

*Hinweis (Wahrheitstafeln):* Halten Sie sich beim Aufbau von Wahrheitstafeln an das Beispiel S. 17 im Skript; achten Sie auf sinnvolle Reihenfolge der Zeilen.

**Aufgabe 5:** Zeigen Sie, dass eine Formel, in der höchstens Konjunktionen und Disjunktionen als Junktoren vorkommen, weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion sein kann. (Hinweis: es gibt Bewertungen, die alle solche Formeln wahr bzw. falsch machen. Finden Sie diese Bewertungen und weisen Sie per Induktion nach, dass diese die gewünschten Eigenschaften haben.)

**Aufgabe 6:** Geben Sie für die folgenden Formeln jeweils eine vollständige Wahrheitstafel an.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q \\ \text{(b)} & \neg(p \wedge p \rightarrow \perp) \\ \text{(c)} & (p_1 \rightarrow p_2) \vee p_3 \\ \text{(d)} & (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \end{array}$$

Analysieren Sie jeweils die Wahrheitstafel und geben Sie an, ob die untersuchten Formeln Tautologien, Kontradiktionen, kontingente oder erfüllbare Formeln sind.

**Aufgabe 7:** Seien  $\phi, \psi \in \text{PROP}$  beliebige aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie die (metasprachliche) Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. Die Formeln  $\phi$  und  $\psi$  sind logisch äquivalent; es gilt also  $\phi \models \psi$  und  $\psi \models \phi$ .
2. Für jede Belegung  $v$  gilt:  $\llbracket \phi \rrbracket_v = \llbracket \psi \rrbracket_v$ .
3. Die Formel  $\phi \leftrightarrow \psi$  ist logisch allgemeingültig; es gilt also  $\models \phi \leftrightarrow \psi$ .

**Aufgabe 8:** Wir nennen eine Menge  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$  *unabhängig*, falls keines ihrer Elemente aus den anderen Elementen gefolgert werden kann. Es gilt also für alle  $\phi \in \Gamma$ :

$$\Gamma \setminus \{\phi\} \not\models \phi$$

1. Prüfen Sie, unter welchen Bedingungen eine unabhängige Menge Tautologien oder Kontradiktionen enthalten kann; beweisen Sie das Ergebnis der Prüfung.
2. Geben Sie eine unendlich große unabhängige Menge an und weisen Sie die Unabhängigkeit dieser Menge nach.