Taylor-Reihen

1 Theoretische Grundlagen

Die Idee besteht darin, eine Funktion $f(x)$ um eine Stelle x_0 durch ein Polynom (öfter einfacher zu behandeln) zu nähern. Dieses Polynom bezeichnen wir mit $T_{f,n}(x)$ und ist von Grad n:

$$T_{f,n}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (x - x_0)^\nu \ .$$

Die Koeffizienten c_ν sind so beschaffen, dass die ersten n Ableitungen von f jeweils mit den ersten n Ableitungen von $T_{f,n}$ im Punkt x_0 übereinstimmen. Hieraus erhält man:

$$c_\nu = \frac{f^{(n)}(x_0)}{\nu!} \quad \Rightarrow \quad T_{f,n}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu \ .$$

Man nennt $T_{f,n}$ das *n-te Taylor Polynom von f*. Führt man die Summe bis unendlich aus, so erhält man die (formale) *Taylor-Reihe von f*:

$$T_f(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu \ .$$

Der Satz von Taylor besagt nun im Wesentlichen, dass die Taylor-Reihe eine gute Näherung für f ist in dem Sinne, dass der „Abstand“ des n-ten Taylor-Polynoms von der wahren Funktion immer kleiner wird, je größer n wird:

$$f(x) = T_{f,n}(x) + R_n(x) = T_{f,n}(x) + o\big((x - x_0)^n\big) \ .$$

Der Ausdruck $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ für das sogenannte *Restglied* macht jedoch lediglich eine Aussage über den Fehler *in der Nähe von x_0*. Nun kann man sich aber fragen, ob $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ auch für x-Werte „weiter weg von x_0“ gilt. Es stellt sich heraus, das es für jede Taylor-Reihe einen Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$ gibt, sodass gilt:

- Beträgt der Abstand vom Entwicklungspunkt x_0 mehr als der Konvergenzradius R, so konvergiert das Taylor-Polynom $T_{f,n}$ in diesem Punkt *nicht* gegen die Funktion f:

  $$|x - x_0| > R \quad \Rightarrow T_{f,n}(x) \not\to f(x) \ .$$

- Beträgt der Abstand vom Entwicklungspunkt x_0 weniger als der Konvergenzradius R, so konvergiert das Taylor-Polynom $T_{f,n}$ in diesem Punkt gegen die Funktion f. Das bedeutet insbesondere, dass die Taylor-Reihe in diesem Punkt mit der ursprünglichen Funkton übereinstimmt:

  $$|x - x_0| < R \quad \Rightarrow T_f(x) = f(x) \ .$$

Der Konvergenzradius R kann auf jeden Fall nicht größer sein als der Abstand des Entwicklungspunktes zur nächstgelegenen Polstelle.

Wichtige Taylor-Reihen sind:

- Geometrische Reihe ($x_0 = 0$):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \ .$$

Die nächstgelegene (und einzige Polstelle) ist bei $x = 1$. Der Abstand zum Entwicklungspunkt $x_0 =$ beträgt also genau eins. Damit kann der Konvergenzradius nicht größer als eins sein, $R \leq 1$. es stellt sich heraus, dass er sogar genau eins ist, $R = 1$. Damit konvergiert die geometrische Reihe für alle x mit $|x - x_0| < 1$, also für alle x mit $|x| < 1$. Wir schreiben hierfür:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \ , \quad \forall\, x \text{ mit } |x| < 1 \ .$$

- Exponentialfunktion ($x_0 = 0$):

$$\mathrm{e}^x = \exp(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} x^\nu = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \ .$$

Die e-Funktion konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, hat also einen unendlichen Konvergenzradius. In diesem Fall schreibt man:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} x^\nu \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ .$$

- Logarithmus-Funktion ($x_0 = 0$):

$$\log(1+x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} x^\nu \ , \quad \forall\, x \text{ mit } |x| < 1 \ .$$

Man beachte, dass hier um $x_0 = 0$ entwickelt wird, jedoch das gesamte Argument des Logarithmus' in der Nähe von 1 betrachtet wird.

- Arcustangens-Funktion ($x_0 = 0$):

$$\arctan(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} x^{2\nu+1} \ , \quad \forall\, x \text{ mit } |x| < 1 \ .$$

- Sinus-Funktion ($x_0 = 0$):

$$\sin(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1} = 1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ .$$

- Kosinus-Funktion ($x_0 = 0$):

$$\cos(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ .$$

- Binomische Reihe ($x_0 = 0$):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu \ , \quad \forall\, x \text{ mit } |x| < 1$$

für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ entspricht dies dem binomischen Lehrsatz (in diesem Fall ist der Konvergenzradius sogar unendlich). Für $\alpha = -1$ erhält man wieder die geometrische Reihe. Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist $\alpha = 1/2$:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{1/2}{\nu} x^\nu = 1 + \frac{x}{2} + o(x) \ , \quad \forall\, x \text{ mit } |x| < 1 \ .$$

Für „hübsche“ Taylor-Reihen darf man (innerhalb des Konvergenzradius') gliedweise differenzieren und integrieren. Man beachte dazu insbesondere die Herleitung der Taylor-Reihen für den Logarithmus und den Arcustangens.

