieraus können wir herleiten

$$\omega = \frac{v}{R},$$

was, eingesetzt in (5.4) liefert

$$Mgh = \frac{1}{2} \left( M + \frac{I_z}{R^2} \right) v^2.$$

Nachdem der Körper die Höhe  $h$  abgerollt ist, erhalten wir für seine Geschwindigkeit:

$$v_{\text{end}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I/(MR^2)}} \quad (5.24)$$

Nun gilt für einen Vollzylinder:  $I = MR^2/2$  und für einen Hohlzylinder  $I = MR^2$ .

Wir erhalten für diese beiden Körper:

$$v_{\text{end}} = \sqrt{\frac{2gh}{1.5}} \quad (\text{Vollzylinder}) \quad (5.25) \quad v_{\text{end}} = \sqrt{\frac{2gh}{2}} \quad (\text{Hohlzylinder}) \quad (5.26)$$

was einen Faktor  $\sqrt{1.5} \approx 1.225$  bzw.  $\sqrt{2} \approx 1.41$  geringer ist als die Endgeschwindigkeit eines nichtrotierenden Körpers.

In unserem Versuch ist  $h = 21$  cm, was für einen **nichtrotierenden Körper** zu  $v_{\text{end}} \approx 2.03$  m/s führt, für den **Vollzylinder** zu 1.66 m/s und für den **Hohlzylinder** zu 1.43 m/s.

Man beachte ferner, dass in die obigen Beziehungen weder der Radius noch die Masse des Zylinders einging, sondern nur sein "innerer" Aufbau (d. h. hohl oder voll).

Grundsätzlich kann man nun aus dem Abrollverhalten eines Körpers mit unbekanntem inneren Aufbau sein Trägheitsmoment bestimmen und daraus gerade auf seinen inneren Aufbau Rückschlüsse ziehen.

Wir hatten dies an zwei verschlossenen Zylindern gleicher Masse und gleicher äußerer Form demonstriert. Der langsamere der beiden Zylinder war ein Hohlzylinder, bei dem schnelleren war der größte Teil seiner Masse in der Nähe der Drehachse konzentriert, so dass er nahezu die Endgeschwindigkeit eines nichtrotierenden Körpers erreicht.

Wir hatten noch zwei weitere Zylinder mit abrollen lassen, die eine sehr seltsame Bewegungsform zeigten: Ein Zylinder hatte eine "**Unwucht**", so dass dessen Schwerpunkt nicht auf der Drehachse lag. Er bewegt sich extrem unregelmäßig die schiefe Ebene herab. Im zweiten Zylinder war entlang der Rotationsachse ein Gummiband gespannt, an dem eine Masse  $m$  angehängt war. Wenn der Zylinder bei entspanntem Gummiband anrollt, verdrillt sich das Band und erzeugt ein Drehmoment auf die Masse. Diese bleibt zunächst in Ruhe, bis ein kritisches Drehmoment erreicht ist und rollt dann im Innern des Zylinders ab. Als Konsequenz beginnt die Dose, zurückzurollen (s. Abb. 5.14)

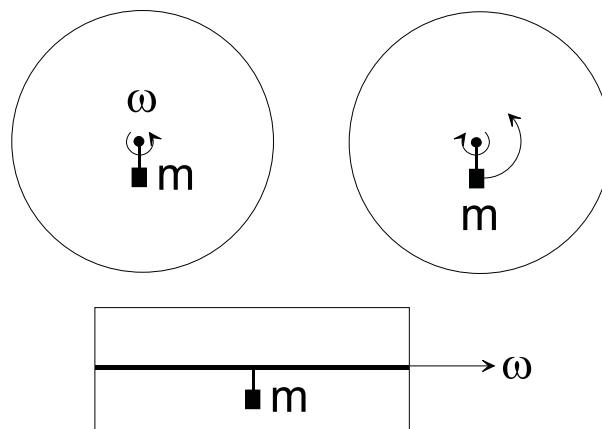


Abbildung 5.14: "Rückrollender Zylinder" mit eingebautem Gummiband. Unten: Seitenansicht. Oben links: nur die Dose rollt und spannt das Gummiband. Oben Rechts: Masse rotiert und Dose rollt zurück.

Eine weitere "Spielerei", die wir kurz angesprochen haben, ist das "Wackelholz" (Abb. 5.15). Es sieht äußerlich sehr symmetrisch aus, hat aber in seinem Inneren eine Unwucht, die durch die beiden Kreise (zusätzliche Massen) in Abb. 5.15 angedeutet sind. Bringt man das Holz entlang seiner Längsachse zum Schaukeln, dann kippt das Holz in der Nähe seiner Umkehrpunkte in Richtung der zusätzlichen Masse. Als Konsequenz rotiert das Holz im Uhrzeigersinn. Dreht man das Holz im Uhrzeigersinn, so bleibt diese Drehung stabil. Bei

Drehung gegen den Uhrzeigersinn führen immer vorhandene leichte Schaukelbewegungen zur Abbremsung der Drehung und schließlich zur Umkehr des Drehsinns.

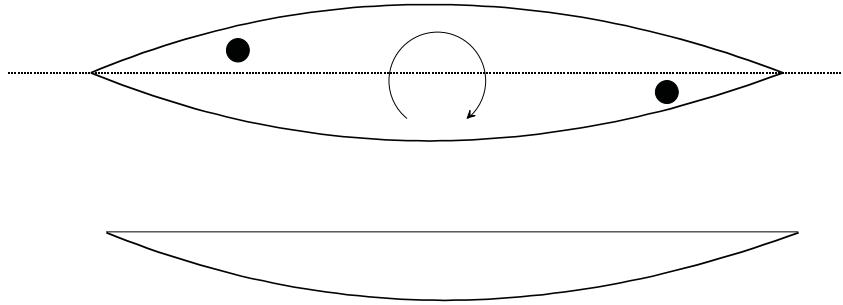


Abbildung 5.15: "Wackelholz". Oben: Blick von oben; unten: Seitenansicht





## 5.5 Rotationen um freie Achsen; Kreisel

Wir betrachten jetzt frei rotierende Körper.

Das erste Objekt ist ein Quader. Seine Hauptträgheitsachsen verlaufen wie in Abb. 5.16 angezeichnet. Die Hauptträgheitsmomente seien  $I_1 < I_2 < I_3$ . Wirft man den Quader, so stellt sich heraus, dass er beim Wurf um die Achsen 1 und 3 stabil rotiert, dagegen nicht um die Achse 2 (s. Abb 5.17).

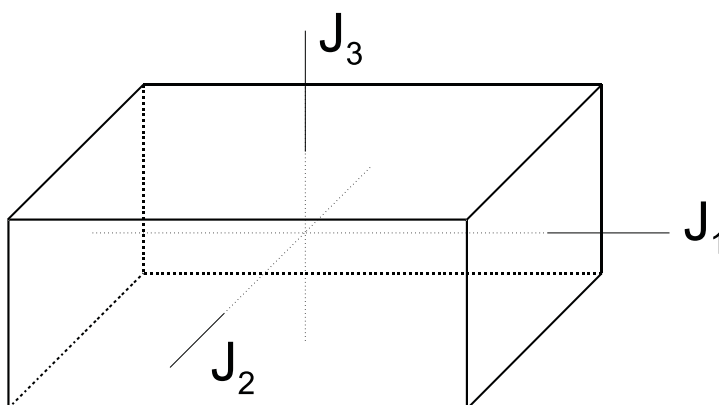


Abbildung 5.16: Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente eines Quaders

Ganz allgemein lässt sich zeigen (ohne Beweis), dass für  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$  **freie Rotationen um die Hauptträgheitsachsen mit dem größten oder dem kleinsten Trägheitsmoment stabil** sind, Rotationen **um das mittlere Hauptträgheitsmoment dagegen labil**.

Sind bei einem rotationssymmetrischen Körper **zwei Hauptträgheitsmomente gleich** (z. B.  $I_2 = I_3$ ), so ist **nur die Rotation um die Symmetrieachse**, d. h. um  $I_1$  **stabil**.

Wir demonstrieren dies durch die Rotation einer Ringkette und eines Holzrings, die mittels eines rotierenden Seils angetrieben werden (vgl. "Lasso"). Sie rotieren stabil um die Symmetrieachse. Rotiert man ein (gekochtes) Ei um eine Querachse, so richtet es sich nach einiger Zeit auf und rotiert um die Längsachse.