Das Produkt zweier Taylor-Reihen lässt sich am einfachsten über das *Cauchy-Produkt* berechnen:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu x^\mu\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\right)}_{=c_n} x^n \ .$$

Der Konvergenzradius der neuen Taylor-Reihe ist durch das Minimum der einzelnen Konvergenzradien gegeben.

2 Standard-Aufgaben

- Taylor-Reihen mit sin, cos und exp:
  Bei diesen Aufgaben hebt sich zumeist die erste Ordnung weg.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \frac{\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1}\right) - x}{x^3} = \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1}}{x^3} \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} x^{(2\nu+1)-3} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} x^{2(\nu-1)} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2(\nu+1)+1)!} x^{2(\nu+1-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu+3)!} x^{2\nu} \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist hier unendlich, da die Taylor-Reihe des Sinus' überall konvergiert. Man beachte, dass die Taylor-Reihe die ursprüngliche Funktion bei $x = 0$ stetig fortsetzt.

- <u>Produkt von mehreren Funktionen:</u>
  Anwendung des Cauchy-Produktes ist das erste Mittel der Wahl.

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-\pi x)(1-x)} &= x\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(\pi x)^{\nu}\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}x^{\mu}\right) = x\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\underbrace{\pi^{\nu}}_{=a_\nu}x^{\nu}\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\underbrace{1}_{=b_\mu}x^{\mu}\right)\\ &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n}\underbrace{\pi^{\nu}1}_{=a_\nu b_{n-\nu}}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\pi^{\nu}\right)x^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi^{n+1}-1}{\pi-1}\right)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n-1}{\pi-1}x^n\ , \quad \forall\, x \text{ mit } |x|<\frac{1}{\pi}\ .\end{aligned}$$

  Der Konvergenzradius der ersten geometrischen Reihe beträgt $1/\pi$ ($|\pi x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/\pi$), derjenige der zweiten ist 1. Damit ist $1/\pi < 1$ der Konvergenzradius der gesamten Taylor-Reihe.

- <u>„Exotische“ gemometrische Reihen:</u>
  Hier gilt es einen Faktor so auszuklammern, dass im Zähler eine 1 steht und der Nenner mit $1-\ldots$ beginnt. Der Konvergenzradius ist dann durch die Bedingung $|\ldots| < 1$ bestimmt.

$$\begin{aligned}\frac{1}{27-8x^3} &= \frac{1}{27}\frac{1}{1-\left(\frac{8x^3}{27}\right)} = \frac{1}{27}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{8x^3}{27}\right)^{\nu}\\ &= \frac{1}{27}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{8}{27}\right)^{\nu}x^{3\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{8^{\nu}}{27^{\nu+1}}x^{3\nu}\ , \quad \forall\, x \text{ mit } |x|<\frac{3}{2}\ ,\end{aligned}$$

  denn es gilt:

$$\left|\frac{8x^3}{27}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\left(\frac{2x}{3}\right)^3\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{2x}{3}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |x| < \frac{3}{2}\ .$$

- <u>Taylor-Reihen um $x_0 = a \neq 0$:</u>
  Hierbei empfiehlt es sich, eine „nahrhafte Null“ einzuschieben, um x in $x-a$ überzuführen.

  1. Geometrische Reihe um $x_0 = 4$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \frac{1}{1-(x-4)-4} = \frac{1}{-3-(x-4)}\\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{x-4}{3}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{x-4}{3}\right)^{\nu}\\ &= -\frac{1}{3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{\nu}(x-4)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{\nu+1}(x-4)^{\nu}\ , \quad \forall\, x \text{ mit } |x-4|<3\ .\end{aligned}$$

  2. e-Funktion um $x_0 = 5$:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-2x} &= \mathrm{e}^{-2(x-5)-10} = \mathrm{e}^{-10}\mathrm{e}^{-2(x-5)}\\ &= \mathrm{e}^{-10}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{[-2(x-5)]^{\nu}}{\nu!} = \mathrm{e}^{-10}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-2)^{\nu}}{\nu!}(x-5)^{\nu}\\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-10}(-2)^{\nu}}{\nu!}(x-5)^{\nu}\ , \quad \forall\, x\in\mathbb{R}\ .\end{aligned}$$