Man kann dies auch durch ein Maxwell-"Rad" demonstrieren, dessen "Räder" zu beiden Seiten des aufgewickelten Fadens Quader sind. Sind die Quader so montiert, dass sie um  $I_2$  rotieren müssen, kann das Maxwellrad im allgemeinen nicht stabil abrollen. Dies gelingt aber doch, wenn beide Quader um  $90^\circ$  gegeneinander verdreht sind, so dass sie parallel zur Drehachse betrachtet

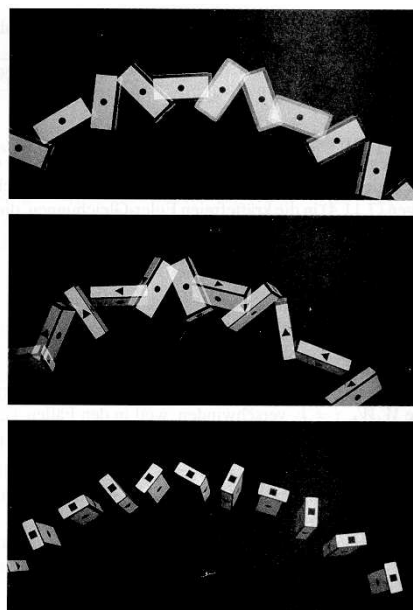


Abbildung 5.17: Wurf eines Quaders (aus: Brand-Dahmen, Mechanik, Abb. 7.9)

Man kann dies auch durch ein Maxwell-"Rad" demonstrieren, dessen "Räder" zu beiden Seiten des aufgewickelten Fadens Quader sind. Sind die Quader so montiert, dass sie um  $I_2$  rotieren müssen, kann das Maxwellrad im allgemeinen nicht stabil abrollen. Dies gelingt aber doch, wenn beide Quader um  $90^\circ$  gegeneinander verdreht sind, so dass sie parallel zur Drehachse betrachtet

ein Kreuz bilden. Diese Anordnung ist symmetrisch genug, dass das Rad stabil abrollen kann.

### Kreisel

Eine besonders oft genutzte Anordnung rotationsymmetrischer drehender Körper ist der Kreisel, der um einen Auflagepunkt rotiert. Lagert man den Kreisel im Schwerpunkt, so spricht man vom ”**kräftefreien symmetrischen Kreisel**”, andernfalls vom ”**schweren Kreisel**”.

Die Symmetrieachse des Kreisels wird **Figurenachse** genannt. Wir wollen sie mit  $\vec{f}$  bezeichnen. Neben dieser Achse sind im Folgenden noch die **Rotationsachse**  $\vec{\omega}$  und die Richtung des **Drehimpulses**  $\vec{L}$  wichtig. Die drei Größen  $\vec{f}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  können, müssen aber nicht in die gleiche Richtung zeigen.

Einen kräftefreien symmetrischer Kreisel kann man beispielsweise durch **kardanische Aufhängung** oder durch **Luftkissen-Lagerung** erhalten (Abb. 5.18).

Lässt man den kräftefreien symmetrischer Kreisel schnell rotieren, so zeigen  $\vec{f}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  in die gleiche Richtung. Die Richtung von  $\vec{L}$  bleibt aber im Raum erhalten, da keine Drehmomente auf den Kreisel wirken, so dass auch die Figurenachse unabhängig von der Rotation des ”Außensystems” immer in die gleiche Richtung weist. Dieses Prinzip wird in Flugzeugen und Schiffen als ”**Künstlicher Horizont**” verwendet.

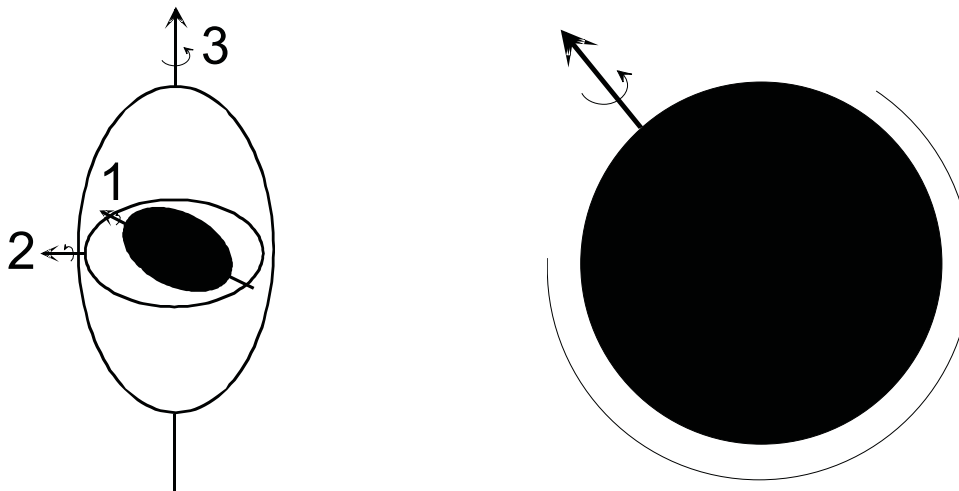


Abbildung 5.18: *Kräftefreier symmetrischer Kreisel: kardanische Aufhängung (links) und Lagerung im Luftkissen (rechts).*

Drückt man nun sanft gegen den Kreisel und bewirkt dadurch eine **langsame Änderung** der Richtung des **Drehimpulses**, so werden  $\vec{f}$  und  $\vec{\omega}$  mitgenommen, bleiben also parallel zu  $\vec{L}$ .

Schlägt man dagegen gegen den Kreisel und bewirkt so eine **schnelle Änderung** des **Drehimpulses**, so sind  $\vec{f}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  nicht mehr parallel zueinander. Jetzt rotieren die Figurenachse und  $\vec{\omega}$  um  $\vec{L}$ . Die entsprechende Drehung heißt ”**Nutation**” oder ”reguläre Präzession” und erfolgt mit der ”**Nutationsfrequenz**”  $\vec{\omega}_N$ , deren Größe wir an Hand der Abb. 5.19 ableiten können.

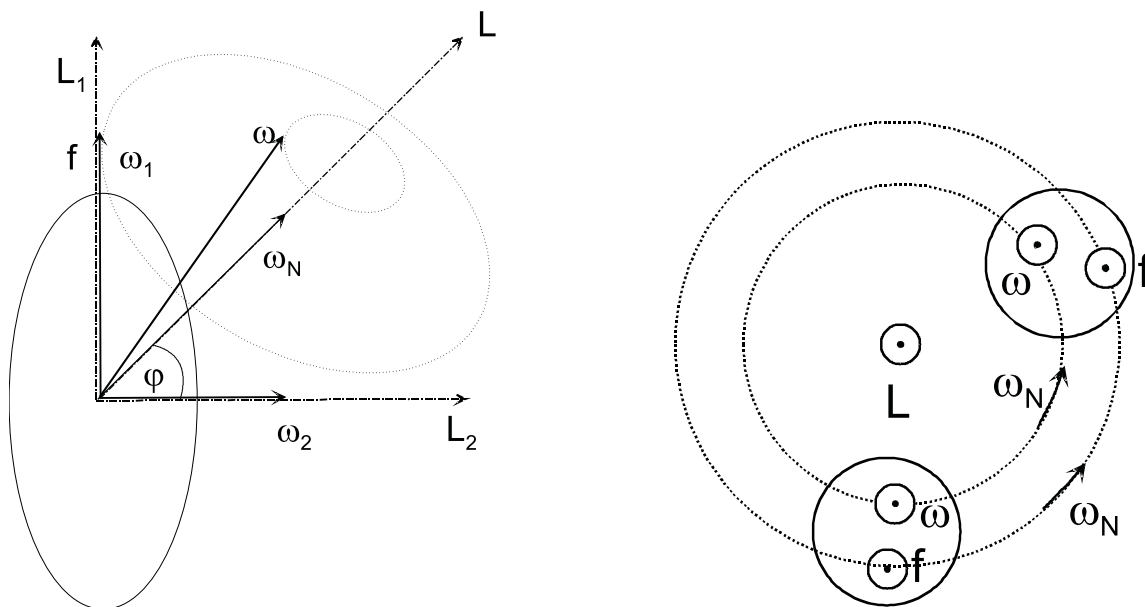


Abbildung 5.19: Nutation eines Kreisels, der sich nicht um die Figurenachse dreht.

Wir zerlegen zunächst  $\vec{\omega}$  in eine Komponente  $\vec{\omega}_1$  parallel zur Figurenachse und in eine Komponente  $\vec{\omega}_2$  senkrecht dazu,  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ . Analog können wir auch  $\vec{L}$  in Komponenten parallel und senkrecht zur Figurenachse zerlegen,  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ . Nun gilt  $\vec{L}_1 = I_1 \vec{\omega}_1$  und  $\vec{L}_2 = I_2 \vec{\omega}_2$ . Da aber  $I_1 \neq I_2$  ist, sind nun  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  nicht mehr parallel. Auf Grund der Drehimpulserhaltung bleibt  $\vec{L}$  fest im Raum orientiert und  $\vec{\omega}$ , sowie  $\vec{f}$  drehen sich um  $\vec{L}$ . Die Nutationsfrequenz  $\vec{\omega}_N$  zeigt in Richtung von  $\vec{L}$ . Aus der Abb. 5.19 entnehmen wir:

$$\vec{\omega}_N \cos \varphi = \vec{\omega}_2 = \frac{\vec{L}_2}{I_2} = \frac{\vec{L} \cos \varphi}{I_2}. \quad (5.27)$$

Hieraus folgt:

$$\vec{\omega}_N = \frac{\vec{L}}{I_2}. \quad (5.28)$$

Man beachte, dass sich auch  $\vec{f}$  relativ zu  $\vec{\omega}$  mit der Nutationsfrequenz dreht. Dieser Effekt lässt sich dadurch demonstrieren, dass eine Scheibe mit 3 unterschiedlichen Farbsegmenten mit  $\vec{f}$  mitrotiert. Das Auge, das über volle Umdrehungen der Scheibe mittelt, erkennt jeweils die Farbe, durch die  $\vec{\omega}$  gerade zeigt.

Als nächstes wollen wir zum **kardanisch aufgehängten Kreisels** der Abb. 5.18 zurückkehren und **Drehachse 2 blockieren**. Der Kreiselscheibe kann jetzt um seine Figurenachse 1 rotieren und um die Achse 3 kippen. Rotieren wir nun die Aufhängung des Kreisels um eine Drehachse  $\vec{\omega}_D$ , die parallel zur Achse 3 sein soll, so wirkt auf den Kreiselscheibe ein Drehmoment parallel zu  $\vec{\omega}_D$  das via  $\dot{\vec{L}} = \vec{D}$  eine Änderung von  $\vec{L}$  in Richtung  $\vec{\omega}_D$  bewirkt. Da  $\vec{\omega}_D$  wesentlich geringer ist als die Drehung  $\vec{\omega}$  des Kreisels um seine Figurenachse, bleiben  $\vec{f}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  dabei parallel. Die Figurenachse des Kreisels und dessen Winkelgeschwindigkeit zeigen nach einiger Zeit parallel zu  $\vec{\omega}_D$ .

Wir können uns die Drehung des Kreisels auch dadurch veranschaulichen, dass wir uns in ein Bezugssystem begeben, das mit  $\vec{\omega}_D$  rotiert. Dann wirken auf den Kreisel Corioliskräfte, die diesen zu  $\vec{\omega}_D$  hin kippen, siehe Abb. 5.20.

Auf diesem Effekt basiert der **Kreiselkompass**. Er stellt sich parallel zur Drehrichtung der Erde ein, zeigt also (bei geeigneter Markierung) nach "Norden".

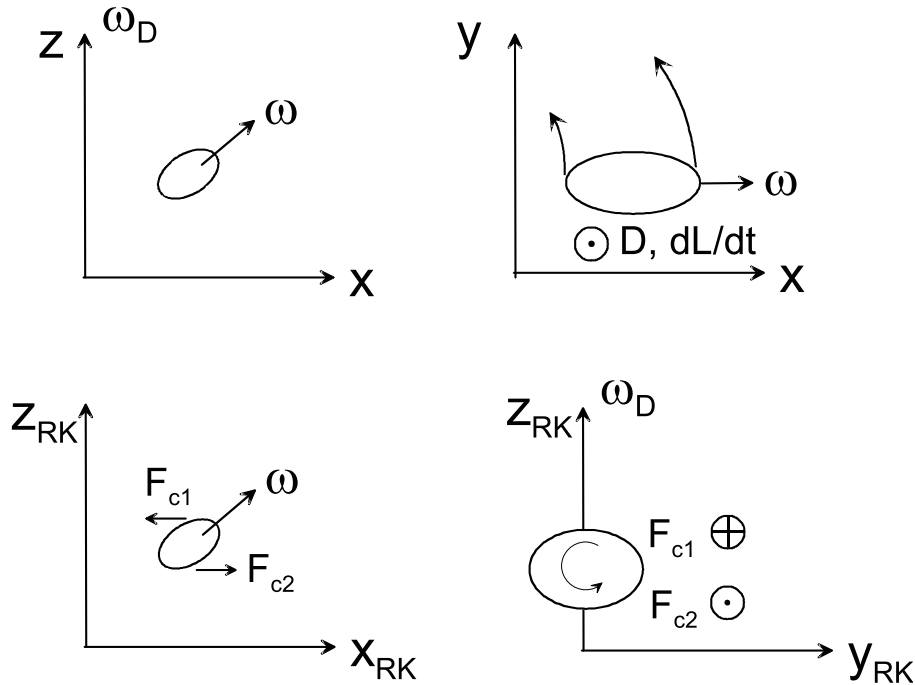


Abbildung 5.20: Kardanischnahängter Kreisel mit blockierter Drehachse 2. Wird der Kreisel mit  $\vec{\omega}_D$  rotiert, so stellt sich  $\vec{\omega}$  parallel zu  $\vec{\omega}_D$ . Die beiden oberen Bilder sind im ruhenden Koordinatensystem, die beiden unteren im mit  $\vec{\omega}_D$  mitrotierenden System.  $F_{c1}$  und  $F_{c2}$  seien die zu Drehachse  $z_{RK}$  hin- bzw. wegzeigenden Anteile der Corioliskraft.

Was passiert, wenn der **Kreisel außerhalb des Schwerpunkts gelagert** ist, so dass die Schwerkraft ein Drehmoment auf diesen ausübt ("schwerer Kreisel", Abb. 5.21)? Es zeigt sich, dass der Kreisel keinesfalls umfällt, sondern  $\vec{f}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$ , die parallel zueinander bleiben, senkrecht ausweichen. Der Kreisel rotiert um die z-Achse ("**Präzession**").

Es gilt hierbei:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{D} = -mg(\vec{R} \times \vec{e}_z). \quad (5.29)$$

$\vec{R}$  ist der Ortsvektor vom Auflagepunkt des Kreisels zum Schwerpunkt,  $m$  sei die Masse des Kreisels. Nun ist  $\vec{L}$  (bei einer Links-Drehung des Kreisels) parallel zu  $\vec{R}$ . Damit ist  $\dot{\vec{L}}$  senkrecht zu  $\vec{L}$  und zur

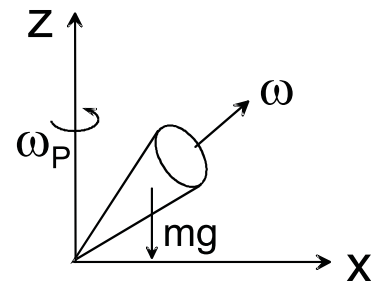


Abbildung 5.21: Präzessionsschwerer Kreisel

z-Richtung. Wir schreiben  $\vec{R}$  als  $\vec{R} = \frac{\vec{L}}{L} \cdot R$  und erhalten:

$$\dot{\vec{L}} = -\frac{mgR}{L}(\vec{L} \times \vec{e}_z) = \frac{mgR}{L} \begin{pmatrix} -L_y \\ L_x \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_P \cdot \begin{pmatrix} -L_y \\ L_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Diese Differentialgleichung wird beispielsweise gelöst<sup>4</sup> von  $L_x = L \cos \omega_p t$ ,  $L_y = L \sin \omega_p t$ , mit der Präzessionsfrequenz  $\omega_p = \frac{mgR}{L}$ , die interessanterweise unabhängig ist vom Winkel  $\varphi$  zwischen  $\vec{\omega}$  und der z-Achse (Etwas allgemeiner können wir auch  $D = mgR \sin \varphi$  rücksubstituieren und erhalten  $\omega_p = \frac{D}{L \sin \varphi}$ , was auch für andere Drehmomente anwendbar ist; falls  $D$  nicht proportional zu  $\sin \varphi$  ist, hängt die Präzessionsfrequenz auch von  $\varphi$  ab).

Diese paradoxe senkrecht-Ausweichen des Kreisels - man kann einen schnell drehenden Kreisel mit seiner Spitze sogar so in eine Seilschlinge legen, dass seine Figurenachse parallel zum Erdboden rotiert - lässt sich wiederum gut in einem Bezugssystem veranschaulichen, das mit  $\omega_p$  mitrotiert. Dann versuchen wiederum Corioliskräfte, den Kreisel zu kippen. Im Gegensatz zum Kreiselskompass, der im Schwerpunkt gelagert war, wirkt aber diesmal das durch die Schwerkraft verursachte Drehmoment dieser Kippung entgegen, so dass der Kreisel nicht um- bzw. herunterfällt.

Überlagert man weiterhin Nutations- und Präzessionsbewegungen, so spricht man von **”Nickschwingungen”** oder einer **”pseudoregulären Präzession”**.

Auch die Drehachse der **Erde**, die um  $66.5^\circ$  gegen die Bahnebene der Planeten und des Mondes geneigt ist, führt eine **Präzessionsbewegung** aus. Durch die Abplattung der Erde üben Sonne und Mond ein Drehmoment auf den **”Äquatorwulst”** aus. Die Drehachse der Erde weicht entsprechend aus und präzediert mit einer Periode von 25850 Jahren (**”Platonisches Jahr”**). Diese Präzessionsbewegung wurde bereits in der Antike durch Hipparch entdeckt. Auch die anderen Planeten tragen zu einer Präzession der Erdachse bei, mit entsprechend längeren Präzessionsperioden.

Es sei weiter angemerkt, dass die Präzession auch im atomaren Bereich eine große Rolle spielt. So haben beispielsweise Elektronen einen Eigendrehimpuls (Spin), der im äußeren Magnetfeld um die Richtung des angelegten Feldes präzediert. Hierbei ist das Drehmoment auf das Elektron proportional zum angelegten Feld Magnetfeld (**”Larmor-Präzession”** mit der **”Larmor-Frequenz”**, die proportional zum Feld ist).

Zum Abschluss betrachten wir noch einige spezielle Kreisel:

- der **”Stehaufkreisel”** wird angedreht wie in Abb. 5.22(a) dargestellt. Nach kurzer Zeit richtet sich der Kreisel auf und rotiert wie in Abb. 5.22(a). Dabei wandert offensichtlich der Schwerpunkt des Kreisels nach oben, d. h. der Kreisel gewinnt potentielle Energie. Als Konsequenz muss  $\omega$  und  $L$  abnehmen. Dass gerade die Anordnung (b) der stabile Zustand ist, lässt sich nur schwer anschaulich erklären.
- Das **”Levitron”** ist ein ferromagnetischer Kreisel, dessen **”Nordpol”** über dem **”Nordpol”** eines Permanentmagneten kreist. Diese Anordnung ist statisch labil; einer der Magneten würde sofort umklappen, so dass sich Nord- und Südpol gegenüberstehen. Die Kreiselsbewegung stabilisiert aber in gewissen Grenzen die Anordnung. Durch die Abstoßung der beiden Magneten schwebt der Kreisel.

<sup>4</sup>Wir können aus  $L_x$  und  $L_y$  auch zu einem komplexen Vektor  $l = L_x + iL_y$  zusammensetzen, der sich dann gemäß  $l(t) = l \cdot \exp(i\omega_p t)$  zeitlich entwickelt.

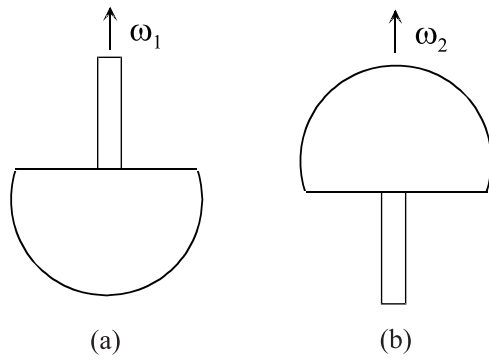


Abbildung 5.22: *Stehaufkreisel. (a): Anfangsposition, die auch ohne Drehung des Kreisels stabil ist. (b) stabile Position bei schneller Drehung des Kreisels.*

- Eine auch statisch stabile Anordnung lässt sich durch einen **Supraleiter** erreichen, der auf den Permanentmagneten gebracht wird. Im Supraleiter fließen sehr große Ringströme, die unabhängig von der Orientierung des Supraleiters so gerichtet sind, dass das von ihnen erzeugte Magnetfeld dem Feld des Permanentmagneten entgegen wirkt und dieses aus dem Supraleiter verdrängt. Diese Ströme realisieren letztlich die Kreiselbewegung, die den Supraleiter schweben lässt.